Konstanten & Einheiten

$\hbar c \approx 197\,\text{MeV fm}$; $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$

$\hbar c \approx 1,973 \cdot 10^{-14}\text{GeV cm}$

$m_e c^2 = 511\,\text{keV}$; $m_p c^2 = 938\,\text{MeV}$;

$m_n c^2 = 940\,\text{MeV}$

$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5{,}79 \cdot 10^{-5}\,\text{eV/T}$

Ry= 13,6 eV; $a_0 = 0{,}529$ Å;

1 b= $10^{-28}\,\text{m}^2$

H-Atom / Bohr

$E_n = -\frac{Z^2}{n^2}\,\text{Ry}$, $r_n = \frac{n^2}{Z}\,a_0$

Entartung: n^2 (räumlich), $2n^2$ mit Spin

Summation über m, l

$\rightarrow \int \sum_m |\Psi_l^m|^2\, d\Omega = 2l+1 = g_l$

$\rightarrow \int \sum_{l,m} |\Psi_l^m|^2\, d\Omega = n^2$

Feinstruktur ($\sim \alpha^2 E_n$): Spin-Bahn + rel. Korrektur, spaltet nach j auf.

Relativistische Kinematik

EnergieImpulsBeziehung:

$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$

4rer-Imulsquadrad: $p^2 = m^2c^2$

Zerfall von $T_1 \Rightarrow T_2 + T_3$

Impulserhaltung:

$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\theta$ wobei θ der Winkel zwischen T_1, T_2 ist

Energieerhaltung: $E_3^2 = E_1^2 - E_2^2$

Massenbestimmung: $m_3^2 = E_3^2 - p_3^2$

Mndestenergie: $\sqrt{s_{min}} = \sum m_f$

$s = (p_{beam} + p_{target})^2$ Lorenz:

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{mc^2}$

$E \approx pc$, wenn $E \gg mc^2$

Hochenergienaeherug:

$\beta \approx 1 - \frac{m^2c^4}{2E^2}$

Im Laborsystem: $s = (p_1+p_2)^2$

$\beta\gamma = \frac{pc}{mc^2}$

Mosley Law

$E_n = -E_R \cdot \frac{(Z-\sigma)^2}{n^2}$

$\Delta E = E_2 - E_1$

Serien + Abschirmung

K - in n=1 ($\sigma = 1$)

L - in n=2 ($\sigma = 7, 4$)

Alpha, von $\Delta = 1$ kommend, $\beta \hat{=} \Delta = 2$

Grundzustandsbestimmung

Termsymbol: $^{2S+1}L_J$ ($2S+1$ = Multiplizität, $L \in \{S, P, D, F, \ldots\}$)

Hundsche Regeln

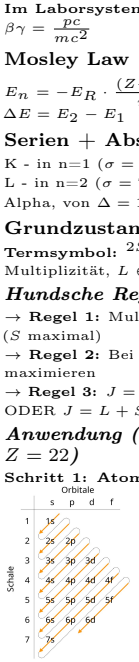
$\rightarrow$ **Regel 1:** Multiplizität maximieren (S maximal)

$\rightarrow$ **Regel 2:** Bei S gegeben, L maximieren

$\rightarrow$ **Regel 3:** $J = |L - S|$ (unter halbvoll) ODER $J = L + S$ (über halbvoll)

Anwendung (Bsp. Titan, $Z = 22$)

Schritt 1: Atom auffüllen



Mit max. Elektronen im jeweiligen Orbital:

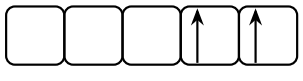
s	2
p	6
d	10
f	14

Für Titan ($Z = 22$):

$(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(4s)^2(3d)^2$

e^- nach Hund in Orbitalen platzieren

d-Schale



Hund 1 maximiert S, also beide e^- Spin up, sodass $S = 1$.

$S = 3/2, 5/2 \rightarrow symm$

$S = 0 \rightarrow antisymm$

Bestimme L

Da $S = 1$, muss L ungerade sein (Antisymmetrie d. WF für äquiv. e^-).

Nach Hund 2 soll L maximal sein: nimm die m_l aus den Orbitalen und addiere zum größten ungeraden Wert. *Titan:* $L = 3$

Bestimme J:

$$J = |L - S|, \ldots, L + S$$

und davon (unter halbvoll) das kleinste. *Für Titan:* $^3F_2$

aufspaltung grundzustand

Bei J spaltet sich ein zustand in $2J+1$ Linien auf

$m_J = -J, -J+1, \ldots J$

Addition Drehimpulse

$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$, $|l - s| \le j \le l + s$, $m_j = m_l + m_s$

LS/jj-Kopplung

Kleines Z = LS: WW$\sim l_i l_j, s_i s_j$ groß gegenüber WW$\sim l_i s_i$

$\vec{L} = \sum \vec{l}_i$, $\vec{S} = \sum \vec{s}_i$, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

Großes Z = jj: WW$\sim l_i l_j, s_i s_j$ klein gegenüber WW$\sim l_i s_i$

$\vec{J} = \sum \vec{j}_i$, $\vec{j}_i = \vec{l}_i + \vec{s}_i$

Clebsch-Gordan

CG geben an, wie häufig sich $|j_1, m_1\rangle$ und $|j_2, m_2\rangle$ zu $|J, M, j_1, j_2\rangle$ kombinieren. Werden null, wenn es aus Symmetriegründen nicht geht ($M \neq m_1 + m_2$ oder J verboten).

Lebensdauer angeregter Zustände

$N(t) = N_0\, e^{-t/\tau}$

Übergangs-WK (Dipol)

$|A_{fi}|^2 = |\langle f|\hat{H}_{ww}|i\rangle|^2 = e^2\,|\int \psi_f^*\, \vec{r}\, \psi_i\, dV|^2$

Große WK $\rightarrow$ kleine Lebensdauer

Auswahlregeln

Dipolübergänge

$\Delta L = \pm 1$, $\Delta M = 0, \pm 1$, $\Delta S = 0$, $\Delta J = 0, \pm 1$

($J = 0 \rightarrow J = 0$ verboten; Parität muss wechseln)

Linienbreiten

$\Delta E \cdot \tau = \hbar$

$\Delta\omega \cdot \tau = 1$ ($\Delta E = \hbar\,\Delta\omega$)

Linienform ist Lorentzprofil:

$P(\omega) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma/2}{(\omega-\omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2}$

Alkalis

$V_{eff} = -\frac{Z_{eff}\, e^2}{r}$ $\Rightarrow$ Aufhebung der l-Entartung

$\rightarrow E_n(s) < E_n(p) < E_n(d) < E_n(f)$; Aufspaltung für kleine n am größten

LS-Kopplung

Operatoren:

$\rightarrow \hat{\vec{L}}^2\psi = \hbar^2 L(L+1)\psi$, $\hat{L}_z\psi = \hbar M_L\psi$

$\rightarrow \hat{\vec{S}}^2\psi = \hbar^2 S(S+1)\psi$, $\hat{S}_z\psi = \hbar M_S\psi$

Hamilton ohne SB-Kopplung

$\hat{H}_0 = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V_{eff}(r_i) + \hat{H}_{rest}(r_{ij})$

Gute Quantenzahlen:

$|n, L, M_L, S, M_S\rangle$

Mit SB-Kopplung

$\hat{H}_{SB} = c \cdot \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}$

Gute Quantenzahlen: $|n, L, S, J, M_J\rangle$

$E_{SB} = c \cdot [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)]$

$c > 0$: weniger als halb gefüllte Schale

$c < 0$: mehr als halb gefüllt

Intervallregel

$\Delta E_{SB} = E_{SB}(J) - E_{SB}(J-1) = 2cJ$

jj-Kopplung

$\rightarrow$ Anzahl Terme bleibt gleich

$\rightarrow$ Energieniveaus eindeutig durch J definiert

$\rightarrow$ Niveaus mit gleichem J können mischen

Auswahlregeln jj-Kopplung

$\Delta J = 0, \pm 1$, $\Delta M_J = 0, \pm 1$

Zeeman-Effekt

Magn. Moment: $\vec{\mu}_J = -g_J\mu_B\frac{\vec{J}}{\hbar}$,

$|\vec{\mu}_J| = g_J\mu_B\sqrt{J(J+1)}$

Landé-Faktor:

$g_J = 1 + \frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}$

Schwaches Feld (LS bleibt gut):

$\Delta E = g_J\,\mu_B\,B\,m_J$, $m_J = -J, \ldots, J$

$\rightarrow$ Aufspaltung in $2J+1$ Niveaus

Normal ($S = 0 \Rightarrow g_J = 1$): Triplett, $\Delta E = \mu_B B\, m_J$

Anomal ($S \neq 0$): $g_J \neq 1$

Paschen-Back (starkes Feld, L, S entkoppeln):

$\Delta E \approx (m_L + 2m_S)\,\mu_B B$

Kräfte

$\rightarrow$ El.-mag. – wirkt auf alle geladenen Teilchen

$\rightarrow$ Schwache WW – wirkt auf alle Fermionen

$\rightarrow$ Starke WW – wirkt nur zwischen Quarks (u. Gluonen)

WW nur durch Austausch von Feldquanten

Photon als Austauschteilchen

$e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ mit Impulsen p_1, p_1'

Photon überträgt Viererimpuls:

$q^2 = (p_1' - p_1)^2$

Photonpropagator: $\frac{1}{q^2}$

Austauschteilchen

El.-mag. – Photon γ (masselos)

Schwache WW – $W^\pm, Z^0$-Bosonen

Starke WW – Gluonen (g)

W-Propagator

$V_{weak}(q^2) = \frac{g^2}{q^2 - m_W^2c^4}$

Massenmessung

$p = (\frac{E}{c}, \vec{p})$

Über invariante Masse / Viererimpuls:

$m_x^2c^4 = (p_1+p_2)^2 = (E_1+E_2)^2 - |\vec{p}_1 + \vec{p}_2|^2c^2$

$= m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2\cos\theta)$

Fuer Photonen: $E = pc$,weil masse null

Sucht man zerfallsteilchenmasse:

$p_X^2 = m_X^2c^2$ $p_{ini} = p_1 + p_X$

$m_X^2c^2 = (p_{ini} - p_1)^2$ **Rel impuls:**

$p = \gamma mv = \gamma m(\beta c)$

Spin

Fermionen – halbzahliger Spin, Fermi-Dirac, Pauli-Prinzip

Bosonen – ganzzahliger Spin, Bose-Einstein, keine Besetzungsbeschränkung

Quarks, Leptonen: Spin $\frac{1}{2}$;

WW-Teilchen: Spin 1; Higgs: Spin 0

Zusammengesetzte Teilchen

Aus Quarks zusammengesetzt: Hadronen

Baryonen: 3 Quarks (qqq)

Mesonen: Quark + Antiquark ($q\bar{q}$)

Spin & Mag. Moment

$\vec{\mu}_s = -g_s\,\mu_B\frac{\vec{S}}{\hbar}$, $g_s \approx 2$

Instabiles Teilchen

Zerfalls-/Energiebreite: $\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$

Breit-Wigner:

$P(E) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\Gamma}{(E - mc^2)^2 + \Gamma^2/4}$

Fermis Goldene Regel

Übergangswahrscheinlichkeit W_{fi}:

$W_{fi} = \frac{dP}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar}\,|\langle f|\hat{H}_{WW}|i\rangle|^2\rho(E)$

Lebensdauer: $\tau = \frac{1}{W_{fi}}$

$\langle f|\hat{H}_{ww}|i\rangle = \int_V \psi_f^*\,\hat{H}_{ww}\,\psi_i\, d^3r$

Zustandsdichte (mögliche Endzustände bei E_f):

$\rho(E) = |\frac{dN}{dE_f}|_{E_i}$

Einteilchenphasenraum (V=1):

$\rho_1(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{V\,E\,p\,c}{2\pi^2(\hbar c)^3}$

Zweiteilchenphasenraum (V=1):

$\rho_2(E) = \frac{dN_2}{dE} = \frac{V}{(2\pi\hbar c)^3} \cdot \frac{E_1E_2\,p_1c}{E_1+E_2} \int d\Omega_1$

Zerfallsbreite

$\Gamma_{fi} = W_{fi}\,\hbar = 2\pi|T_{fi}|^2\rho(E_i)$

Verzweigungsverhältnis $\frac{\Gamma_i}{\Gamma}$

$T_{fi} \propto$ Clebsch Gordon Coeffizient

Mittlere freie Weglänge

$\lambda = \frac{1}{n\sigma}$

n = Dichte der Streuzentren im Target

σ = Wirkungsquerschnitt

Zahl ungestreuter Teilchen:

$N(x) = N_0\, e^{-x/\lambda}$

Wirkungsquerschnitt

Fixed Target:

$\sigma = \frac{\Gamma_{fi}}{\hbar v} = \frac{2\pi}{\hbar v}|T_{fi}|^2\rho(E)$

Kollision: $\sigma = \frac{\Gamma_{fi}}{\hbar(v_a + v_b)}$

Mit Raumwinkel

$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v}|T_{fi}|^2\rho(\Omega)\, d\Omega$

Differentieller Wirkungsquerschnitt (meist fm^2)

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2(\hbar c)^2}{4 \cdot E^2\sin^4(\theta/2)}\cos^2(\theta/2)$

Totaler Wirkungsquerschnitt

$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega$

$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{inel} + \ldots$

Geometrischer Querschnitt

$\sigma_{geo} = \pi(r_t + r_p)^2$ (r_t, r_p = Target-/Projektilradius)

Luminosität

$R = \dot{N}_s = \phi_a N_b \cdot \sigma$

R: Steurate

Luminosität (fixed target): $L = \phi_a N_b$

ϕ_a = Teilchenstrom $= n_a \cdot v$

$N_s = \sigma\int_0^T L\, dt$

Collider: $L = f_{umlauf} \cdot n\,\frac{N_1N_2}{A}$

N_i: Teilchen pro Paket, n: Anzahl kollidierender Pakete

Collider mit 2 Protonstrahlen mit je E ergibt $\sqrt{s} = 2E$.

Feynman-Regeln

Externe Linien

Ein-/auslaufende Teilchen entlang der Zeitachse, reelle Teilchen mit $p^2 = m^2c^4$

Antiteilchen in negativer Zeitrichtung

Innere Linien

Austauschteilchen (virtuell): $q^2 = E^2 - \vec{p}^2c^2 \neq m^2c^4$

An jedem Vertex erhalten:

Viererimpuls, Ladung, Lepton-, Baryonzahl, Farbe

$T_{fi} \propto \frac{e^2}{q^2}$

Wirkungsquerschnitt (el.-mag. Streuung):

$\sigma \sim |T_{fi}|^2 \sim \frac{e^4}{q^4}$

Raumartig: $q^2 < 0$; es gibt System mit $\Delta E = q^0 = 0$

Zeitartig: $q^2 > 0$; es gibt System mit $\vec{q} = 0$

Mehrere mögliche Prozesse zum selben Endzustand $\Rightarrow$ Matrixelemente kohärent addieren.

Amplituden: bei el.mag, pro vertex ein e, also $\sqrt{\alpha}$

Teilchennachweis

$\rightarrow$ gel. Teilchen – Ionisation, Bremsstrahlung, Cherenkov-Strahlung

$\rightarrow$ Hadronen – Kernwechselwirkungen

$\rightarrow$ Photonen – Photo-, Compton-Effekt, Paarbildung

$\rightarrow$ Neutrinos – schwache Wechselwirkung

Ionisation

Bethe-Bloch

$\langle\frac{dE}{dx}\rangle_{ion} = -\frac{4\pi n_e z^2 e^4}{m_e c^2\beta^2}\left(\ln\frac{2m_ec^2\gamma^2\beta^2}{I} - \beta^2\right)$

$n_e = \rho N_A\frac{Z}{A}$

I = mittlere Anregungsenergie im Medium

(Bethe-Bloch gilt für schwere Teilchen)

Minimalionisierend, wenn $\beta\gamma \sim 3 - 4$

Dann gilt abschaetzing oder einfach $\approx 2MeVg^{-1}cm^2$

Abschaetzung:

$-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx} = 4 \cdot \frac{Z}{A}\text{MeV}cm^2/g$

A, Massenzahl, Z Kernladungz

E-Verlust von e^-

$\langle\frac{dE}{dx}\rangle = \langle\frac{dE}{dx}\rangle_{ion} + \langle\frac{dE}{dx}\rangle_{brems}$

$\langle\frac{dE}{dx}\rangle_{brems} \sim \frac{Z^2e^6}{m_e^2} \cdot E = \frac{E}{X_0}$

$\rightarrow E(x) = E_0 \cdot e^{-\frac{x}{X_0}}$

Cherenkov-Bedingung

$\cos\theta = \frac{1}{n\beta}$

Strahlung wenn $n\beta > 1$

mit $\beta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}}$

bei $p_1 = p_2$, $m_1 < m_2 \rightarrow$ $\frac{1}{\beta_1} < n < \frac{1}{\beta_2}$

Wenn $p >> m \rightarrow \beta = \frac{p}{E} \approx 1 - \frac{m^2}{2p^2}$

$\Delta\theta = \frac{\Delta\beta}{n\beta^2 sin(\theta)}$

$\sin\theta = \sqrt{1 - cos^2\theta} \approx \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$

Photonen mit Materie

$I(x) = I_0e^{-\mu x}$, $\mu = n\sigma = \frac{1}{\lambda} = \mu_{ph} + \mu_{comp} + \mu_{paar}$

$\mu_i = n\sigma_i = \frac{N_A\rho}{A}\sigma_i$

Photoeffekt: $\sigma_{ph} \sim \frac{Z^5}{E^{7/2}}$

Compton-Streuung $\gamma + e^- \rightarrow \gamma' + e^-$

$E_{\gamma'} = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_ec^2}(1 - \cos\theta_{\gamma'})}$

$\sigma_{comp} \sim \frac{\alpha^2 Z}{E_{cms}^2}$

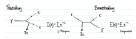
Wenn $E_\gamma \gg m_ec^2$: $E_{cms} \approx E_\gamma$

Paarbildung

Energieschwelle: $E_\gamma \ge 1{,}022\,\text{MeV} = 2m_ec^2$

$\sigma_{paar} = \frac{7}{9}\frac{A}{\rho N_A}\frac{1}{X_0}$

Dominiert ab 10–100 MeV; mfW: $\lambda_{paar} = \frac{9}{7}X_0$



Schauerbildung

Allg. $X_0 < \lambda_{int}$, d.h. el.-mag. Schauer sind kompakter als hadronische.

Schauertiefe (in X_0)

el.-mag.: $x_{max} = \log_2(\frac{E}{E_c})$ (E_c = krit. Energie)

Detektoren

Spurdetektor – Trajektorien gel. Teilchen

Spektrometer – Impulsmessung gel. Teilchen

Kalorimeter – Energiemessung

PID-Systeme – Teilchenidentifikation

Impulsmessung

$p_\perp = qBR$ (Ablenkung im B-Feld)

Energieauflösung im Kalorimeter

$\frac{\Delta E}{E} = \frac{C}{\sqrt{E}}$

Symmetrietrafos

Diskrete Symmetrien (Parität, Punktspiegelung) $\rightarrow$ multiplikative Erhaltungsgrößen

Kontinuierliche Symmetrien (Translation, Rotation ...) $\rightarrow$ additive Erhaltungsgrößen

Additive Erhaltungsgrößen

Ladung

Leptonzahlerhaltung

$\sum_i L_{e_i} = \text{const}$, $\sum_i L_{\mu_i} = \text{const}$, $\sum_i L_{\tau_i} = \text{const}$

$\sum_i L_i = \text{const}$, $L = L_e + L_\mu + L_\tau$

Teilchen $L = +1$, Antiteilchen $L = -1$

Baryonzahlerhaltung

Quarks $B = \frac{1}{3}$, Antiquarks $B = -\frac{1}{3}$

Hadronen: $B = \frac{n_q - n_{\bar{q}}}{3}$ (n_q = #Quarks, $n_{\bar{q}}$ = #Antiquarks)

Baryonen $B = 1$, Antibaryonen $B = -1$, Mesonen $B = 0$

Isospin

Proton: $|I = \frac{1}{2}, I_3 = +\frac{1}{2}\rangle$ (Up-artig)

Neutron: $|I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2}\rangle$ (Down-artig)

Bsp: Pionen (π^+, π^0, π^-) mit $I = 1$

Andere Quarks haben $I = 0$

Isospin ist für die starke WW erhalten.

Strangeness

S bei starker WW erhalten, bei schwacher nicht

$\Rightarrow$ s-Quark: $S = -1$, $\bar{s}: S = +1$

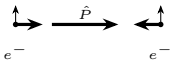
Überblick Quarks

	I	I_3	S	C	B	T
d-Quark	1/2	−1/2	0	0	0	0
u-Quark	1/2	1/2	0	0	0	0
s-Quark	0	0	−1	0	0	0
c-Quark	0	0	0	+1	0	0
b-Quark	0	0	0	0	−1	0
t-Quark	0	0	0	0	0	+1

	I	I_3	S	C	B	T
Starke WW	ja	ja	ja	ja	ja	ja
El.-mag. WW	nein	ja	ja	ja	ja	ja
Schwache WW	nein	nein	nein	nein	nein	nein

Multiplikative Quantenzahlen

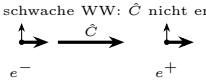
Parität:
starke und el.-mag. WW $\to \hat{P}$ erhalten
schwache WW: $\hat{P}$ nicht erhalten
$\eta_P(p) = \eta_P(n) = \eta_P(\Lambda) = +1$
η_P(Fermion) =
$+1, \quad \eta_P$(Antifermion) $= -1$
η_P(Eichboson) $= -1$
Sei $\psi = \psi_\alpha \psi_\beta$ $\phi(r_\alpha - r_\beta)$ mit
$\hat{P}\psi_\alpha = \eta_\alpha \psi_\alpha$ etc.
$\Rightarrow \hat{P}\psi = \eta_\alpha \eta_\beta (-1)^l \psi$
l = Bahndrehimpuls d. Relativbewegung



($\to = \vec{p}$, $\uparrow = \vec{s}$); p flippt, s bleibt
$\Rightarrow h \to -h$

C-Parität

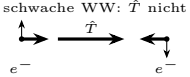
starke und el.-mag. WW $\to \hat{C}$ erhalten
schwache WW: $\hat{C}$ nicht erhalten



Teilchen→Antiteilchen, p, s bleiben $\Rightarrow h$ gleich

Zeitumkehr

starke und el.-mag. WW $\to \hat{T}$ erhalten
schwache WW: $\hat{T}$ nicht erhalten



p und s flippen $\Rightarrow h$ gleich
$\Rightarrow$ nur $\hat{C}\hat{P}$ bildet $\nu_L \to \bar{\nu}_R$ ab (beobachtet, s.u.)

Eigenschaften Neutrinos

Helizität: $h = \frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{\hbar|\vec{p}|}$
$\nu : h = -\frac{1}{2}$ immer linkshändig
$\bar{\nu} : h = +\frac{1}{2}$ immer rechtshändig

Wu-Experiment

Relevante Größen
Zerfall: $^{60}\text{Co} \to {}^{60}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e$
(Schwache Wechselwirkung)
Kernspin $\vec{J}$: Ausgerichtet durch externes Magnetfeld $\vec{B}$ bei $T < 0{,}01$ K
(Vermeidung von Wärmebewegung)
Elektronenimpuls $\vec{p}_e$: Flugrichtung der emittierten β-Teilchen

Beobachtung:
Asymmetrie: Deutlich mehr Elektronen fliegen *entgegen* der Richtung des Kernspins ($\vec{p}_e \uparrow\downarrow \vec{J}$)
Messgröße: Die Intensität hängt direkt vom Winkel zwischen Spin und Impuls ab ($\propto 1 - \frac{v}{c}\cos\theta$)
Aussagekraft:
Beweis der maximalen Paritätsverletzung (P-Verletzung) in der Schwachen Wechselwirkung
Symmetrie-Check: Unter Raumspiegelung spiegelt sich der Impuls ($\vec{p}_e \to -\vec{p}_e$), der Drehimpuls/Spin bleibt als axialer Vektor gleich ($\vec{J} \to \vec{J}$)
Das Spiegelexperiment müsste das umgekehrte Verhalten zeigen – da die Natur aber eine Richtung real bevorzugt, ist die Spiegelsymmetrie kollabiert
Die Helizitaet muesste im Mittel verschwinden

Rutherford-Streuung

$\to$ Streupartner punktförmig, geladen
$\to E_{kin} = T$ klein gegenüber Masse des Targets
$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ruth} = \frac{(Z_1 Z_2 e^2)^2}{16T^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$
$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^2}|T_{fi}|^2$
relativistische Form
$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ruth} = \frac{(Z_1 Z_2 e^2)^2}{4p^2c^2\beta^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$
$\beta = \frac{v}{c}$, $(pc)^2 = E^2 - m^2c^4$
α-Teilchen$\to Z = 2$

Mott-Streuung

Streuung von Spin-$\frac{1}{2}$-Elektronen an schwerem Target ohne Spin.
$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{mott} =$
$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ruth}(1 - \beta^2\sin^2(\theta/2))$
Ausgedehntes Target
$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{ext}_{mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{mott} \cdot |F(q^2)|^2$
Formfaktor: $F(q^2) = \int \rho(\vec{r})\, e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar}\, d^3r$
$\to$ Wirkungsquerschnitt an ausgedehntem Target immer kleiner als bei punktförmigem ($|F| \le 1$)

Dirac-Streuformel

Für Spin $\frac{1}{2}$ an Spin $\frac{1}{2}$ (Punktproton):
$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{dirac} =$
$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{mott} \cdot \left(1 + \frac{Q^2}{2M_p^2c^4}\tan^2(\theta/2)\right)$
$Q^2 = -q^2$

Rosenbluth-Formel

Mit Formfaktoren G_E, G_M (Funktion von Q^2):
$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{mott} \cdot$
$\left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1+\tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2\frac{\theta}{2}\right]$
$\tau = \frac{Q^2}{4M_p^2c^4}$

Protonradius

Formfaktor:
$G_E(Q^2) = (1 + \frac{Q^2}{0{,}71\,\text{GeV}^2})^{-2}$
$\langle r^2\rangle = -6\hbar^2 \left.\frac{dG_E(Q^2)}{dQ^2}\right|_{Q^2=0}$

Kernradien

Fuers erste minimum: $|q|R/\hbar \approx 4.49$
Mit $q = 2p\sin(\theta/2)$, wenn $E_i \approx E_f$
Impulsuebrtrag:
$q = (E_i - E_f, \vec{p}_i - \vec{p}_f)$

Rückstoß bei Streuung

Fixed target
$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{\text{rück}} = \frac{E_f}{E_i}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$
Elastische Streuung (fixed target)
$E_f = E_i\left(1 + \frac{2E_i}{Mc^2}\sin^2(\theta/2)\right)^{-1}$

Tiefinelastischer Stoß

Fixed Target, Proton vor dem Stoß:
$P = (M_pc^2, \vec{0})$
Neg. Vierermpulsübertrag:
$Q^2 = -q^2 = 4E_iE_f\sin^2(\theta/2)$
Impulsuebrtrag kurz: $q = 2p\sin(\theta/2)$
Energieübertrag im Labor: $\nu = E_i - E_f$
Bjorken-x (Impulsanteil des Quarks):
$x = \frac{Q^2}{2M_pc^2\nu} = \frac{Q^2}{2\vec{P}\cdot q}$
Elastisch: $x = 1$; inelastisch: $x < 1$
Invariante Masse des Endzustands:
$W^2c^4 = M_p^2c^4 + 2M_pc^2\nu - Q^2$
Wirkungsquerschnitte
$\frac{d^2\sigma}{d\Omega\, dE_f} =$
$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{mott} \cdot (W_2 + 2W_1\tan^2(\theta/2))$
$F_1 = M_pc^2W_1, \quad F_2 = \nu W_2$
Callan-Gross-Relation:
$2xF_1(x) = F_2(x)$
$\to$ bestätigt, dass Quarks Spin $\frac{1}{2}$ haben
$F_2(x) = x\cdot\sum_{q_i} e_{q_i}^2\,(q_i(x) + \bar{q}_i(x))$
$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{Hadrons})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = 3\sum_{\text{aktive } q} Q_q^2$.
Q=Ladung d. quarks

Starke WW – Farbladung

Quarks tragen 3 Farbladungen, Antiquarks Antifarbe

Gluonen tragen je eine Farbe und eine Antifarbe

Schwache WW

β-Zerfall
$n \to p\, e^-\bar{\nu}_e$
β^--Zerfall
$^A_Z X \to {}^A_{Z+1}Y + e^- + \bar{\nu}_e$
Verlangsamung des e^- durch Anziehung (Z+1)
β^+-Zerfall
$^A_Z X \to {}^A_{Z-1}Y + e^+ + \nu_e$
Beschleunigung des e^+ durch Abstoßung

Leptonen – keine Generationsmischung
$\nu_e \leftrightarrow e, \quad \nu_\mu \leftrightarrow \mu, \quad \nu_\tau \leftrightarrow \tau$
Quarks – Mischung möglich (CKM)
$u \leftrightarrow d, \quad c \leftrightarrow s, \quad t \leftrightarrow b$
Proton-Antiproton-Kollision
$u\bar{d} \to W^+, \quad d\bar{u} \to W^-$
$u\bar{u} \to Z^0, \quad d\bar{d} \to Z^0$

Kopplung von W und Z

$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad e = e_L + e_R$
$\to W^\pm$: Kopplung nur an linkshändige Fermionen (bzw. rechtshändige Antifermionen)
$\to Z$: an beide, unterschiedlich stark

Bindungsenergie

$B(N, Z) =$
$Zm_pc^2 + Zm_ec^2 + Nm_nc^2 - M(N, Z)c^2$
M = Masse des Atoms, N = Anzahl Neutronen
Bindungsenergie pro Nukleon:
$\frac{B}{A}, \quad A = N + Z$
Weizsäcker-Formel
$B = a_vA - a_0A^{2/3} - a_c\frac{Z^2}{A^{1/3}} -$
$a_{sym}\frac{(N-Z)^2}{A} \pm \frac{\delta}{A^{1/2}}$
(a_v Volumen, a_0 Oberfläche, a_c Coulomb, a_{sym} Asymmetrie, δ Paarung)

Kernzerfälle

Q-Wert: $Q = (M_i - \sum_f M_f)c^2$; Zerfall möglich wenn $Q > 0$, ca. ab A=90
α: $^A_Z X \to {}^{A-4}_{Z-2}Y + \alpha$
γ: Abregung des Kerns, kein Wechsel von Z, A
$\beta^- : A = const, Z \to Z+1, N \to N-1, Q = M_x - M_y$
$\beta^+ : A = const, Z \to Z-1, N \to N+1, Q = M_x - M_y - 2m_e$
$\alpha : A \to A-4, Z \to Z-2, N \to N-2, Q = M_x - M_y - M_\alpha$
$\gamma : A = const, Z = const, N = const, Q = M_{x^*} - M_x$
Lebensdauer Alpha Zerfall:
$\frac{1}{\tau} \sim e^{-2/\sqrt{E_\alpha}}$

Fundamentale Teilchen (SM)

Quarks (alle Spin $\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{3}$):

q	Q	m	q	Q	m
u	$+\frac{2}{3}$	2,2 M	c	$+\frac{2}{3}$	1,27 G
d	$-\frac{1}{3}$	4,7 M	s	$-\frac{1}{3}$	95 M
t	$+\frac{2}{3}$	173 G	b	$-\frac{1}{3}$	4,2 G

alle Quarks: $B = \frac{1}{3}$, $L = 0$, $\eta_P = +1$;
Antiquark: $Q, B, S, C, B, T, \eta_P \to$ Vorzeichen
Leptonen (Spin $\frac{1}{2}$, $L = +1$):

ℓ	Q	m	τ / Zerfall
e	−1	0,511 M	stabil
μ	−1	105,7 M	2,2 μs, $e\bar{\nu}_e\nu_\mu$
τ	−1	1777 M	2,9·10^{-13} s
$\nu_{e,\mu,\tau}$	0	<1 eV	(stabil)

alle Leptonen: B=0, S=C= . . . =0;
Antilepton: L= − 1, $Q \to$ Vorzeichen
Eichbosonen & Higgs:

	WW	Q	J	m
γ	e.m.	0	1	0
g (×8)	stark	0	1	0
$W^\pm$	schwach	±1	1	80,4 G
Z^0	schwach	0	1	91,2 G
H^0	—	0	0	125 G

alle Bosonen & H^0:
B=0, L=0, S=C= . . . =0;
$\eta_P(\gamma, g)$= − 1, H^0: J^P=0^+

Wichtige Hadronen

WW-Tag: st=stark, em=e.m., s=schwach.
Mesonen ($q\bar{q}$, B=0; P=$(-1)^{L+1}$):

	$q\bar{q}$	Q	I	S	m	τ/s	Zerfall
$\pi^\pm$	$u\bar{d}$	±1	1	0	140	2,6·10^{-8}	$\mu\nu$ (s)
π^0	$\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$	0	1	0	135	8,5·10^{-17}	$\gamma\gamma$ (em)
$K^\pm$	$u\bar{s}$	±1	$\frac{1}{2}$	±1	494	1,2·10^{-8}	$\mu\nu, \pi\pi$ (s)
K^0	$d\bar{s}$	0	$\frac{1}{2}$	+1	498	S:0,9e−10 L:5,1e−8	$\pi\pi/3\pi$ (s)
η	$\frac{u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}}{\sqrt{6}}$	0	0	0	548	5·10^{-19}	$\gamma\gamma$, 3π (em)
J/ψ	$c\bar{c}$	0	0	0	3097	7·10^{-21}	$\ell\ell$,Had (em/st)
Υ	$b\bar{b}$	0	0	0	9460	1,2·10^{-20}	$\ell\ell$ (em)

J^P=0^- (pseudoskalar, L=0), 1^- (Vektor: $\rho, J/\psi, \Upsilon$)
alle Mesonen: B=0, L=0; Antimeson = Ladungs-/Flavour-Konj.
Baryonen (qqq, B=1, P= + 1):

	qqq	Q	I	S	m	τ/s	Zerfall
p	uud	+1	$\frac{1}{2}$	0	938	stabil	—
n	udd	0	$\frac{1}{2}$	0	940	880	$pe\bar{\nu}_e$ (s)
Λ	uds	0	0	−1	1116	2,6·10^{-10}	$p\pi^-$ (s)
Σ^+	uus	+1	1	−1	1189	8·10^{-11}	$p\pi^0, n\pi^+$ (s)
Σ^0	uds	0	1	−1	1193	7·10^{-20}	$\Lambda\gamma$ (em)
Σ^-	dds	−1	1	−1	1197	1,5·10^{-10}	$n\pi^-$ (s)
Ξ^0	uss	0	$\frac{1}{2}$	−2	1315	2,9·10^{-10}	$\Lambda\pi^0$ (s)
Ξ^-	dss	−1	$\frac{1}{2}$	−2	1322	1,6·10^{-10}	$\Lambda\pi^-$ (s)
Δ	$uuu..ddd$	2..−1	$\frac{3}{2}$	0	1232	6·10^{-24}	$N\pi$ (st)
Ω^-	sss	−1	0	−3	1672	8·10^{-11}	ΛK^- (s)

Oktett $J^P = \frac{1}{2}^+$; Dekuplett ($\Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega$) $J^P = \frac{3}{2}^+$
alle Baryonen: B=1, L=0; Antibaryon: B= − 1, $Q, S, \cdots \to$ Vorzeichen
(K^0: Masseneigenzustände K_S/K_L; m in MeV)

Erhaltungssätze

Größe	stark	e.m.	schwach
Q, B, L	ja	ja	ja
Energie/Impuls, J	ja	ja	ja
P (Parität)	ja	ja	**nein**
C	ja	ja	**nein**
CP, T	ja	ja	fast
I (Isospin)	ja	**nein**	**nein**
I_3	ja	ja	**nein**
S, C, B, T (Flavour)	ja	ja	**nein**

Bei schwacher WW: $|\Delta S| \le 1$,
$\Delta S = \Delta Q$ (gel. Strom)
stark/e.m.: $\Delta S = \Delta C = 0$

Zerfall / WW erkennen

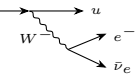
Aus Lebensdauer auf WW schließen:
$\to$ **stark**: $\tau \sim 10^{-23}$ s (breite Resonanz), ΔS=0
$\to$ **e.m.**: $\tau \sim 10^{-16}$–10^{-19} s, γ im Endzustand
$\to$ **schwach**: $\tau \gtrsim 10^{-13}$ s, Neutrino / $\Delta S \ne 0$
Reaktion erlaubt, wenn *alle* erhaltenen Größen der jeweiligen WW balancieren (Q, B, L, ggf. S, I. . .).

CKM / Quarkmischung

Schwache Eigenzustände $\neq$ Masseneigenzustände:
$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V_{CKM}\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$
Diagonal dominant: $u \leftrightarrow d$ (Cabibbo-erlaubt) $\gg u \leftrightarrow s$ (unterdrückt)
$\sin\theta_C \approx 0{,}22$ ($\theta_C \approx 13^\circ$)

Feynman: β^- (Quarkebene)

$d \to u + W^-$, $W^- \to e^-\bar{\nu}_e$



(Spektatorquarks: $n = udd \to p = uud$)

Rydberg / Spektralserien

$\frac{1}{\lambda} = R_\infty Z^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$, $n_2 > n_1$
$R_\infty \approx 1{,}097\cdot 10^7\,\text{m}^{-1}$, hcR_∞ = Ry = 13,6 eV
Lyman (n_1=1, UV), Balmer (n_1=2, sichtbar), Paschen (n_1=3, IR)

Prozess erlaubt? + Feynman

1) IMMER erhalten (jede WW) – sonst verboten:
$\to$ Energie/Impuls: Zerfall nur wenn $Q > 0$ ($m_i \ge \sum m_f$); Erzeugung: genug $\sqrt{s}$
$\to$ Ladung Q
$\to$ Baryonzahl B
$\to$ Leptonzahl L_e, L_μ, L_τ *je Familie*
$\to$ Drehimpuls J (Spin + Bahn)
2) Welche WW?
ν dabei oder Flavour ändert ($\Delta S, \Delta C \ldots \ne 0$) $\Rightarrow$ **schwach**
nur γ, kein Flavourwechsel $\Rightarrow$ **e.m.**
sonst (Hadronen, schnell, ΔS=0) $\Rightarrow$ **stark**
3) WW-spezifisch prüfen
(Erhaltungstabelle):
stark: zusätzl. I, I_3, S, C, B, T, P, C
e.m.: I_3, Flavour, P, C (aber I verletzt)
schwach: darf P, C, I verletzen;
$|\Delta S| \le 1$, $\Delta S = \Delta Q$
$\Rightarrow$ **verboten**, wenn *keine* WW alle Regeln erfüllt; sonst schnellste erlaubte WW dominiert.

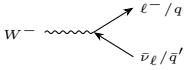
Feynman-Diagramm zeichnen:
1. Zeitachse ($\to$): Teilchen vorwärts, Antiteilchen rückwärts (Pfeilrichtung).
2. Einlaufend links, auslaufend rechts = externe Linien (p^2=m^2c^4).
3. WW wählen $\Rightarrow$ Austauschboson (innere Linie):
e.m.: γ (an Ladung); stark: g (nur Quarks, Farbe);
schwach: $W^\pm$ (ΔQ= ± 1 am Vertex) oder Z^0 (neutral).
4. Vertex = 2 Fermionlinien + 1 Boson; an jedem Vertex Q, B, L, Farbe erhalten.
W-Vertex: Lepton$\leftrightarrow \nu_\ell$ (gleiche Familie) *oder* Quark$\leftrightarrow$Quark (CKM).
5. Innere Linien virtuell ($q^2 \ne m^2c^4$), Propagator $\frac{1}{q^2 - m^2c^4}$.
6. Amplitude $\propto$ Kopplung je Vertex (e / g_W / g_s); $\sigma \propto |T_{fi}|^2$.
7. Mehrere Diagramme zum selben Endzustand $\Rightarrow$ kohärent addieren.

Drehimpuls addieren (Erhaltung)

Gesamt: $\vec{J}_{ges} = \sum_i \vec{S}_i + \vec{L}$ (Spins + Bahn)
Zwei koppeln: $|J_1 - J_2| \le J \le J_1 + J_2$ (ganzzahlige Schritte)
$\to$ 2×Spin-$\frac{1}{2}$: S=0 (Singulett, antisym.) *oder* S=1 (Triplett, sym.)
$\to$ Fermion+Boson $\Rightarrow$ halbzahlig; 2 Fermionen / 2 Bosonen $\Rightarrow$ ganzzahlig
Trick: Bahndrehimpuls L frei (ganzzahlig) $\Rightarrow$ oft mehrere J erreichbar; Reaktion erlaubt, wenn ein zulässiges J (mit passendem L) die Anfangs-J trifft.
Bei Fermionen Spins so koppeln (S=0/1), dass es passt.
Halbzahliges J bleibt halbzahlig ($\Rightarrow$ Fermionenzahl mod 2 erhalten).

Zerfälle der Eichbosonen

Eichboson $\to$ Fermion-Antifermion-Paar $f\bar{f}'$; nur wenn $m_f + m_{f'} < m_{Boson}$ ($\Rightarrow$ *kein* t).
$W^- \to f\bar{f}'$ ($\sum Q$= − 1; W^+ ladungskonj.):
leptonisch: $e^-\bar{\nu}_e$, $\mu^-\bar{\nu}_\mu$, $\tau^-\bar{\nu}_\tau$ (∼11% je)
hadronisch: $d\bar{u}$, $s\bar{u}$, $s\bar{c}$, $d\bar{c}$ (∼68%, CKM, ×3 Farbe)



$Z^0 \to f\bar{f}$ (*gleicher* Flavour, neutral):
$\nu\bar{\nu}$ (unsichtbar, ×3 $\Rightarrow N_\nu$=3), $\ell^+\ell^-$, $q\bar{q}$ (u, d, s, c, b)
kein $t\bar{t}$; keine FCNC ($f = \bar{f}$-Sorte)

γ: masselos $\Rightarrow$ real stabil; virtuell
$\gamma^* \to f\bar{f}$ (Paar, geladen)
g: $\to q\bar{q}$ oder gg (Selbstkopplung); nur gebunden
H^0: $\to b\bar{b}$ (dom.),
$\tau^+\tau^-$, WW^*, ZZ^*, $\gamma\gamma$; Kopplung $\propto m_f$
Achten auf:
$\to W$: ΔQ= ± 1; genau 1 up- + 1 down-artig (bzw. $\ell^-\bar{\nu}_\ell$); Generationswechsel via CKM
$\to Z, \gamma$: flavourerhaltend, $f\bar{f}$ gleicher Sorte
$\to$ Quarkkanäle ×3 (Farbe); an jedem Vertex Q, B, L erhalten

Nice to Knows

$\to$ Radius: ↑ in Gruppe, ↓ in Periode
$\to$ Ionisierungsenergie: max. bei Edelgasen, min. bei Alkalimetallen
$\to$ Quarks kommen nur gebunden vor (Confinement)
$\to \alpha$-Teilchen hat Spin $S = 0$
CoulombWW will $s_i \to S, l_i \to L$ koppeln
SpinbahnWW will $l_i + s_i \to j_i$ koppeln

Z	Symbol	Termsymbol
18	Ar	$^1S_0$
19	K	$^2S_{1/2}$
20	Ca	$^1S_0$
21	Sc	$^2D_{3/2}$
22	Ti	$^3F_2$
23	V	$^4F_{3/2}$
24	Cr*	$^7S_3$
25	Mn	$^6S_{5/2}$
26	Fe	$^5D_4$
27	Co	$^4F_{9/2}$
28	Ni	$^3F_4$
29	Cu*	$^2S_{1/2}$
30	Zn	$^1S_0$