

VORLESUNGSSKRIPT
HOeMa I – UEBERSETZT UND BEARBEITET.

MIAU

Captain Joni¹

2026-08-31

¹Neubearbeitung des Originalskripts *HoeMa*, uebersetzt, neu erklärt und mehr Beispiele und Übungsaufgaben
gegoennt. Stil nach Roland Herzogs Skripten der LA1 und LA2 in Heidelberg

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	4
1 Mengen und Zahlen	7
1 Grundlegende Notation	7
2 Mengen	8
2.1 Funktionen	12
2.2 Das Auswahlaxiom	15
2.3 Zweistellige Relationen	16
2.4 Das Lemma von Zorn	20
3 Zahlen	22
3.1 Natürliche Zahlen	23
3.2 Ordinal- und Kardinalzahlen	24
3.3 Ganze Zahlen	26
3.4 Rationale Zahlen	28
3.5 Reelle Zahlen	30
3.6 Komplexe Zahlen	33
2 Topologische Räume	36
4 Topologie	36
4.1 Kompakte Mengen	40
4.2 Topologischer Rand, Abschluss und Inneres	42
5 Metrische Räume und die Standardtopologie	45
5.1 Der metrische Raum $\mathbb{R}^D$	48
3 Folgen	53
6 Folgen in metrischen Räumen	53
6.1 Cauchy-Folgen	56
6.2 Der Banachsche Fixpunktsatz	58
7 Folgen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^D$	61
7.1 Homogene lineare Differenzengleichungen	61
7.2 Grenzwerte reeller Folgen, Limes superior und Limes inferior	63
7.3 Der Satz von der monotonen Konvergenz	66
7.4 Der Satz von Bolzano-Weierstrass	68
7.5 $\mathbb{R}^D$ ist Cauchy-vollständig	70
7.6 Der Satz von Heine-Borel	70
8 Reihen	73
8.1 Absolut konvergente Reihen	77

8.2	Potenzreihen	79
8.3	Die Exponentialfunktion	81
4	Vektorräume, erste Begegnung	84
9	Vektorräume	84
10	Hamelbasen, Dimension eines Vektorraums	87
11	Endlichdimensionale Vektorräume	88
12	Lineare Operatoren	91
12.1	Der Dualraum	92
13	Affine Räume	94
5	Matrizen	98
14	Die Algebra der Matrizen	99
15	Basiswechsel	101
16	Gauß-Elimination	102
16.1	Basen von Kern und Bild einer Matrix	104
16.2	Lösen linearer Gleichungssysteme	106
16.3	Berechnung der Inversen	107
17	Die Determinante	108
17.1	Die Determinante und die Inverse einer Matrix	111
17.2	Blockmatrizen	114
18	Minoren einer Matrix	115
18.1	Der Matrix-Baum-Satz	117
6	Funktionen, erste Begegnung	122
19	Stetigkeit	122
20	Der Zwischenwertsatz	124
20.1	Die Exponentialfunktion und Konvexität	126
21	Der Satz vom Minimum und Maximum	128
22	Differentiation einer Variablen	131
22.1	Der Fall $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	133

Vorwort

Gutes Miau allerseits.

Ich weiss, so Vorwoerter sind immer mies aetzend und so, aber bidde bidde lest das hier wirklich einmal durch bevor ihr mit diesem Skripd arbeitet.

Erstmal die wichtigsten Dinge als Bullet Points:

- Diese Skripd ist nie fertig! Fehler, Verbesserungen etc. gerne sofort an mich geben (hoemalskripd@joni.info). Das gilt auch fuer den Fall das RazG (so nennen wir btw. Razvan Gurau intern) meint sein Skripd nochmal komplett umzuschmeissen.
- In diesem Skript befinden sich "Siehe Original: Kapitel X" eintraege, diese sollen euch die Moeglichkeit geben, die Dinge auch immer nochmal im Original Gurau Skripd anzuschauen. Da RazG das Skripd aber doch mal gerne aendert, sind die hier gemeinten References auf die Version anzuwenden, die ihr neben dieser PDF auch immer auf www.joni.science downloaden koennt.
- Ein Grossteil dieses Skripdes wurde mithilfe von generativer KI erstellt. Dabei war das Originalskripd von Gurau teil des Kontextes und der Prompt war so geschrieben, in erster Linie zu uebersetzen und ersts danach additiv Dinge zu erklaren. Also passt auf! KI's machen Fehler!
- Wenn ihr tieferes Verstaendniss haben wollt, kann ich das LineareAlgebra Skript von Roland herzog <3 empfehlen: ([Website des Rolands](#))
- Gebt nicht auf! Denkt immer daran: Sie schaffen das! – Thomes

Warum?:

Die Frage kommt mir immer wenn ich das Original Skripd des RazG anschae. Im 3ten Studiumsjahr hat man dann doch (zumindest teilweise) den Stoff aus der Hoema1 verstanden. Dann betrachtet man dieses Skript und stellt sich die Frage:

Warum...

- ist hier eine Wall of text, der ich fast keinen Inhalt entnehmen kann.
- wurde hier dieser Rechenschritt uebersprungen, den haette ich zum vertehen gebraucht.
- wird dieses Thema sooo abstrakt eingefuehrt, es ist in Alltagssprache eigentlich recht simple nachzuvollziehen.
- gibt es nur bockelschwere Aufgaben und keine einfacheren zum Verstaendniss testen.

- etc.

Man kann also mit Sicherheit sagen, dass "Warum?" nicht nur die Frage sondern die Antwort zugleich ist.

KLAUSUR:

Im Original Skripd findet ihr ganz ganz am Ende auch die alten Klausuren von RazG. Da RazG das erste mal die Hoema1 2026 haelt, kann es gut sein, dass wenn du das hier liest, es 2026 ist und es noch keine Hoema1 Altklausuren von ihm gibt. Aber da es die Hoema1 an sich auch noch nicht lange gibt, sind viele Themen der Hoema2 in die Hoema1 gerutscht.

Und an diesem Punkt wuerde ich gerne eine kleine Anekdote aus meiner Hoema2 erzaehlen (Trust, is wichtig): Ich begann mit der Klausurvorbereitung ca. 1,5 Monate vor der Klausur, d.h. wir hatten noch ca. einen Monat an Vorlesungen bis zur Klausur. Als ich mir die Altklausur angeschaut hatte aus den Vorjahren habe ich gemerkt, dass ich (fast) keine einzige Aufgabe davon loesen konnte. Daraufhin folgte ein Gespraeche mit meinem Tutor. Ich war der festen Ueberzeugung, dass wir den Stoff den ich braeuchte in die Aufgaben der Altklausur zu loesen noch in den kommenden 4 Wochen behandeln wuerden Mein Tutor erwiederte mir: "Nein, knapp 90% davon solltest du jetzt schon loesen koennen".

Was ist nun die Moral der G'schicht. Selbst wenn ihr das ganze kommende Skripd auswendig koennt und jede Uebungsaufgabe darin geloest habt, kann es gut sein, dass ihr in der Klausur sitzt und bei ca. 15% der Aufgaben ueberhaupt einen Ansatz habt. Bitte lasst euch davon nicht abschrecken, das haengt auch **sehr** vom Jahrgang ab. Manchmal hat RazG ein gutes Semester und die Klausuraufgaben sind sogar teilweise mit dem Vorlesungsstoff machbar (aber dennoch schwer!). Aber das geht jedem so! In dieser Vorlesung muss man es idR. nur schaffen rechts von der Gaussglocke zu sein (wenn ihr den Comment nicht versteht, wird er spaetestens nach der ersten Klausurenphase klar).

Klausurvorbereitung:

Wie zum F. bereitet man sich dann auf eine RazG Klausur vor?

Hier ein paar meiner Erfahrungen:

- Die Tutorien sind wirklich eure Retter. Die machen das Modul ueberhaupt erst studierbar. In der Regel sind die Tutoren in der Gurau Hoema wirklich gute, kompetente Perlen, die euch helfen! (nicht so wie in anderen Modulen..Hust)
- Besucht (sofern moeglich) jedes Tutorium euers Lieblingstutors, oder mehrere! (Die wenigsten juckt es wenn man sich mitreinsetzt ohne offiziell in diesem Tut zu sein)
- Betreibt Tutorien-Hopping um den besten Erklaerstil fuer euch zu finden.
- Versucht euch auch mal an den Aufgaben im Originalskript (nutzt dafuer im Zweifel auch KI zum loesen). Oft sind es aehnliche Aufgaben oder Tricks, die man in der Klausur braucht (keine Gewaehr, das war oft so, aber nicht immer so)
- Sammelt eure Traenen und opfert sie eurem Lieblings-Meme-Gott!

²Das Ding wird hier uebrigens Skripd geschrieben mit d, weil der junge Herr Gurau vor 3 Jahren die Vorlesung noch auf English gehalten hat, und der Satz: "Reed da Skripd ahnd worrk da Skripd" sehr praegend war.

1 Mengen und Zahlen

Physikerinnen und Physiker benutzen Mengen andauernd – die Menge der möglichen Messwerte, der Zustandsraum eines Systems, die Menge der Lösungen einer Bewegungsgleichung – meistens ohne sich Gedanken über die Grundlagen zu machen. Für die Mathematik lohnt es sich trotzdem, diese Grundlagen einmal sauber aufzuschreiben, denn spätere Kapitel (Vektorräume, Wahrscheinlichkeitsräume, Zustandsräume in der Quantenmechanik) bauen direkt darauf auf. Dieses Kapitel entspricht Kapitel 2, Abschnitt 2.1 (*Sets*) des Originalskripts.

ORIGINAL: KAPITEL 2.1

§ 1 GRUNDLEGENDE NOTATION

Bevor wir loslegen, sammeln wir kurz die Symbole der Aussagenlogik und der Mengenlehre, die im Original ab der ersten Zeile ohne Erklärung benutzt werden(grrr). Wer diese Symbole schon kennt, kann diesen Abschnitt überspringen.

Bemerkung 1.1 (Aussagen).

Eine Aussage ist ein Satz (einer Sprache), dem eindeutig entweder der Wahrheitswert wahr oder der Wahrheitswert falsch zugeordnet werden kann.

Der Satz kann dabei der gewöhnlichen Sprache oder der mathematischen Sprache entstammen. Wir bezeichnen Aussagen in der Regel mit Großbuchstaben wie P , Q usw. $\triangle$

Bemerkung 1.2 (Junktoren und Quantoren).

Es seien P, Q Aussagen und x eine Variable.

- $\neg P$ – **Negation**: „nicht P “.
- $P \wedge Q$ – **Konjunktion**: „ P und Q “.
- $P \vee Q$ – **Disjunktion**: „ P oder Q “ (nicht ausschließend).
- $P \Rightarrow Q$ – **Implikation**: „wenn P , dann Q “.
- $P \Leftrightarrow Q$ – **Äquivalenz**: „ P genau dann, wenn Q “.
- $\forall x A(x)$ – **Allquantor**: „für alle x gilt $A(x)$ “. Beispiel: $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$.
- $\exists x A(x)$ – **Existenzquantor**: „es gibt ein x , für das $A(x)$ gilt“. Beispiel: $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = 2$.

$\triangle$

Beispiel 1.3 (Aussagenlogik in der Physik).

- (i) Sei P : „Ein Körper erfährt eine konstante Kraft $F \neq 0$ “ und Q : „Der Körper wird beschleunigt“. Dann gilt $P \Rightarrow Q$ (Newtons zweites Gesetz).
- (ii) Sei P : „Die Bewegung ist gleichförmig“ und Q : „Die Geschwindigkeit $v(t)$ ist konstant“. Hier gilt sogar $P \Leftrightarrow Q$: die eine Aussage ist per Definition gleichbedeutend mit der anderen.
- (iii) Abstrakter: $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$ ist wahr, aber $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = -1$ ist falsch – diese zweite Aussage wird erst in $\mathbb{C}$ wahr.

△

Bemerkung 1.4 (Mengensymbole).

- $x \in X$ / $x \notin X$ – x ist / ist nicht Element von X .
- $A \subset X$ (auch $A \subseteq X$) – A ist Teilmenge von X : $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in X)$.
- $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ – Vereinigung, Schnitt, Differenz zweier Mengen.
- $\emptyset$ – die leere Menge, die kein Element enthält.
- $\mathcal{P}(X)$ – die **Potenzmenge**: die Menge aller Teilmengen von X .
- $A \times B$ – das **kartesische Produkt**: die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$, $b \in B$.

△

Beispiel 1.5 (Rechnen mit Mengensymbolen).

- (i) Für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$ gilt $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$ und $A \setminus B = \{1\}$.
- (ii) Physik: Ist $H = \{\uparrow, \downarrow\}$ die Menge der Spinzustände eines Elektrons, so gilt $\uparrow \in H$, aber $\rightarrow \notin H$ (ein horizontaler Pfeil ist bezüglich dieser Achse kein Zustand).
- (iii) Abstrakter: $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, und $\{1\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b)\}$.

△

Quizfrage.

Wie viele Elemente hat $\mathcal{P}(X)$, wenn X genau n Elemente hat? Probieren Sie es zunächst für $n = 0, 1, 2, 3$ aus.

§ 2 MENGEN

Der Begriff **Menge** (englisch: set) ist ein Grundbegriff der Mathematik und kann nicht durch einfachere Begriffe definiert werden. Statt einer Definition listet man daher die Regeln

(**Axiome**) auf, denen Mengen gehorchen sollen. Informell ist eine Menge das mathematische Modell für „eine Ansammlung von Dingen“ – zum Beispiel die Menge $\{\uparrow, \downarrow\}$ der beiden Spineinstellungen eines Elektrons bezüglich einer festen Achse, oder die Menge $\{\text{Kopf, Zahl}\}$ der Ausgänge eines Münzwurfs.

Bevor wir formal werden, ein ganz einfaches Bild zum Festhalten, das für den Rest dieses Abschnitts (und eigentlich für den Rest des Skripts) hilft: Stell dir eine *Kiste* vor, in die du Dinge hineinlegst – Legosteine, Socken, Murmeln, oder Zettel mit Zahlen darauf. Diese Kiste *ist*, im mathematischen Sinn, bereits eine Menge, und die Dinge darin sind ihre **Elemente**. Mehr braucht es zunächst nicht. Wichtig sind dabei zwei Dinge, die man sich leicht merken kann, weil sie ganz natürlich zur Kiste passen:

- Für jedes denkbare Ding lässt sich nur fragen „ist es in der Kiste, oder nicht?“ – es gibt kein „ein bisschen drin“ und kein „zweimal drin“: Legst du einen roten Legostein zweimal in die Kiste, weiß die Kiste nichts von diesem Unterschied, sie enthält den roten Legostein einfach.
- Es gibt in der Kiste keine Reihenfolge. „Zuerst der rote, dann der blaue Stein“ ist eine Aussage über *wie du eingeräumt hast*, nicht über die Kiste selbst – für die Menge zählt nur, *was* drin ist, nicht in welcher Reihenfolge es hineinkam.

Genau diese zwei Beobachtungen stecken (in mathematisch präziser Form) schon in der folgenden Definition, die wir uns jetzt anschauen.

Eine Menge X enthält Elemente x , geschrieben $x \in X$. Jedes Element wird dabei nur einmal gezählt: $\{2\} = \{2, 2\} = \{2, 2, 2\}$ sind ein und dieselbe Menge – genau wie unsere Kiste mit dem einen roten Legostein, egal wie oft er „offiziell“ hineingelegt wurde.

Damit wir wirklich auf sicherem Boden stehen (und nicht nur auf einem intuitiven Bild von Kisten), listet die Mathematik ganz genau auf, welche Kisten-Operationen erlaubt sind und welche Kisten überhaupt existieren dürfen. Das mag im ersten Moment nach unnötiger Pedanterie klingen – ist es aber nicht: Ohne solche Regeln stolpert man schnell über echte Widersprüche (siehe Russells Paradoxon in den Übungen unten). Wir folgen den **Zermelo-Fraenkel-Axiomen** (kurz: ZFC, mit Auswahlaxiom) der Mengenlehre.

Axiom 2.1 (Zermelo-Fraenkel-Axiome).

Wir bezeichnen mit $\emptyset$ die leere Menge. Es gilt:

ORIGINAL: AXIOM 2.1

Extensionalität. Eine Menge ist durch ihre Elemente eindeutig bestimmt: $A = B$ genau dann, wenn $\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Paarmenge. Sind A, B Mengen, so ist $\{A, B\}$ eine Menge.

Aussonderung. Ist A eine Menge und $P(x)$ eine Eigenschaft, so ist $\{x \in A \mid P(x)\}$ eine Menge.

Vereinigung. Für jede Menge von Mengen $\mathcal{A}$ gibt es die Menge $\bigcup \mathcal{A} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{A}: x \in A\}$.

Potenzmenge. Für jede Menge A gibt es die Menge $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}$ aller

Teilmengen von A .

Unendlichkeit. Es gibt eine Menge, die $\emptyset$ enthält und mit jedem Element w auch $w \cup \{w\}$.

Ersetzung. Das Bild einer Menge unter einer Funktion ist wieder eine Menge.

Fundierung. Jede nichtleere Menge A enthält ein Element, das zu A disjunkt ist.

△

Bemerkung 2.2 (Die Axiome, noch einmal ganz in Alltagssprache).

Diese Liste sieht auf den ersten Blick einschüchternd aus – ist sie aber gar nicht, sobald man sie in unser Kisten-Bild von oben übersetzt. Hier noch einmal jedes Axiom, diesmal ganz ohne Formeln:

Extensionalität: Zwei Kisten sind genau dann „dieselbe Kiste“, wenn exakt dieselben Dinge drin sind – egal wie die Kiste aussieht, wo sie steht oder wie man sie nennt. Nur der Inhalt entscheidet.

Paarmenge: Hast du zwei Dinge, darfst du sie zusammen in eine brandneue Kiste legen.

Aussonderung: Aus einer Kiste darfst du dir eine kleinere Kiste heraussuchen, indem du nur die Dinge behältst, die eine bestimmte Eigenschaft erfüllen – zum Beispiel „nur die roten Legosteine“ aus einer Kiste voller bunter Legosteine.

Vereinigung: Hast du mehrere Kisten, darfst du ihren *gesamten* Inhalt zusammen in eine einzige, große Kiste kippen.

Potenzmenge: Zu jeder Kiste gibt es eine (viel, viel größere) Kiste, die *alle möglichen Teilauswahlen* aus der ursprünglichen Kiste als eigene kleine Kisten enthält – von der leeren Auswahl (gar nichts herausnehmen) bis zur Auswahl „alles“.

Unendlichkeit: Es gibt mindestens eine Kiste, die niemals „fertig gepackt“ ist – egal wie viel man hineinlegt, es passt immer noch ein weiteres Ding hinein. Ohne dieses Axiom dürfte es in unserer Mathematik gar keine unendlich große Menge wie $\mathbb{N}$ geben.

Ersetzung: Ersetzt du jedes Ding in einer Kiste durch etwas anderes, nach ein und derselben festen Regel für alle, bekommst du wieder eine gültige Kiste.

Fundierung: Eine Kiste kann nicht „unendlich tief“ in sich selbst verschachtelt sein – keine Kiste enthält, direkt oder über mehrere Zwischenschritte, sich selbst. Das mag pedantisch klingen, verhindert aber echte logische Widersprüche wie Russells Paradoxon (siehe Übung unten).

Ganz wichtig: Diese acht Regeln muss man sich *nicht* auswendig merken, um mit Mengen arbeiten zu können! Sie laufen im Hintergrund praktisch automatisch mit, sobald man „normal“ und vernünftig mit Kisten – also Mengen – umgeht, ungefähr so, wie man beim Fahrradfahren nicht ständig bewusst an die Verkehrsregeln denkt und trotzdem (meistens) rechts fährt. Man muss nur wissen, *dass* es sie gibt, damit man versteht, warum bestimmte

Konstruktionen (wie „die Menge aller Mengen“) verboten sind. $\triangle$

Diese Axiome klingen abstrakt, liefern uns aber sofort die vertrauten Mengenoperationen:

Beispiel 2.3.

- (i) $\bigcup\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} = \{1, 2, 3\}$ (Vereinigungsaxiom).
- (ii) $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ – eine 2-elementige Menge hat $2^2 = 4$ Teilmengen (Potenzmengenaxiom).
- (iii) Physik: Die Menge der möglichen Spinzustände eines Elektrons bezüglich der z -Achse ist $\{\uparrow, \downarrow\}$; die Menge der möglichen Ausgänge *zweier* unabhängiger Spinmessungen ist das kartesische Produkt $\{\uparrow, \downarrow\} \times \{\uparrow, \downarrow\}$ mit den vier Elementen $(\uparrow, \uparrow), (\uparrow, \downarrow), (\downarrow, \uparrow), (\downarrow, \downarrow)$.
- (iv) Ganz alltäglich, um die Kisten-Analogie noch einmal aufzugreifen: Deine Kiste mit Bauklötzen $\{\text{rot, blau}\}$ und die Kiste deiner Schwester $\{\text{blau, grün}\}$ zusammen (Vereinigungsaxiom) ergeben die gemeinsame Kiste $\{\text{rot, blau, grün}\}$ – der blaue Klotz taucht dabei nur *einmal* auf, auch wenn ihr beide einen blauen hattet.

$\triangle$

Definition 2.4 (Mengendifferenz, kartesisches Produkt).

Für Mengen X, Y heißt

$$X \setminus Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}$$

ORIGINAL: PROSA NACH
AXIOM 2.1

die **Mengendifferenz** von X und Y , und

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

das **kartesische Produkt** von X und Y . $\triangle$

In einfachen Worten: $X \setminus Y$ („ X ohne Y “) ist die Kiste X , aus der du alles herausnimmst, was *auch* in Kiste Y liegt – übrig bleibt nur das, was ausschließlich in X war. Und $X \times Y$ ist die Kiste aller *Paare*, die du bilden kannst, indem du ein Ding aus X mit einem Ding aus Y kombinierst; wenn X drei und Y vier Dinge enthält, enthält $X \times Y$ genau $3 \cdot 4 = 12$ solche Paare, ganz ähnlich wie bei den Kombinationsmöglichkeiten beim Würfeln mit zwei verschiedenen Würfeln („erster Würfel zeigt x , zweiter Würfel zeigt y “, jedes Paar (x, y) genau einmal).

Beispiel 2.5 (Mengendifferenz und kartesisches Produkt).

- (i) Ganz konkret: Ist $X = \{\text{rot, blau, grün}\}$ deine Kiste mit Bauklötzen und $Y = \{\text{blau}\}$ die Kiste, die dein kleiner Bruder gerade ausgeliehen hat, so ist $X \setminus Y = \{\text{rot, grün}\}$ genau das, was dir gerade noch zum Spielen bleibt.
- (ii) Für $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ gilt $A \setminus B = \{1\}$ und $B \setminus A = \{4\}$: Differenz ist im Allgemeinen *nicht* symmetrisch.

- (iii) Ganz konkret zum kartesischen Produkt: Hast du drei T-Shirts {rot, blau, grün} und zwei Hosen {kurz, lang}, so ist die Menge aller möglichen Outfits genau das kartesische Produkt der beiden Kisten – und hat, wie erwartet, $3 \cdot 2 = 6$ Elemente.
- (iv) Physik: Der **Phasenraum** eines Teilchens, das sich auf einer Geraden bewegt, ist das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ von Ortsmenge und Impulsmenge – jeder Punkt (x, p) beschreibt einen vollständigen Bewegungszustand. (Wird spaetestens nach der Theo2 klar;))

△

Korollar 2.6 (Keine Menge enthält sich selbst).Für jede Menge A gilt $A \notin A$.ORIGINAL: FOLGERUNG
NACH AXIOM 2.1,
FUNDIERUNG

Beweis. Nach dem Paarmengenaxiom ist $\{A\}$ eine Menge. Nach dem Fundierungsaxiom (Axiom 2.1) enthält $\{A\}$ ein Element, das zu $\{A\}$ disjunkt ist; da A das einzige Element von $\{A\}$ ist, muss $A \cap \{A\} = \emptyset$ gelten. Wäre nun $A \in A$, so wäre $A \in A \cap \{A\}$, im Widerspruch zu $A \cap \{A\} = \emptyset$. Also gilt $A \notin A$. □

Anders gesagt, um dieses etwas trickreiche Argument noch einmal ganz langsam nachzuvollziehen: Eine Kiste kann sich nicht selbst enthalten, weil sonst – packt man sie zusammen mit sich selbst in eine neue Kiste $\{A\}$ – das Fundierungsaxiom verlangt, dass *irgendein* Element dieser neuen Kiste „ganz unten“ liegt und mit dem Rest der Kiste nichts mehr gemeinsam hat. Da $\{A\}$ aber nur das eine Element A enthält, muss ausgerechnet A diese Rolle spielen – und das geht nur, wenn A sich nicht selbst als Element enthält. Diese Art von Argument („angenommen, es ginge doch – das führt aber zu einem Widerspruch, also ging es nicht“) heißt **Widerspruchsbeweis** und wird uns im ganzen Skript noch sehr oft begegnen.

ÜBUNGEN ZU § 2

Übung 2.7. Zeigen Sie $\{1, 1, 2, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$.

Übung 2.8. Bestimmen Sie $\mathcal{P}(\emptyset)$ und anschließend $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

Übung 2.9. Seien $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Berechnen Sie $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ und $A \times B$.

Übung 2.10 (etwas schwerer). Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen A , B die Mengen $A \setminus B$ und $A \cap B$ disjunkt sind.

Übung 2.11 (Denksportaufgabe). Warum ist „die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten“ – **Russells Paradoxon** – kein gültiges Objekt in ZF? *Hinweis: Welches Axiom aus Axiom 2.1 würde man benutzen wollen, und was verlangt dieses Axiom zusätzlich?*

§ 2.1 FUNKTIONEN

Aus der Schule kennst du Funktionen wahrscheinlich schon als „Rechenvorschriften“ wie $f(x) = x^2$ oder als Geraden, Parabeln und Kurven in einem Koordinatensystem. Das ist eine

völlig richtige, aber etwas zu enge Vorstellung – in der Mathematik (und gleich auch bei uns) ist eine Funktion etwas viel Allgemeineres. Am einfachsten stellt man sich eine Funktion als eine **Black Box** oder einen Automaten vor, ähnlich einem Snackautomaten: Du wirfst etwas hinein (die **Eingabe**, hier x genannt), der Automat rattert kurz, und am Ende kommt exakt *ein* Ergebnis heraus (die **Ausgabe**, hier $f(x)$ genannt). Zwei Dinge sind dabei entscheidend, und beide stecken schon im Wort „Automat“:

- Für *jede* erlaubte Eingabe kommt *etwas* heraus – der Automat streikt nie und lässt dich nicht ohne Ergebnis stehen.
- Für dieselbe Eingabe kommt *immer dasselbe* Ergebnis heraus. Wirfst du zweimal denselben Geldschein in denselben Snackautomaten (bei gleicher Auswahl-Taste), bekommst du zweimal denselben Snack – nicht einmal Schokolade und einmal Chips.

Das Wort „Eingabe darf nur zu *einem* Ergebnis führen“ ist dabei der einzige wirklich wichtige Punkt der folgenden Definition; er unterscheidet eine Funktion von einer bloßen „Zuordnung“ oder „Beziehung“, bei der eine Eingabe auch mehrere mögliche Ausgaben haben dürfte.

Definition 2.12 (Funktion).

Eine **Funktion** f von einer Menge X nach einer Menge Y ordnet jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zu. Man schreibt $f: X \rightarrow Y$. Die Menge X heißt **Definitionsbereich**, die Menge Y heißt **Wertebereich** (auch: Zielmenge) von f . $\triangle$

ORIGINAL: DEFINITION
2.1

Zurück zum Automaten-Bild: X ist die Kiste aller Dinge, die man in den Automaten werfen darf (der **Definitionsbereich**), und Y ist die Kiste, aus der die Ergebnisse stammen können (der **Wertebereich**) – wobei nicht jedes Ding aus Y tatsächlich als Ergebnis vorkommen muss, dazu gleich mehr bei „surjektiv“. Die Schreibweise $f: X \rightarrow Y$ liest man am besten laut als ganzen Satz: „ f ist eine Funktion, die Dinge aus X nimmt und Dinge aus Y ausgibt.“

Bemerkung 2.13 (Gleichheit, Komposition, Bild, Urbild).

Zwei Funktionen $f, g: X \rightarrow Y$ heißen **gleich**, $f = g$, wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Für $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ heißt $g \circ f: X \rightarrow Z$, definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, die **Komposition** von f und g . Für $U \subset X$ heißt $f(U) := \{f(x) \mid x \in U\}$ das **Bild** von U ; für $V \subset Y$ heißt $f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ das **Urbild** von V . $\triangle$

Definition 2.14 (injektiv, surjektiv, bijektiv).

Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ heißt

- **injektiv**, wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt („verschiedene Urbilder $\rightarrow$ verschiedene Bilder“);
- **surjektiv**, wenn $f(X) = Y$ gilt, d. h. jedes $y \in Y$ als Bild vorkommt;
- **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Eine bijektive Funktion f besitzt eine eindeutige **Umkehrfunktion** $f^{-1}: Y \rightarrow X$ mit $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$. $\triangle$

ORIGINAL: DEFINITION
2.1, FORTSETZUNG

Diese drei Wörter – injektiv, surjektiv, bijektiv – werden uns das ganze Skript über ständig begegnen, deshalb lohnt es sich, sie sich ganz bildlich einzuprägen. Ein beliebtes (und sehr treffendes) Bild ist das einer Klasse von Schülerinnen und Schülern, die sich in einen Raum voller Stühle setzen sollen, wobei X die Menge der Schüler und Y die Menge der Stühle ist, und f jedem Schüler „seinen“ Stuhl zuordnet:

- **Injektiv** heißt: Niemand teilt sich einen Stuhl mit jemand anderem. Es dürfen aber Stühle leer bleiben (mehr Stühle als Schüler).
- **Surjektiv** heißt: Jeder Stuhl wird von mindestens einer Person besetzt. Es dürfen sich aber mehrere Personen einen Stuhl teilen (mehr Schüler als Stühle, was im echten Leben natürlich unpraktisch wäre, aber mathematisch völlig zulässig ist).
- **Bijektiv** heißt: Beides zusammen – jeder Stuhl ist besetzt, und niemand teilt sich einen Stuhl. Am Ende passt *jeder* Schüler zu *genau einem* Stuhl und umgekehrt, wie bei einer perfekt organisierten Sitzordnung. Nur in diesem Fall kann man den Pfeil „umdrehen“ (die Umkehrfunktion f^{-1} bilden) und von jedem Stuhl eindeutig auf „seinen“ Schüler zurückschließen.

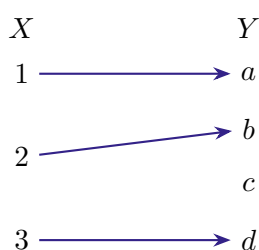


Abbildung 1.1: Eine injektive, aber nicht surjektive Funktion $f: X \rightarrow Y$: das Element $c \in Y$ wird von keinem Element getroffen.

Beispiel 2.15 (Funktionen – von einfach bis abstrakt).

- Ganz alltäglich: Ordnet man jeder Person in einem Raum ihr Geburtsdatum zu, ist das eine Funktion von der Menge der Personen in die Menge der Kalendertage – jede Person hat genau ein Geburtsdatum (das macht es zu einer Funktion), aber vermutlich haben mehrere Personen denselben Geburtstag (die Funktion ist also nicht injektiv), und es gibt Kalendertage, an denen niemand im Raum geboren ist (nicht surjektiv).
- Die **identische Funktion** $\text{id}_X: X \rightarrow X$, $\text{id}_X(x) = x$, ist stets bijektiv.
- Physik: Für einen festen Widerstand R ordnet das Ohmsche Gesetz $I \mapsto U = R I$ jeder Stromstärke I eine Spannung U zu. Diese Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv (für $R \neq 0$), mit Umkehrfunktion $U \mapsto I = U/R$.
- Physik: Die Bahnkurve $t \mapsto x(t)$ eines Teilchens ordnet jedem Zeitpunkt t seinen Ort $x(t)$ zu – eine Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sie ist im Allgemeinen weder injektiv (das Teilchen kann denselben Ort zweimal besuchen) noch surjektiv.

- (v) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ist weder injektiv ($f(1) = f(-1)$) noch surjektiv als Funktion nach $\mathbb{R}$ (negative Zahlen werden nie getroffen).
- (vi) Abstrakter: Für endliche Mengen X, Y mit $|X| = |Y|$ ist $f: X \rightarrow Y$ genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist – eine Kurzform, die im Unendlichen *nicht* mehr gilt (vgl. spätere Bemerkung zur Mächtigkeit von Mengen).

△

ÜBUNGEN ZU § 2.1

Übung 2.16. Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ injektiv? surjektiv? bijektiv?

Übung 2.17. Geben Sie die Umkehrfunktion von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 5$, an.

Übung 2.18. Die Umrechnung von Celsius in Kelvin, $T_K = T_C + 273,15$, ist eine Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ist sie bijektiv? Wie lautet die Umkehrfunktion?

Übung 2.19. Geben Sie eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ an, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Übung 2.20 (etwas schwerer). Seien $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion und $A, B \subset X$. Zeigen Sie $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

§ 2.2 DAS AUSWAHLAXIOM

Keine Sorge, falls der Name „Auswahlaxiom“ erstmal einschüchternd wirkt – die Idee dahinter ist eigentlich schön simpel, nur die ganz genaue, wasserdichte Formulierung braucht etwas Sprache. Es geht nur um eine einzige Frage: Wenn du ganz viele (vielleicht sogar unendlich viele) nichtleere Kisten vor dir hast, darfst du dann behaupten, dass es *möglich* ist, aus *jeder* Kiste genau ein Ding herauszunehmen – auch wenn du gar keine praktikable Regel dafür angeben kannst, *welches* Ding das jeweils sein soll?

Axiom 2.21 (Auswahlaxiom).

Für jede Menge $\mathcal{X}$ von nichtleeren Mengen existiert eine **Auswahlfunktion** $f: \mathcal{X} \rightarrow \bigcup \mathcal{X}$, die jeder Menge $X \in \mathcal{X}$ ein Element $f(X) \in X$ zuordnet.

ORIGINAL: AXIOM 2.2

△

In einfachen Worten: Das Auswahlaxiom sagt einfach „ja, das darfst du“. Es garantiert die *Existenz* einer solchen Auswahl aus jeder Kiste gleichzeitig, ohne irgendeine konkrete Regel dafür anzugeben, *wie* man diese Auswahl tatsächlich trifft. Das Auswahlaxiom ist das meistdiskutierte Axiom der Mengenlehre, gerade weil es diese Existenz „zusichert“, ohne ein Rezept mitzuliefern – fast so, als würde jemand behaupten „es gibt eine Lösung“ ohne zu verraten, wie man sie findet.

Beispiel 2.22 (Socken und Schuhe – Bertrand Russells Illustration).

Gegeben seien unendlich viele Paare Schuhe. Man kann ohne Auswahlaxiom auskommen: die Regel „nimm immer den linken Schuh“ ist eine explizite Auswahlfunktion. Gegeben seien nun unendlich viele Paare Socken, deren zwei Socken pro Paar ununterscheidbar sind.

Es gibt *keine* Regel wie „nimm die linke Socke“, denn „links“ und „rechts“ sind bei Socken nicht definiert. Um dennoch aus jedem Paar eine Socke auszuwählen, braucht man das Auswahlaxiom. $\triangle$

Beispiel 2.23 (ein physikalisches Analogon).

In der statistischen Physik betrachtet man oft die Menge aller Mikrozustände zu einem gegebenen Makrozustand (z. B. alle Teilchenkonfigurationen mit derselben Energie). Wählt man „irgendeinen“ Repräsentanten aus jeder dieser Mengen, benutzt man – meist unbemerkt – das Auswahlaxiom. $\triangle$

Der Grund, warum man sich darüber überhaupt Gedanken macht, ist rein philosophisch-logischer Natur: Bei *endlich* vielen Kisten kann man die Auswahl einfach Kiste für Kiste, nacheinander, von Hand treffen – das braucht kein eigenes Axiom, das folgt schon aus den anderen Regeln. Bei *unendlich* vielen Kisten (wie bei den Sockenpaaren) gibt es aber kein „nacheinander“, das jemals fertig würde; man braucht daher eine eigene, explizite Zusicherung, dass eine solche Auswahl trotzdem als Ganzes existiert. Für fast alle Zwecke in diesem Skript kann man sich das Auswahlaxiom einfach als harmlose, technische Formalität merken, die im Hintergrund mitläuft – genau wie die ZFC-Axiome von vorhin.

ÜBUNGEN ZU § 2.2

Übung 2.24. Wird das Auswahlaxiom benötigt, wenn alle Mengen $X \in \mathcal{X}$ genau ein Element besitzen? Begründen Sie.

Übung 2.25. Geben Sie für die Familie $\{[n, n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ explizit eine Auswahlfunktion an, ohne das Auswahlaxiom zu benutzen.

§ 2.3 ZWEISTELLIGE RELATIONEN

Eine **Relation** ist erstmal nichts anderes als eine Regel, mit der man je zwei Dinge miteinander vergleichen kann und „ja“ oder „nein“ als Antwort bekommt – zum Beispiel „ist verheiratet mit“, „ist größer als“, oder „wohnt in derselben Stadt wie“. Damit eine solche Regel für die Mathematik nützlich wird, schaut man sich drei ganz einfache Eigenschaften an, die eine Relation haben *kann* (aber nicht muss), und die man sich am besten an der Beziehung „ist befreundet mit“ auf einer Menge von Personen klarmacht:

- **Reflexiv** heißt: Jeder steht in Relation zu sich selbst. („Ist gleich groß wie“ ist reflexiv – du bist gleich groß wie du selbst. „Ist befreundet mit“ ist im echten Leben meist *nicht* als reflexiv gemeint, mathematisch könnte man es aber so festlegen.)
- **Symmetrisch** heißt: Wenn A zu B in Relation steht, dann auch B zu A , in beide Richtungen gleichermaßen. („Ist verheiratet mit“ ist symmetrisch: Bist du mit jemandem verheiratet, ist diese Person auch mit dir verheiratet.)
- **Transitiv** heißt: Wenn A zu B und B zu C in Relation steht, dann auch A zu C – die Beziehung „vererbt“ sich über eine Zwischenperson hinweg. („Ist größer als“ ist

transitiv: Bist du größer als Fabi, und Fabi größer als Kiara, dann bist du auch größer als Kiara. „Ist beste Freundin von“ ist dagegen typischerweise *nicht* transitiv: Nur weil Anna beste Freundin von Fabi ist und Fabi beste Freundin von Kiara, müssen Anna und Kiara noch lange nicht befreundet sein!)

Die folgende Definition kombiniert diese drei Eigenschaften auf zwei verschiedene Arten zu zwei sehr wichtigen, aber ganz unterschiedlichen Begriffen: einer **Äquivalenzrelation** („ist im relevanten Sinn dasselbe wie“, ohne Rangfolge) und einer **Halbordnung** („ist kleiner-gleich“, mit einer Rangfolge, aber ohne dass man zwei beliebige Dinge zwingend vergleichen können muss).

Definition 2.26 (Äquivalenzrelation, Halbordnung, Wohlordnung).

Es sei X eine Menge.

ORIGINAL: DEFINITION
2.2

- Eine Relation $\sim$ auf X heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv ($x \sim x$), symmetrisch ($x \sim y \Rightarrow y \sim x$) und transitiv ($x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$) ist.
- Eine Relation $\leq$ auf X heißt **Halbordnung** (partielle Ordnung), wenn sie reflexiv, **antisymmetrisch** ($x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$) und transitiv ist. $(X, \leq)$ heißt dann **Poset**. Gilt zusätzlich, dass je zwei Elemente vergleichbar sind ($x \leq y$ oder $y \leq x$), heißt $\leq$ **totale Ordnung**.
- Eine totale Ordnung $\leq_w$ heißt **Wohlordnung**, wenn jede nichtleere Teilmenge von X ein kleinstes Element besitzt.

△

Zwei neue Wörter aus der Definition verdienen noch eine Übersetzung: **Antisymmetrisch** (bei der Halbordnung) heißt, dass zwei *verschiedene* Dinge niemals in beide Richtungen zueinander in Relation stehen können – bei $\leq$ auf Zahlen ist das offensichtlich: Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt zwangsläufig $x = y$, es kann nicht $3 \leq 5$ und gleichzeitig $5 \leq 3$ gelten. Und **vergleichbar** heißt einfach, dass die Relation zwischen zwei Dingen überhaupt eine Aussage trifft – bei einer **totalen** Ordnung wie $\leq$ auf den reellen Zahlen kann man *immer* sagen, welche von zwei Zahlen die kleinere ist (oder dass sie gleich sind); bei einer bloßen Halbordnung (wie gleich unten bei der Teilbarkeit) gibt es dagegen Paare, für die *keine* der beiden Richtungen gilt – man kann sie schlicht nicht miteinander vergleichen.

Eine Äquivalenzrelation allein ist aber erst die halbe Miete – richtig nützlich wird sie erst durch den folgenden Begriff, den wir gleich in den Übungen brauchen werden:

Definition 2.27 (Äquivalenzklasse, Partition).

Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X .

- Für $x \in X$ heißt $[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$ die **Äquivalenzklasse** von x – also einfach die Menge *aller* Elemente, die zu x äquivalent sind („alles, was in dieselbe Schublade wie x gehört“).
- Eine **Partition** von X ist eine Zerlegung von X in paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen, deren Vereinigung ganz X ergibt – so, wie eine Sockenschublade in mehrere

Fächer unterteilt ist, wobei jede Socke in genau einem Fach liegt.

△

In einfachen Worten: Stell dir vor, du sortierst alle Elemente von X in Schubladen ein, und zwei Elemente landen genau dann in derselben Schublade, wenn sie $\sim$ -äquivalent sind. $[x]$ ist dann schlicht „die Schublade, in der x liegt“ – mit allen anderen Elementen darin, die zu x äquivalent sind. Da $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, passiert dabei automatisch etwas Schönes: jedes Element landet in genau einer Schublade (nie in mehreren, nie in keiner), und die Schubladen zusammen ergeben wieder ganz X – genau das ist eine **Partition**. Diese enge Beziehung ist kein Zufall, sondern ein kleiner Satz für sich, den wir als Übung festhalten (Äquivalenzklassen *sind* nichts anderes als die Schubladen einer Partition, und umgekehrt liefert jede Partition sofort eine Äquivalenzrelation, nämlich „liegt in derselben Schublade wie“).

Beispiel 2.28 (Äquivalenzklassen – einfach bis abstrakt).

- (i) Für die Relation „ist gleich alt wie“ auf der Menge aller Menschen ist $[x]$ die Menge aller Menschen mit demselben Alter wie x – eine Alterskohorte.
- (ii) Physik: Für „hat dieselbe Ruhemasse wie“ auf der Menge aller Elementarteilchen ist [Elektron] die Menge *aller* Elektronen im Universum – eine einzige riesige Äquivalenzklasse.
- (iii) Abstrakter: Für die Kongruenz modulo n auf $\mathbb{Z}$ gibt es genau n Äquivalenzklassen, $[0], [1], \dots, [n-1]$, und diese bilden eine Partition von $\mathbb{Z}$ – das ist genau die Konstruktion, mit der wir später $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bilden werden.

△

Beispiel 2.29 (Äquivalenzrelationen – einfach bis abstrakt).

- (i) Ganz kindisch, aber absolut korrekt: „Hat dieselbe Anzahl an Fingern wie“ auf der Menge aller Menschen ist reflexiv (du hast dieselbe Anzahl wie du selbst), symmetrisch (wenn du gleich viele Finger hast wie dein Nachbar, hat er auch gleich viele wie du) und transitiv – also eine Äquivalenzrelation, auch wenn sie physikalisch ziemlich uninteressant ist.
- (ii) „Ist gleich alt wie“ auf der Menge aller Menschen – eine sehr alltägliche Äquivalenzrelation.
- (iii) Physik: „Hat dieselbe Ruhemasse wie“ auf der Menge aller Elementarteilchen – alle Elektronen sind zueinander äquivalent, alle Protonen ebenso.
- (iv) Geometrie/Physik: „ist parallel zu“ auf der Menge der Geraden in der Ebene.
- (v) Abstrakter: die **Kongruenz modulo n** auf $\mathbb{Z}$: $a \sim b :\Leftrightarrow n \mid (a - b)$.


Beispiel 2.30 (Ordnungsrelationen – einfach bis abstrakt).

- (i) Ganz alltäglich: „Ist höchstens so groß wie“ (in Zentimetern gemessen) auf einer Gruppe von Personen ist eine totale Ordnung – von je zwei Personen kann man immer sagen, wer (höchstens) so groß ist wie die andere. „Ist Vorfahre von“ auf einem Familienstammbaum dagegen ist nur eine Halbordnung: Zwei Cousins sind bezüglich „Vorfahre von“ schlicht nicht vergleichbar, keiner ist Vorfahre des anderen.
- (ii) $\leq$ auf $\mathbb{R}$ ist eine totale Ordnung: je zwei reelle Zahlen sind vergleichbar. Physik: Energie-Eigenwerte eines Systems sind reelle Zahlen und daher stets vergleichbar – man kann immer sagen, welcher Zustand die höhere Energie hat.
- (iii) $\leq$ auf $\mathbb{N}$ ist sogar eine Wohlordnung: jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element. Im Gegensatz dazu ist $(\mathbb{R}, \leq)$ *keine* Wohlordnung: das offene Intervall $(0, 1)$ hat kein kleinstes Element.
- (iv) Die Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{N}$ ist eine Halbordnung, aber *keine* totale Ordnung: 2 und 3 sind bezüglich $|$ nicht vergleichbar (siehe das Hasse-Diagramm in Abbildung 1.2 unten).
- (v) $\subset$ auf $\mathcal{P}(X)$ ist ebenfalls nur eine Halbordnung: für $X = \{1, 2, 3\}$ sind $\{1\}$ und $\{2\}$ nicht vergleichbar.

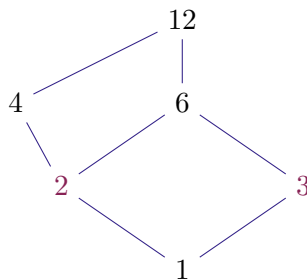


Abbildung 1.2: Hasse-Diagramm der Teilbarkeitsrelation $|$ auf den Teilern von 12. Eine Kante von a nach b (weiter oben) bedeutet $a | b$ ohne einen „Zwischenteiler“. Die beiden hervorgehobenen Knoten 2 und 3 (wein-farben) sind genau das Beispiel aus Beispiel (iv) oben: es gibt zwischen ihnen *keinen* auf- oder absteigenden Kantenzug, also sind sie bezüglich $|$ nicht vergleichbar.

In einfachen Worten, so liest man dieses Diagramm: eine Kante führt immer von einem Teiler nach oben zu einem seiner Vielfachen, direkt darüber (ohne dass ein weiterer Teiler dazwischenliegt). Zwei Zahlen sind bezüglich $|$ genau dann vergleichbar, wenn man von der einen zur anderen ausschließlich über solche Kanten *aufwärts* (oder ausschließlich abwärts)

laufen kann – wie von 1 über 2 und 6 nach 12. Gibt es dagegen *keinen* solchen rein auf- oder absteigenden Weg zwischen zwei Knoten, wie zwischen 2 und 3, sind sie unvergleichbar: keiner teilt den anderen.

ÜBUNGEN ZU § 2.3

Übung 2.31. Ist $\leq$ auf $\mathbb{Z}$ eine Wohlordnung? Begründen Sie.

Übung 2.32. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Teilbarkeitsrelation auf $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Übung 2.33. Zeigen Sie, dass $\subset$ auf $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ eine Halbordnung, aber keine totale Ordnung ist.

Übung 2.34 (etwas schwerer). Geben Sie eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ an, die genau drei Äquivalenzklassen besitzt.

§ 2.4 DAS LEMMA VON ZORN

Keine Sorge, wenn dieser Abschnitt beim ersten Lesen kompliziert wirkt – das geht praktisch jedem so, der ihm zum ersten Mal begegnet, und das ist auch völlig normal: Zorns Lemma ist eine der abstraktesten Aussagen in diesem ganzen Kapitel. Es lohnt sich trotzdem, sich Zeit dafür zu nehmen, denn wir werden es später brauchen, um zu zeigen, dass *jeder* Vektorraum eine Basis besitzt, was zunächst überhaupt nicht offensichtlich ist. Hier zunächst ein Bild, ganz ohne Formeln, das die Kernidee einfängt: Stell dir vor, du stapelst Bauklötze aufeinander, einen nach dem anderen, und darfst dabei jederzeit entscheiden, ob du weiterbaust oder aufhörst. Die Regel lautet: *egal, wie hoch du schon gestapelt hast (auch wenn es unendlich viele Klötze wären), es soll immer noch mindestens ein Klotz geben, den du oben draufsetzen könntest, ohne dass der Turm umkippt*. Zorns Lemma sagt dann: Unter genau dieser Voraussetzung muss es einen Turm geben, auf den man wirklich *gar keinen* weiteren Klotz mehr draufsetzen kann – einen „maximalen“ Turm. Das klingt fast schon zu offensichtlich, um ein eigenes Lemma zu verdienen – der Clou ist aber, dass diese Aussage in der vollen, unendlich-dimensionalen Allgemeinheit, in der wir sie brauchen werden, tatsächlich *nicht* aus den anderen Axiomen folgt, sondern das Auswahlaxiom von vornherein voraussetzt.

Übersetzen wir das Bild jetzt in die drei Fachbegriffe, die in der folgenden, formalen Version vorkommen: Ein **Poset** ist einfach eine Menge mit einer Halbordnung $\leq$ (Definition 2.26) – unser „Baukasten“ an möglichen Klötzen bzw. Elementen. Eine **Kette** ist eine Teilmenge, in der sich je zwei Elemente vergleichen lassen („ein sauber gestapelter Turm“, ohne dass zwei Klötze auf derselben Höhe um denselben Platz konkurrieren). Eine **obere Schranke** einer Kette ist ein Element, das mindestens so groß ist wie *jedes* Element der Kette („ein Klotz, den man theoretisch ganz oben auf den bisherigen Turm draufsetzen könnte, oder der Turm selbst, falls er schon so ein Element enthält“). Und ein **maximales Element** ist eines, über das nichts mehr hinausgeht („ein Turm, der nicht mehr weiter wachsen kann“).

Lemma 2.35 (Zorns Lemma).

Es sei $(X, \leq)$ ein Poset. Eine Teilmenge $T \subset X$ heißt **Kette**, wenn je zwei Elemente von T

ORIGINAL: LEMMA 2.1

vergleichbar sind. Besitzt *jede* Kette in X eine obere Schranke in X , so besitzt X mindestens ein **maximales Element**, das heißt ein Element, das von keinem anderen Element echt übertroffen wird.

Bemerkung 2.36.

Zorns Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom (Axiom 2.21). Eine typische Anwendung, die uns in einem späteren Kapitel begegnen wird: *jeder* Vektorraum besitzt eine Basis – auch unendlichdimensionale Vektorräume wie der Raum aller reellen Folgen. Der Beweis dieser Tatsache benutzt Zorns Lemma, weil man ohne eine explizite Konstruktionsvorschrift eine „größtmögliche“ linear unabhängige Menge finden muss. $\triangle$

Beweisskizze der Äquivalenz zum Auswahlaxiom. Man nimmt an, es gäbe einen Poset X , in dem jede Kette eine obere Schranke hat, aber *kein* maximales Element existiert. Dann gibt es zu jedem Element ein noch größeres. Mit einer Auswahlfunktion (Axiom 2.21) konstruiert man daraus eine echt aufsteigende Kette, die „zu lang“ ist, um eine Menge zu sein – ein Widerspruch. Die Details werden hier nicht ausgeführt. $\square$

Bemerkung 2.37 (Ein versteckter Sonderfall: die leere Kette).

In der Voraussetzung „*jede* Kette in X besitzt eine obere Schranke in X “ steckt, leicht zu übersehen, auch die **leere Kette** $T = \emptyset$ – die (vollkommen zu Recht, da es gar keine zwei Elemente gibt, die unvergleichbar sein könnten) ebenfalls als Kette zählt. Eine obere Schranke von $\emptyset$ ist *jedes* Element von X (die Bedingung „ $\geq$ jedes Element der Kette“ ist für die leere Kette automatisch erfüllt). Damit die leere Kette also überhaupt eine obere Schranke besitzen kann, muss X selbst mindestens ein Element enthalten – $X = \emptyset$ ist von der Voraussetzung stillschweigend ausgeschlossen. Man muss $X \neq \emptyset$ also nicht extra als Voraussetzung dazuschreiben, es folgt schon automatisch mit; manche Bücher schreiben es trotzdem der Klarheit halber dazu. $\triangle$

Beispiel 2.38 (Zorns Lemma – einfach bis abstrakt).

- (i) Ganz einfach: In der endlichen Halbordnung $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $\leq$ hat jede Kette eine obere Schranke (nämlich ihr größtes Element, das es bei endlich vielen Elementen immer gibt) – also liefert Zorns Lemma ein maximales Element, hier offensichtlich die 6. Bei endlichen Posets ist Zorns Lemma also gar nicht überraschend, sondern eher eine Fleißaufgabe.
- (ii) Physik/abstrakter: Für eine feste Menge X bildet $(\mathcal{P}(X), \subset)$ einen Poset. Jede Kette (Ξ_α) von ineinander geschachtelten Teilmengen hat die obere Schranke $\bigcup_\alpha \Xi_\alpha$ (die ja selbst wieder in $\mathcal{P}(X)$ liegt) – passend dazu, dass $\mathcal{P}(X)$ mit X selbst tatsächlich ein maximales Element besitzt.
- (iii) **Nicht-Beispiel**, damit klar wird, wozu die Voraussetzung überhaupt gut ist: In $(\mathbb{N}, \leq)$ ist $\mathbb{N}$ selbst eine Kette (je zwei natürliche Zahlen sind vergleichbar), aber diese Kette besitzt *keine* obere Schranke in $\mathbb{N}$ – es gibt schließlich keine größte natürliche Zahl. Die Voraussetzung von Zorns Lemma ist hier also verletzt, und tatsächlich hat $(\mathbb{N}, \leq)$ auch

kein maximales Element: zu jeder Zahl gibt es eine noch größere. Genau das soll die Voraussetzung „jede Kette hat eine obere Schranke“ verhindern.

△

ÜBUNGEN ZU § 2.4

Übung 2.39 (*Partitionen, leicht*). Sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\Pi = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6\}\}$. Ist Π eine **Partition** von X , d. h. eine Zerlegung von X in paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen?

Übung 2.40 (*Äquivalenzklassen, leicht*). Sei $\sim$ die Relation „hat denselben Rest bei Division durch 3“ auf $\{0, 1, \dots, 9\}$. Listen Sie alle Äquivalenzklassen auf.

Übung 2.41 (*Äquivalenzklassen, allgemein*). Zeigen Sie: die Äquivalenzklassen $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$ einer beliebigen Äquivalenzrelation auf X bilden stets eine Partition von X .

Übung 2.42 (*Partitionen als Poset, schwerer*). Eine Partition Π_1 heißt **feiner** als Π_2 , wenn jede Menge aus Π_1 in einer Menge aus Π_2 enthalten ist. Zeigen Sie, dass „feiner als“ eine Halbordnung auf der Menge aller Partitionen von X ist.

Übung 2.43 (*Permutationen, Bonusaufgabe*). Für $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ (Bijektionen auf $\{1, \dots, n\}$) definiere $\sigma_1 \sim \sigma_2 :\Leftrightarrow \exists \pi \in S_n : \sigma_1 = \pi \sigma_2 \pi^{-1}$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. *Hinweis: jede Permutation lässt sich in disjunkte Zyklen zerlegen.*

§ 3 ZAHLEN

Physikerinnen und Physiker jonglieren ständig mit verschiedenen Zahlbereichen: Quantenzahlen sind natürliche oder ganze Zahlen, Messwerte sind reelle Zahlen, und Wellenfunktionen oder Wechselstromwiderstände sind komplexe Zahlen. In der Mathematik werden diese Zahlbereiche nicht nebeneinander postuliert, sondern in einer Kette aufeinander aufgebaut:

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Jeder Schritt behebt einen Mangel des vorherigen Zahlbereichs: In $\mathbb{N}$ kann man nicht subtrahieren, in $\mathbb{Z}$ nicht immer teilen, in $\mathbb{Q}$ fehlen Grenzwerte (z. B. $\sqrt{2}$), und in $\mathbb{R}$ hat nicht jedes Polynom eine Nullstelle. Dieser Abschnitt entspricht Kapitel 2, Abschnitt 2.2 (*Numbers*) des Originalskripts.

Ein kurzer Moment der Verwunderung, bevor wir loslegen: Wir haben im letzten Abschnitt gerade erst gelernt, was eine Menge ist – und jetzt sollen ausgerechnet *Zahlen*, mit denen du seit der Grundschule ganz selbstverständlich rechnest, plötzlich aus Mengen *aufgebaut* werden? Das wirkt im ersten Moment nach unnötigem Aufwand, hat aber einen guten Grund: Wenn wir zeigen können, dass sich $\mathbb{N}$ (und darauf aufbauend $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) komplett aus den ZFC-Axiomen von vorn konstruieren lässt, wissen wir mit hundertprozentiger Sicherheit, dass unsere Zahlen keine unausgesprochenen Zusatzannahmen brauchen – alles, was wir über Zahlen wissen, folgt bereits aus denselben acht einfachen „Kisten-Regeln“. Im

Laboralltag wird dir das nie wieder begegnen (kein Physiker rechnet mit geschachtelten Mengen statt mit Zahlen!), aber es lohnt sich, es *einmal* gesehen zu haben – und einige der Ideen dabei (Äquivalenzklassen, um „dasselbe Ding auf verschiedene Arten darzustellen“) tauchen später im Skript in ganz anderem Gewand wieder auf.

§ 3.1 NATÜRLICHE ZAHLEN

Bevor die Formeln kommen, wieder ein Bild: Stell dir russische Matroschka-Puppen vor, bei denen jede Puppe alle kleineren Puppen in sich trägt. Die Zahl 0 ist die *leere* Puppe – eine Puppe, die noch gar nichts enthält. Die Zahl 1 ist eine Puppe, die genau eine kleinere Puppe enthält, nämlich die 0-Puppe. Die Zahl 2 ist eine Puppe, die *beide* vorherigen Puppen enthält, also 0 und 1. Und so weiter: Jede neue Zahl ist „die Puppe, die alle kleineren Zahlen-Puppen gleichzeitig enthält“. Das ist – kaum zu glauben – tatsächlich die offizielle mathematische Definition, die sogenannte **von-Neumann-Konstruktion**, die wir jetzt formal aufschreiben.

Konstruktion 3.1 (natürliche Zahlen $\mathbb{N}$).

Nach dem Unendlichkeitsaxiom (Axiom 2.1) gibt es Mengen, die $\emptyset$ enthalten und unter der **Nachfolgerfunktion** $S(a) := a \cup \{a\}$ abgeschlossen sind. Die kleinste solche Menge ist die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen:

ORIGINAL:
CONSTRUCTION 2.1

- Null ist die leere Menge: $0 := \emptyset$.
- Für jede Menge a heißt $S(a) = a \cup \{a\}$ der **Nachfolger** von a . Damit gilt

$$0 = \emptyset, \quad 1 = S(0) = \{0\}, \quad 2 = S(1) = \{0, 1\}, \quad 3 = S(2) = \{0, 1, 2\}, \dots$$
- $\mathbb{N}$ besteht aus 0 und all seinen Nachfolgern.

Auf $\mathbb{N}$ definiert man rekursiv:

Addition. $a + 0 := a$ und $a + S(b) := S(a + b)$.

Multiplikation. $a \times 0 := 0$ und $a \times S(b) := a + a \times b$.

Totale Ordnung. $a \leq b \Leftrightarrow a \in b$ oder $a = b$; äquivalent: es gibt $c \in \mathbb{N}$ mit $a + c = b$. Diese totale Ordnung ist eine Wohlordnung.

Mit $1 := S(0)$ schreibt man ab jetzt gewohnt $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. $\triangle$

Zur Übersetzung der beiden rekursiven Regeln: „ $a + 0 := a$ “ bedeutet nur „nichts dazuzählen ändert nichts“ – genauso, wie du es erwartest. Und „ $a + S(b) := S(a + b)$ “ ist die formale Version des ganz gewöhnlichen Weiterzählens: „ a plus (der Nachfolger von b)“ soll dasselbe sein wie „(der Nachfolger von) $a + b$ “ – ob du erst bei b einen draufzählst und dann zu a addierst, oder erst $a + b$ ausrechnest und dann einen draufzählst, das Ergebnis ist gleich. Jede Summe wird auf diese Weise letztlich auf ein wiederholtes „und jetzt eins weiterzählen“ zurückgeführt – genau wie ein Kind, das mit den Fingern abzählt, nur eben ganz formal und wasserdicht aufgeschrieben. Multiplikation funktioniert nach demselben Prinzip, nur dass „eins weiterzählen“ durch „noch ein a dazugaddieren“ ersetzt wird.

Beispiel 3.2 (natürliche Zahlen in der Physik).

- (i) Ganz einfach, Schritt für Schritt: $1 + 1 = 1 + S(0) = S(1 + 0) = S(1) = 2$ – die berühmteste Gleichung der Mathematik, hier in einer einzigen Rechnung tatsächlich *bewiesen*, statt einfach vorausgesetzt.
- (ii) Ganz einfach: Die Anzahl der Photonen in einem Lichtstrahl, die Anzahl der Elektronen in einem Atom – alles natürliche Zahlen.
- (iii) Physik: Die Energie-Eigenwerte des quantenmechanischen harmonischen Oszillators sind $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ mit **Quantenzahl** $n \in \mathbb{N}$. Jeder erlaubte Zustand entspricht genau einer natürlichen Zahl.
- (iv) Abstrakter: Die rekursive Definition der Addition zeigt, dass $2 + 2 = 4$ kein Postulat, sondern eine *Konsequenz* der Konstruktion ist: $2 + 2 = 2 + S(1) = S(2 + 1) = S(2 + S(0)) = S(S(2 + 0)) = S(S(2)) = S(3) = 4$.

△

ÜBUNGEN ZU § 3.1

Übung 3.3. Schreiben Sie $4 = S(S(S(S(0))))$ explizit als Menge auf (wie in Konstruktion 3.1).

Übung 3.4. Wie viele Elektronen passen nach dem Pauli-Prinzip in die Schale mit Hauptquantenzahl n ? Ist das Ergebnis für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl?

Übung 3.5 (etwas schwerer). Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $+$ auf $\mathbb{N}$ assoziativ ist: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Übung 3.6 (schwerer). Zeigen Sie, dass $+$ auf $\mathbb{N}$ kommutativ ist. *Hinweis: Induktion über a , mit den Fällen $a = 0$ und $a = S(0)$ als Basis.*

§ 3.2 ORDINAL- UND KARDINALZAHLEN

Dieser Abschnitt ist eher etwas für Liebhaber der Grundlagen als für den Physik-Alltag – die folgenden Abschnitte über ganze, rationale und reelle Zahlen brauchen davon nur sehr wenig, und du kannst bei Zeitdruck ruhig nur die beiden Bemerkungen unten („in Worten“) lesen und den Rest überfliegen. Trotzdem lohnt sich ein kurzer Blick, weil der Unterschied zwischen **Ordinalzahlen** und **Kardinalzahlen** etwas sehr Anschauliches einfängt: Eine *Ordinalzahl* beantwortet die Frage „an welcher Position?“ („du bist Dritter im Rennen“), während eine *Kardinalzahl* die Frage „wie viele?“ beantwortet („es sind drei Läufer im Rennen“). Bei endlichen Mengen wirkt dieser Unterschied fast schon pedantisch – „dritter“ und „drei“ scheinen dasselbe zu meinen. Bei unendlichen Mengen aber, wie wir gleich sehen werden, können sich diese beiden Fragen völlig unterschiedlich verhalten.

Definition 3.7 (von-Neumann-Ordinalzahl).

Eine **Ordinalzahl** λ ist eine Menge, deren Elemente genau die Ordinalzahlen sind, die kleiner

als λ selbst sind (kurz: $\lambda = [0, \lambda)$); dabei ist λ selbst kein Element von λ . Formal ist λ eine transitive Menge, die durch $\in$ streng wohlgeordnet ist. $\triangle$

In Worten, wieder im Matroschka-Bild von eben: Jede Ordinalzahl λ ist einfach „die Puppe, die alle Puppen enthält, die vor ihr kommen“ – sie *ist* buchstäblich ihre eigene Position in der Reihe aller Ordinalzahlen. Jede natürliche Zahl ist damit automatisch schon eine Ordinalzahl (das hatten wir im vorigen Abschnitt ja schon so konstruiert), aber – Achtung, jetzt wird es interessant – es gibt auch Ordinalzahlen *jenseits* aller natürlichen Zahlen, dazu gleich mehr.

Bemerkung 3.8 (Nachfolger- und Limesordinalzahlen).

Für eine Ordinalzahl λ ist $\lambda + 1 := \lambda \cup \{\lambda\}$ wieder eine Ordinalzahl, die **Nachfolgerordinalzahl**. Jede natürliche Zahl ist eine Ordinalzahl; die kleinste Ordinalzahl, die größer als jede natürliche Zahl ist, heißt ω – sie ist genau die wohlgeordnete Menge $\mathbb{N}$ selbst und heißt **Limesordinalzahl** (sie ist Nachfolger keiner Ordinalzahl). Man kann zeigen: die Klasse aller Ordinalzahlen ist selbst *keine* Menge (sonst wäre sie, als Ordinalzahl aufgefasst, Element von sich selbst – Widerspruch zu Korollar 2.6). $\triangle$

Bemerkung 3.9 (Kardinalzahlen).

Zwei Mengen X, Y heißen **gleichmächtig**, wenn es eine Bijektion $X \rightarrow Y$ gibt. Die **Kardinalzahl** (Mächtigkeit) $|X|$ von X ist die kleinste Ordinalzahl, zu der X gleichmächtig ist. Für endliche Mengen ist $|X|$ einfach die Anzahl der Elemente. Die Kardinalzahl von $\mathbb{N}$, geschrieben $\aleph_0$ („Aleph null“), ist die kleinste unendliche Kardinalzahl; eine Menge mit $|X| = \aleph_0$ heißt **abzählbar unendlich**. $\triangle$

Ein berühmtes Gedankenexperiment, das die Eigenheiten von $\aleph_0$ greifbar macht, ist **Hilberts Hotel**: Stell dir ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern vor, nummeriert $1, 2, 3, \dots$, und *jedes* Zimmer ist bereits belegt. Kommt ein neuer Gast, scheint das Hotel „voll“ zu sein – ist es aber nicht! Der Hotelier bittet einfach jeden bisherigen Gast, ins nächsthöhere Zimmer umzuziehen (Zimmer $n \rightarrow$ Zimmer $n + 1$), und Zimmer 1 wird frei. Das funktioniert sogar, wenn *unendlich viele* neue Gäste auf einmal ankommen (man verschiebt Zimmer $n \rightarrow$ Zimmer $2n$ und macht so alle unendlich vielen ungeraden Zimmernummern gleichzeitig frei). Dieses scheinbar paradoxe Verhalten – „unendlich plus eins (oder plus unendlich!) ist immer noch genauso viel wie unendlich“ – ist genau das, was $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \cup \{\star\}| = \aleph_0$ formal ausdrückt, und es ist der Grund, warum man mit unendlichen Kardinalzahlen sehr viel vorsichtiger umgehen muss als mit endlichen.

Satz 3.10 (Satz von Cantor).

Für jede Menge X und jede Funktion $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ist f nicht surjektiv. Insbesondere gilt $|X| < |\mathcal{P}(X)|$. ORIGINAL: THEOREM 2.1

Beweis. Wir betrachten $B := \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$. Angenommen f wäre surjektiv, dann gäbe es $y \in X$ mit $f(y) = B$. Nach Definition von B gilt aber $y \in B \Leftrightarrow y \notin f(y) = B$ – ein Widerspruch. Also ist f nicht surjektiv, und da $x \mapsto \{x\}$ eine Injektion $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ist, folgt $|X| < |\mathcal{P}(X)|$. $\square$

Dieser Beweis wirkt beim ersten Lesen wie ein Taschenspielertrick, ist aber ein völlig ehrlicher **Widerspruchsbeweis** – derselbe Beweistyp, den wir schon bei „keine Menge enthält sich selbst“ in § 2 kennengelernt haben. Noch einmal ganz langsam: Wir nehmen an, es gäbe tatsächlich eine Funktion f , die jedem Element von X eine eigene Teilmenge von X zuordnet, und zwar so, dass *jede* Teilmenge von X irgendwann als so ein Bild vorkommt (also surjektiv ist). Dann konstruieren wir ganz gezielt genau die eine Teilmenge B , die garantiert *nicht* vorkommen kann: die Menge aller x , die *nicht* in ihrer eigenen zugeordneten Menge $f(x)$ liegen. Für dieses B führt sowohl die Annahme $y \in B$ als auch die Annahme $y \notin B$ (für das hypothetische y mit $f(y) = B$) zu einem Widerspruch – B kann also unmöglich als $f(y)$ vorkommen, ganz egal, welches y man ausprobiert. Diese Idee, eine Menge zu konstruieren, die sich selbst widerspricht, taucht in der Mathematik immer wieder auf – unter anderem bei Russells Paradoxon (§ 2) und beim berühmten Diagonalargument, das uns gleich in § 3.5 wiederbegegnet. Wer mag, sollte diesen Beweis einmal von Hand für die winzige Menge $X = \{1, 2\}$ nachvollziehen (siehe Übung unten) – im Kleinen wird der Trick oft greifbarer.

Beispiel 3.11 (abzählbar und überabzählbar in der Physik).

Das gebundene Spektrum eines Wasserstoffatoms ($E_n = -13,6 \text{ eV}/n^2$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) ist **abzählbar**: jedem Energieniveau entspricht genau eine natürliche Zahl. Das Streuspektrum (freie, ungebundene Zustände) hingegen bildet ein Kontinuum reeller Energien und ist, wie wir in § 3.5 sehen werden, **überabzählbar**. $\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 3.2

Übung 3.12. Ist $\omega + 1$ dieselbe Ordinalzahl wie ω ? Ist $|\omega + 1| = |\omega|$?

Übung 3.13 (etwas schwerer). Zeigen Sie direkt (ohne Satz 3.10 zu zitieren): Für $X = \{1, 2\}$ gibt es keine Surjektion $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$.

§ 3.3 GANZE ZAHLEN

Wieder zuerst die Motivation, bevor die Formeln kommen: In $\mathbb{N}$ gibt es keine Subtraktion, die immer funktioniert – $3 - 5$ ergibt keine natürliche Zahl. Die naheliegende Idee ist, eine ganze Zahl einfach als *Differenz* $a - b$ zweier natürlicher Zahlen zu definieren. Das Problem dabei: Es gibt für dieselbe ganze Zahl unendlich viele verschiedene Differenzen, die alle „dasselbe meinen“ – $3 - 1$, $5 - 3$ und $100 - 98$ sollen alle die Zahl 2 darstellen. Ganz genau wie bei den Brüchen aus der Schule, bei denen $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ gilt, obwohl es sich um verschiedene Zahlenpaare handelt, brauchen wir also eine **Äquivalenzrelation** (Definition 2.26 aus dem letzten Abschnitt – sie zahlt sich jetzt schon aus!), die genau diese „gleichbedeutenden“ Paare zu einer einzigen Klasse zusammenfasst. Die ganze Zahl *ist* dann diese ganze Klasse gleichwertiger Paare, statt willkürlich ein einzelnes Paar unter vielen auszuzeichnen. Ein Paar (a, b) steht also für „ $a - b$ “, ganz ohne dass wir eine Subtraktion in $\mathbb{N}$ überhaupt schon zur Verfügung haben müssten – wir benutzen ja nur die Addition, die wir bereits kennen, um die Äquivalenzrelation zu formulieren.

Konstruktion 3.14 (ganze Zahlen $\mathbb{Z}$).

Die ganzen Zahlen werden als Quotientenmenge $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$ konstruiert, mit der Äquivalenzrelation $(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow a + d = b + c$ („ $a - b$ und $c - d$ sind gleich“). Man definiert:

ORIGINAL:
CONSTRUCTION 2.2

- $[(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)],$
- $[(a, b)] \times [(c, d)] := [(ac + bd, ad + bc)],$
- $[(a, b)] < [(c, d)] :\Leftrightarrow a + d < b + c.$

Die natürlichen Zahlen werden via $n \mapsto [(n, 0)]$ in $\mathbb{Z}$ eingebettet, und $[(b, a)]$ ist das additive Inverse von $[(a, b)]$, kurz $-[(a, b)]$. Das führt zur gewohnten Schreibweise $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.

△

Zur Kontrolle, ganz konkret: Die Paare $(3, 1)$ und $(5, 3)$ sollen beide „die Zahl 2“ darstellen. Tatsächlich gilt $(3, 1) \sim (5, 3)$, denn die Bedingung $a + d = b + c$ wird zu $3 + 3 = 1 + 5$, also $6 = 6$ – wahr! Genau wie erhofft landen beide Paare also in derselben Äquivalenzklasse.

Definition 3.15 (Gruppe).

Eine **Gruppe** $(G, \circ, e)$ ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ: G \times G \rightarrow G$, sodass gilt:

ORIGINAL: DEFINITION
2.4

- (neutrales Element) es gibt $e \in G$ mit $e \circ g = g \circ e = g$ für alle $g \in G$;
- (Assoziativität) $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$ für alle $g_1, g_2, g_3 \in G$;
- (Inverse) zu jedem $g \in G$ gibt es $g^{-1} \in G$ mit $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

Eine Gruppe heißt **abelsch** (kommutativ), wenn zusätzlich $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$ für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt.

△

In Alltagssprache beschreibt eine Gruppe nichts anderes als eine Menge von „Bewegungen“ oder „Schritten“, die sich beliebig hintereinander ausführen und dabei *immer rückgängig machen* lassen. Stell dir einen Spaziergang auf einer geraden Linie vor, bei dem $\circ$ schlicht „und dann noch“ bedeutet: Das neutrale Element e ist der „Schritt“ *stehenbleiben* (er ändert nichts). Assoziativität bedeutet, dass es egal ist, ob du gedanklich zuerst zwei Schritte zusammenfasst und dann den dritten dranhängst, oder umgekehrt – am Ende landest du sowieso am selben Ort. Und die Existenz eines Inversen g^{-1} zu jedem g bedeutet: Zu jedem Schritt gibt es einen „Rückwärtsschritt“, der ihn exakt aufhebt (drei Schritte vor, dann drei Schritte zurück, und du stehst wieder genau da, wo du gestartet bist). „Abelsch“ bedeutet zusätzlich, dass die Reihenfolge zweier Schritte das Endergebnis nicht beeinflusst – bei Schritten auf einer Geraden ist das offensichtlich der Fall, muss es im Allgemeinen aber nicht sein: Denk an das Anziehen von Socken und Schuhen – die Reihenfolge ist hier alles andere als egal!

Bemerkung 3.16 (axiomatische Charakterisierung von $\mathbb{Z}$).

$(\mathbb{Z}, +, 0)$ ist – bis auf Umbenennung der Elemente – die einzige nichttriviale total geordnete abelsche Gruppe, deren positive Elemente wohlgeordnet sind.

ORIGINAL: DEFINITION
2.5

△

Beispiel 3.17 (ganze Zahlen in der Physik).

- (i) Ganz alltäglich, ganz ohne Physik: Ein Kontostand kann negativ werden (Schulden) – ein Girokonto „kennt“ also ganze Zahlen, nicht nur natürliche.
- (ii) Sehr einfach: Die elektrische Ladung ist quantisiert, $q = ne$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und Elementarladung e .
- (iii) Physik: Die magnetische Quantenzahl eines Elektrons im Orbital mit Drehimpuls-Quantenzahl l nimmt Werte $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\} \subset \mathbb{Z}$ an.
- (iv) Abstrakter: $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe im Sinne von Definition 3.15, aber $(\mathbb{Z}, \times)$ ist *keine* Gruppe: 2 besitzt kein multiplikatives Inverses in $\mathbb{Z}$.

△

ÜBUNGEN ZU § 3.3

Übung 3.18. Zeigen Sie, dass $\sim$ aus Konstruktion 3.14 eine Äquivalenzrelation ist.

Übung 3.19. Berechnen Sie in der Quotientendarstellung $[(3, 0)] + [(0, 5)]$ und identifizieren Sie das Ergebnis mit einer gewohnten ganzen Zahl.

Übung 3.20. Welche der vier Gruppenaxiome aus Definition 3.15 verletzt $(\mathbb{N}, +)$? (Zur Erinnerung: $(\mathbb{N}, +)$ ist nur eine Halbgruppe mit neutralem Element.)

Übung 3.21 (*etwas schwerer*). Zeigen Sie, dass die Addition auf $\mathbb{Z}$ kommutativ und assoziativ ist und mit der totalen Ordnung verträglich ist, das heißt $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.

§ 3.4 RATIONALE ZAHLEN

Diese Konstruktion wird dir angenehm bekannt vorkommen – es ist im Grunde genau das, was du in der Schule schon über Brüche gelernt hast, nur diesmal ganz sauber und lückenlos aufgeschrieben. Ein Bruch $\frac{p}{q}$ ist ja nichts anderes als ein Paar (p, q) zweier ganzer Zahlen (mit $q \neq 0$), und wie du weit, stellen ganz verschiedene Paare denselben Bruch dar: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ und $\frac{50}{100}$ sind „derselbe“ Bruch, obwohl die Zahlenpaare $(1, 2)$, $(2, 4)$ und $(50, 100)$ ganz verschieden aussehen. Die Äquivalenzrelation $(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2) :\Leftrightarrow p_1 q_2 = q_1 p_2$ ist genau die aus der Schule bekannte Regel „ber Kreuz multiplizieren“, mit der man prüft, ob zwei Brüche gleich sind (probiere es an $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$: $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$, also $4 = 4$ – passt).

Konstruktion 3.22 (rationale Zahlen $\mathbb{Q}$).

Die rationalen Zahlen werden als Quotientenmenge $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}) / \sim$ konstruiert, mit $(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2) :\Leftrightarrow p_1 q_2 = q_1 p_2$. Man schreibt $[(p, q)] \equiv \frac{p}{q}$ und definiert

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} := \frac{p_1 q_2 + q_1 p_2}{q_1 q_2}, \quad \frac{p_1}{q_1} \times \frac{p_2}{q_2} := \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}, \quad \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} :\Leftrightarrow p_1 q_2 < q_1 p_2 \quad (q_1, q_2 > 0).$$

Die ganzen Zahlen werden via $p \mapsto \frac{p}{1}$ eingebettet, und das multiplikative Inverse von $x = \frac{p}{q} \neq 0$ ist $x^{-1} = \frac{q}{p}$. △

Satz 3.23 ($\mathbb{Q}$ ist dicht in sich).

Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x < y$ existiert $z \in \mathbb{Q}$ mit $x < z < y$.

ORIGINAL: THEOREM 2.2

Beweis. Man wähle $z = \frac{x+y}{2}$. Da die Ordnung mit $+$ verträglich ist, folgt aus $x < y$ sowohl $x = \frac{x+x}{2} < \frac{x+y}{2} = z$ als auch $z = \frac{x+y}{2} < \frac{y+y}{2} = y$. $\square$

Satz 3.24 ($\mathbb{Q}$ ist abzählbar).

Es existiert eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$.

ORIGINAL: THEOREM 2.3

Beweis. Man ordnet die Paare $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$ auf einem quadratischen Gitter in der Ebene an und zählt entlang der Diagonalen ab: $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), \dots$. Dabei wird jedes (p, q) nach endlich vielen Schritten erreicht, und Streichen von Wiederholungen (gekürzte Brüche) liefert eine Bijektion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$. $\square$

Dieser Beweis lohnt sich, einmal ganz genau – und bildlich – nachzuvollziehen. Man zeichnet sich alle Paare (p, q) als Punkte in einem unendlichen Gitter auf (Zähler p nach rechts, Nenner q nach oben) und läuft die entstehenden Diagonalen der Reihe nach ab, wie im folgenden Bild:

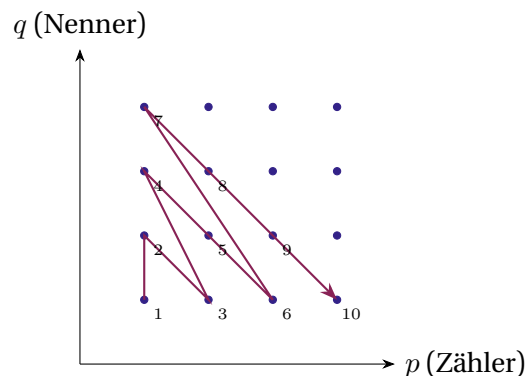


Abbildung 1.3: Cantors Abzählschema: man läuft die Diagonalen $p + q = \text{const}$ der Reihe nach ab (die kleinen Zahlen zeigen die Reihenfolge), sodass jeder Bruch p/q nach endlich vielen Schritten an die Reihe kommt.

Weil man auf diese Weise jedem Bruch früher oder später eine natürliche Zahl (seine Position in der abgelaufenen Liste) zuordnen kann, sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ *gleich groß* im Sinne der Kardinalzahlen von eben – obwohl $\mathbb{Q}$ auf den ersten Blick doch „viel mehr“ Zahlen zu enthalten scheint als $\mathbb{N}$: Zwischen je zwei rationalen Zahlen liegt ja schon wieder eine weitere (Satz 3.23)! Genau dieses kontraintuitive Verhalten ist die Pointe von Hilberts Hotel aus dem letzten Abschnitt: Unendliche Mengen ticken einfach anders als endliche, und „dichter gepackt wirken“ heißt bei unendlichen Mengen nicht automatisch „mehr Elemente haben“.

Beispiel 3.25 (rationale Zahlen in der Physik).

- (i) Sehr einfach: Ein Spannungsteiler mit zwei Widerständen R_1, R_2 liefert das Verhältnis $U_2/U_1 = R_2/(R_1 + R_2) \in \mathbb{Q}$, sofern R_1, R_2 ganzzahlige Vielfache einer festen Einheit sind.
- (ii) Physik: Jede Messung mit endlicher Genauigkeit liefert im Grunde eine rationale Zahl (ein Bruchteil der Skaleneinteilung). Trotzdem ist $\mathbb{Q}$, wie Satz 3.24 zeigt, „zu klein“, um alle denkbaren Messwerte darzustellen – das motiviert $\mathbb{R}$.

△

ÜBUNGEN ZU § 3.4

Übung 3.26. Finden Sie explizit ein $z \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{1}{3} < z < \frac{1}{2}$.

Übung 3.27. Zeigen Sie, dass $\sim$ aus Konstruktion 3.22 eine Äquivalenzrelation ist.

Übung 3.28 (etwas schwerer). Zeigen Sie, dass zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen $x < y$ sogar *unendlich viele* weitere rationale Zahlen liegen.

Übung 3.29 (schwerer). Zeigen Sie: die Dezimaldarstellung jeder rationalen Zahl bricht ab oder wird irgendwann periodisch. *Hinweis: Bei schriftlicher Division können nur endlich viele Reste auftreten.*

§ 3.5 REELLE ZAHLEN

Schon die Pythagoreer bemerkten, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist¹ – $\mathbb{Q}$ hat also „Lücken“. Die reellen Zahlen füllen diese Lücken.

Die Grundidee der Dedekind-Schnitte ist geschickt, aber ungewohnt – deshalb hier zuerst ein ganz konkretes Beispiel, bevor die allgemeine Definition kommt. Wir wollen $\sqrt{2}$ konstruieren, obwohl wir noch gar nicht „wissen“, was $\sqrt{2}$ überhaupt ist – wir kennen ja bisher nur rationale Zahlen! Die Idee: Wir schauen uns *alle* rationalen Zahlen an, die (wenn es $\sqrt{2}$ schon als Zahl gäbe) kleiner als $\sqrt{2}$ wären, also die Menge $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ oder } x^2 < 2\}$. Diese Menge A enthält zum Beispiel 1, 1,4 und 1,41, aber nicht 1,5 oder 2 (denn $1,5^2 = 2,25 > 2$). Der Clou: A lässt sich *vollständig mit rationalen Zahlen* beschreiben, ganz ohne dass $\sqrt{2}$ selbst als eigenständige Zahl existieren muss – und genau *diese Menge A*, dieser „Schnitt“ durch die rationalen Zahlen an der Stelle, an der $\sqrt{2}$ sein sollte, *ist* für uns ab jetzt die reelle Zahl $\sqrt{2}$. Jede reelle Zahl entsteht auf diese Weise: als die Menge aller rationalen Zahlen, die kleiner sind als sie selbst.

Konstruktion 3.30 (reelle Zahlen $\mathbb{R}$ via Dedekind-Schnitte).

Ein **Dedekind-Schnitt** ist eine nichtleere, nach unten abgeschlossene Teilmenge $A \subsetneq \mathbb{Q}$ ohne größtes Element („ A repräsentiert die reelle Zahl an der Grenze von A “). Formal: $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{Q}$, und für $x < y$ mit $y \in A$ gilt auch $x \in A$, und zu jedem $x \in A$ gibt es $y \in A$ mit $x < y$. Wir setzen $\mathbb{R} := \{\text{Dedekind-Schnitte von } \mathbb{Q}\}$. Die rationalen Zahlen werden via

¹Euklid, *Elemente*, Buch X, Proposition 117 (ca. 300 v. Chr.): Wäre $\sqrt{2} = p/q$ mit teilerfremden p, q , so folgt $p^2 = 2q^2$, also ist p gerade, $p = 2r$; dann $q^2 = 2r^2$, also ist auch q gerade – Widerspruch zur Teilerfremdheit.

$r \mapsto \{a \in \mathbb{Q} \mid a < r\}$ eingebettet, und man definiert für Schnitte A_1, A_2 :

$$A_1 + A_2 := \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}, \quad A_1 < A_2 :\Leftrightarrow A_1 \subsetneq A_2.$$

Negation, Multiplikation und Division sind analog definiert (mit einer Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen, da man sich z. B. bei der Multiplikation auf die nichtnegativen Elemente beschränken muss). $\triangle$

Zur Erinnerung, was die beiden technischen Bedingungen in Worten bedeuten: „nach unten abgeschlossen“ heißt, dass mit jeder Zahl im Schnitt automatisch auch alle kleineren Zahlen im Schnitt liegen – unser A von oben hat also „nach unten“ keine Lücke. Und „ohne größtes Element“ heißt, dass der Schnitt an seinem oberen Rand einfach „aufhört“, ohne dass ein allerletztes, größtes Element noch dazugehört – genau das drückt aus, dass die „Grenze“ des Schnitts (hier: $\sqrt{2}$) selbst *nicht* mehr zu den rationalen Zahlen in A gezählt wird.

Satz 3.31 (Supremumseigenschaft).

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $S \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (eine kleinste obere Schranke) in $\mathbb{R}$.

ORIGINAL: THEOREM 2.4

Beweisskizze. Ist S eine Menge von Dedekind-Schnitten, die durch B nach oben beschränkt ist, so ist $I := \bigcup_{A \in S} A$ selbst ein Dedekind-Schnitt (Vereinigung von nach unten abgeschlossenen Mengen ohne größtes Element bleibt nach unten abgeschlossen und ohne größtes Element), I ist eine obere Schranke von S (da $A \subset I$ für alle $A \in S$), und jede kleinere obere Schranke $I' \subsetneq I$ enthält nicht alle $A \in S$ – also ist I die *kleinste* obere Schranke. $\square$

In einfachen Worten ist das Supremum – bildlich gesprochen – die am dichtesten herandrückende „Decke“ über einer Menge: eine obere Schranke, die man nicht mehr enger machen kann, ohne dass sie anfängt, Elemente der Menge auszuschließen. Der ganze Witz von Satz 3.31 ist, dass so eine Decke in $\mathbb{R}$ *immer* existiert (sofern die Menge überhaupt nach oben beschränkt ist), während sie in $\mathbb{Q}$ fehlen kann – genau wie bei unserer Menge $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \text{ oder } x < 0\}$ von oben, deren „Decke“ $\sqrt{2}$ selbst kein Element von $\mathbb{Q}$ ist.

Definition 3.32 (Körper).

Ein **Körper** $(K, +, 0, \times, 1)$ ist eine Menge, für die $(K, +, 0)$ und $(K \setminus \{0\}, \times, 1)$ abelsche Gruppen sind (Definition 3.15) und $\times$ distributiv über $+$ ist: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$. Ein total geordneter Körper heißt **Dedekind-vollständig**, wenn jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt. $\triangle$

ORIGINAL: DEFINITION 2.6

In Worten, aufbauend auf dem Gruppenbegriff von oben: Ein Körper ist eine Menge, auf der man addieren, subtrahieren, multiplizieren *und* (außer durch Null) dividieren kann, und bei der sich Addition und Multiplikation über das Distributivgesetz vernünftig miteinander vertragen – genau wie du es von den reellen Zahlen aus der Schule gewohnt bist. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind *keine* Körper (in $\mathbb{N}$ fehlt die Subtraktion, in $\mathbb{Z}$ die Division fast überall), aber $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und, wie wir gleich sehen werden, auch $\mathbb{C}$ sind welche.

ORIGINAL: DEFINITION
2.7**Bemerkung 3.33 (axiomatische Charakterisierung von $\mathbb{R}$).**

$(\mathbb{R}, +, 0, \times, 1)$ ist – bis auf Umbenennung – der einzige Dedekind-vollständige, verträglich total geordnete Körper. $\mathbb{Q}$ dagegen ist ein Körper, aber *nicht* Dedekind-vollständig: $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ ist nach oben beschränkt (z. B. durch 1,5), besitzt aber kein Supremum in $\mathbb{Q}$, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\triangle$

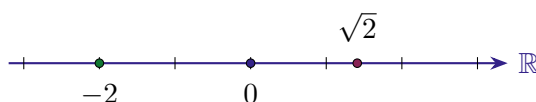


Abbildung 1.4: Die reelle Zahlengerade: $\mathbb{Q}$ liegt dicht darin (Satz 3.35), enthält aber Lücken wie $\sqrt{2}$, die erst durch die Dedekind-Vervollständigung geschlossen werden.

Satz 3.34 (archimedische Eigenschaft).

ORIGINAL: THEOREM 2.5

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $y < nx$.

Beweisskizze. Angenommen nicht: dann wäre $S := \{x > 0 \mid nx \leq y \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ nichtleer und durch y beschränkt, besäße also nach Satz 3.31 ein Supremum c . Da $c/2 < c$ kein Supremum von S ist, gibt es $x \in S$ mit $x > c/2$; aus der Definition von S folgt dann ein Widerspruch, sobald man n groß genug wählt. $\square$

Satz 3.35 ($\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$).

ORIGINAL: THEOREM 2.6

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ existiert $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$.

Beweisidee. Da $x < y$, unterscheiden sich die zugehörigen Dedekind-Schnitte $\tilde{x} \subsetneq \tilde{y}$. Man wählt eine rationale Zahl q , die in $\tilde{y}$, aber nicht in $\tilde{x}$ liegt (das ist möglich, da $\tilde{y}$ echt größer ist und kein größtes Element besitzt). Dann gilt $\tilde{x} \subsetneq \tilde{q} \subsetneq \tilde{y}$, also $x < q < y$. $\square$

Satz 3.36 ($\mathbb{R}$ ist überabzählbar).

ORIGINAL: THEOREM 2.7

Es gibt keine surjektive Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow (0, 1) \subset \mathbb{R}$.

Cantors Diagonalargument. Jedes $a \in (0, 1)$ hat eine Dezimaldarstellung $0,a_1a_2a_3\dots$. Angenommen f wäre surjektiv, mit $f(i) = 0,i_1i_2i_3\dots$. Wir konstruieren $x = 0,x_1x_2x_3\dots$ mit $x_i \neq i_i$ für alle i (z. B. $x_i := i_i + 1$, falls $i_i \leq 7$, sonst $x_i := 0$). Dann gilt $x \neq f(i)$ für jedes i (die Darstellungen unterscheiden sich an Stelle i), also $x \notin f(\mathbb{N})$, im Widerspruch zur Surjektivität. $\square$

Bemerkung 3.37.

Man kann zeigen, dass $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ gilt (Satz 3.10 liefert bereits $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, also $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$). Die **Kontinuumshypothese** besagt, dass es zwischen $\aleph_0$ und $2^{\aleph_0}$ keine weitere Kardinalzahl gibt; diese Aussage ist mit den ZFC-Axiomen weder beweisbar noch widerlegbar. $\triangle$

Beispiel 3.38 (reelle Zahlen in der Physik).

- (i) Ganz einfach: Ort, Zeit, Temperatur, Energie in der klassischen Mechanik sind reellwertig – der Konfigurationsraum eines Teilchens auf einer Geraden ist $\mathbb{R}$.
- (ii) Physik: Die archimedische Eigenschaft (Satz 3.34) garantiert, dass es zu jeder noch so kleinen Längeneinheit x eine natürliche Zahl n gibt, sodass nx jede vorgegebene Länge y übertrifft – es gibt also weder unendlich große noch unendlich kleine physikalische Längenskalen *relativ* zu einer festen Einheit.
- (iii) Abstrakter: Das kontinuierliche Streuspektrum eines Potentials ist überabzählbar (Satz 3.36), im Gegensatz zum abzählbaren gebundenen Spektrum (vgl. Beispiel zur Ordinal- und Kardinalzahlen).

△

ÜBUNGEN ZU § 3.5

Übung 3.39. Ist $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 3\}$ ein Dedekind-Schnitt? Welche reelle Zahl repräsentiert er?

Übung 3.40. Finden Sie mithilfe von Satz 3.35 eine rationale Zahl zwischen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{2} + 0,01$.

Übung 3.41 (*etwas schwerer*). Zeigen Sie, dass $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2 \text{ oder } a < 0\}$ ein gültiger Dedekind-Schnitt ist, der keiner rationalen Zahl entspricht.

Übung 3.42 (*klassisch, schwerer*). Zeigen Sie mithilfe von Dedekind-Schnitten, dass die reelle Zahl $0,999 \dots$ (unendlich viele Neunen) gleich 1 ist.

§ 3.6 KOMPLEXE ZAHLEN

Zur Motivation: In $\mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^2 = -1$ keine Lösung, da das Quadrat einer reellen Zahl nie negativ ist. Die komplexen Zahlen beheben genau das, indem sie den reellen Zahlen eine *zweite Dimension* hinzufügen – man kann sich eine komplexe Zahl ganz einfach als einen Punkt (oder einen Pfeil vom Ursprung zu diesem Punkt) in einer Ebene vorstellen, mit einer „normalen“ Achse (dem Realteil) und einer neuen, dazu senkrechten „imaginären“ Achse. Diese Idee steckt schon in der Konstruktion als $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: Eine komplexe Zahl *ist*, als Menge betrachtet, nichts anderes als ein Paar reeller Zahlen (x, y) – also ein Punkt in der Ebene, ganz wie du sie aus der Schule als Koordinatensystem kennst. Das einzig wirklich Neue gegenüber einem gewöhnlichen Koordinatenpaar ist die *Multiplikationsregel*, die gleich festlegt, wie man zwei solche Punkte miteinander „verrechnet“.

Konstruktion 3.43 (komplexe Zahlen $\mathbb{C}$).

Die komplexen Zahlen sind das kartesische Produkt $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit

ORIGINAL:
CONSTRUCTION 2.5

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (x_1, y_1) \times (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Damit ist $(\mathbb{C}, +, \times)$ ein Körper (Definition 3.32). Die reellen Zahlen werden via $x \mapsto (x, 0)$ eingebettet; mit $i := (0, 1)$ gilt $i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) \equiv -1$, und jede komplexe Zahl lässt sich schreiben als

$$z = (x, y) = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

△

Definition 3.44 (Realteil, Imaginärteil, konjugiert komplexe Zahl).

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt $x =: \operatorname{Re}(z)$ der **Realteil** und $y =: \operatorname{Im}(z)$ der **Imaginärteil** von z . Die **konjugiert komplexe Zahl** $\bar{z} := x - iy$ entsteht durch Vorzeichenwechsel des Imaginärteils.

△

Definition 3.45 (Betrag und Argument).

Der **Betrag** von $z = x + iy$ ist $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \geq 0$; er misst den Abstand von z zum Ursprung. Der **Argument** φ von $z \neq 0$ ist der Winkel zwischen der positiven x -Achse und der Strecke vom Ursprung zu z , sodass

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Der Hauptwert $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ ist eindeutig; jeder andere gültige Winkel ist $\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

△

Anders gesagt: Statt eine komplexe Zahl über ihre x - und y -Koordinate anzugeben („kartesisch“), kann man genauso gut sagen, *wie weit* man vom Ursprung weggeht (der Betrag $|z|$, wie eine Entfernungsangabe) und *in welche Richtung* (das Argument φ , wie eine Kompassrichtung oder ein Uhrzeigerwinkel). Beide Beschreibungen legen denselben Punkt eindeutig fest – welche man benutzt, ist reine Geschmackssache und hängt davon ab, welche Rechnung man gerade durchführen möchte (Addition ist in kartesischer Form einfacher, Multiplikation dagegen, wie wir gleich sehen, in der Polarform).

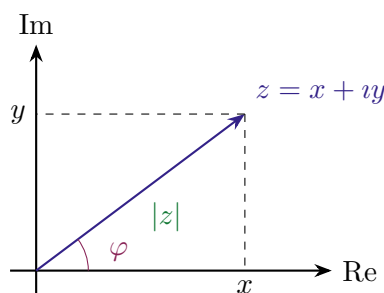


Abbildung 1.5: Die komplexe Zahlenebene: $z = x + iy$ mit Betrag $|z|$ und Argument φ .

Beispiel 3.46 (komplexe Zahlen in der Physik).

- (i) Physik, sehr konkret: In der Wechselstromlehre wird ein ohmscher Widerstand R , eine Induktivität L und eine Kapazität C zu einer komplexen **Impedanz** $Z = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$

zusammengefasst; der Betrag $|Z|$ ist der tatsächliche Wechselstromwiderstand, das Argument $\text{Arg}(Z)$ die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.

- (ii) Physik: Eine Wellenfunktion $\psi(x) = |\psi(x)| e^{i\varphi(x)}$ in der Quantenmechanik ist komplexwertig; nur $|\psi(x)|^2$ (nicht ψ selbst) ist direkt als Wahrscheinlichkeitsdichte messbar.
- (iii) Abstrakter: Die Polardarstellung macht Multiplikation einfach: $z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ – Beträge multiplizieren sich, Argumente addieren sich.

△

Bemerkung 3.47 (n -te Wurzeln und Fundamentalsatz der Algebra).

Für $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ besitzt $\xi^n = z$ genau n verschiedene Lösungen

$$\xi_k = |z|^{1/n} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Allgemeiner ist $\mathbb{C}$ **algebraisch abgeschlossen** (Fundamentalsatz der Algebra): jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Der Beweis wird auf ein späteres Kapitel verschoben. △

ÜBUNGEN ZU § 3.6

Übung 3.48. Berechnen Sie $(3 + 2i)(1 - i)$ und $\overline{3 + 2i}$.

Übung 3.49. Bestimmen Sie Betrag und Argument von $z = -1 + i$.

Übung 3.50. Ein Wechselstromkreis hat $R = 30 \Omega$ und eine Reaktanz $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 40 \Omega$. Bestimmen Sie $|Z|$ und die Phasenverschiebung $\text{Arg}(Z)$.

Übung 3.51 (etwas schwerer). Zeigen Sie $i^2 = -1$ direkt aus der Definition der Multiplikation in Konstruktion 3.43.

Übung 3.52 (schwerer). Bestimmen Sie alle drei dritten Wurzeln von $z = 1$ (die **dritten Einheitswurzeln**) und stellen Sie sie in der komplexen Ebene dar.

2 Topologische Räume

ORIGINAL: KAPITEL 3

Bisher haben wir Zahlen algebraisch behandelt: Addition, Multiplikation, Ordnung. Für die Physik ist aber mindestens ebenso wichtig, was es heißt, dass zwei Punkte „nahe beieinander“ liegen, dass eine Funktion **stetig** ist, oder dass eine Menge **kompakt** ist (was z. B. garantiert, dass ein Energiefunktional ein Minimum annimmt). Die **Topologie** formalisiert genau diesen Begriff von Nähe – und zwar, bemerkenswerterweise, *ohne* dass man überhaupt Abstände messen können muss. Dieses Kapitel entspricht Kapitel 3 (*Topological spaces*) des Originalskripts.

Ein Bild, das vielen beim ersten Kontakt mit Topologie hilft: Denk an eine U-Bahn-Karte im Vergleich zu einer echten Straßenkarte. Auf der Straßenkarte stimmen Entfernungen und Winkel exakt; auf der U-Bahn-Karte sind dagegen alle Linien schön gerade gezeichnet und sämtliche Abstände hoffnungslos verzerrt – trotzdem verrät dir die U-Bahn-Karte alles, was du zum Umsteigen wirklich brauchst: welche Stationen benachbart sind, welche Linien sich kreuzen, wie man von A nach B kommt. Genau das ist der Witz an der Topologie: Sie kümmert sich nur um solche „Nachbarschafts-“ und „Zusammenhangs“-Informationen (was liegt nah beieinander, was hängt zusammen, wo sind die Ränder) und wirft alles über Bord, was mit tatsächlichen Zahlen-Abständen zu tun hat. Deshalb kommt die folgende Definition auch völlig ohne den Begriff „Abstand“ aus – das mag beim ersten Lesen befremdlich wirken, ist aber genau die Pointe, und wir kommen erst im nächsten Abschnitt (§ 5, „Metrische Räume“) wieder zurück zu Räumen, in denen man tatsächlich Abstände messen kann.

§ 4 TOPOLOGIE

ORIGINAL: DEFINITION
3.1

Definition 4.1 (Topologie, offene Mengen).

Ein **topologischer Raum** ist eine Menge X zusammen mit einer **Topologie** $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, das heißt einer Menge von Teilmengen von X (den **offenen Mengen**), sodass gilt:

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
- (abgeschlossen unter beliebiger Vereinigung) für jede Indexmenge A : sind $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ alle in $\mathcal{T}$, so auch $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$;
- (abgeschlossen unter endlichem Schnitt) für jede endliche Menge I : sind $(U_i)_{i \in I}$ alle in $\mathcal{T}$, so auch $\bigcap_{i \in I} U_i$.

Für $Y \subset X$ heißt $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$ die **Teilraumtopologie** (oder induzierte Topologie) auf Y . △

Bemerkung 4.2 (Die Definition in Alltagssprache).

Diese drei Bedingungen wirken auf den ersten Blick trocken – in Worten gesagt, verlangen sie aber nur Folgendes: Erstens müssen die „ganz leere Auswahl“ $\emptyset$ und „wirklich alles“ X immer als offen durchgehen dürfen, das sind sozusagen die beiden Pflicht-Mitglieder jeder Topologie. Zweitens: Klebst du beliebig viele (auch unendlich viele!) offene Mengen zusammen, ist das Ergebnis wieder offen. Drittens aber: Schneidest du nur *endlich* viele offene Mengen, ist auch das wieder offen – bei *unendlich* vielen gleichzeitigen Schnitten darf das dagegen schiefgehen (siehe Übungen unten). Eine Topologie $\mathcal{T}$ ist also im Grunde nichts weiter als eine amtliche Liste, welche Teilmengen von X das Prädikat „offen“ tragen dürfen, zusammen mit der Garantie, dass diese Liste unter Vereinigen und endlichem Schneiden stabil bleibt und niemals „herausfällt“.

Ein Bild für „offen“, das sich viele gut merken können: Eine Menge U ist offen, wenn du für *jeden* Punkt darin einen winzigen Luftballon um genau diesen Punkt aufblasen kannst, der noch komplett innerhalb von U liegt – egal wie nah der Punkt am „Rand“ von U zu liegen scheint, es passt immer noch ein (vielleicht winziger) Ballon dazwischen. Genau deswegen ist zum Beispiel das offene Intervall $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ offen: um jeden Punkt darin, auch um 0,0001, passt noch ein kleiner Ballon, der ganz in $(0, 1)$ bleibt. Das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ dagegen ist *nicht* offen: um den Randpunkt 0 passt kein Ballon mehr, der komplett in $[0, 1]$ bleibt – jeder noch so kleine Ballon um 0 ragt ein Stückchen ins Negative hinein. $\triangle$

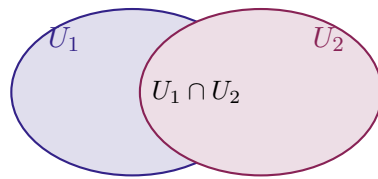


Abbildung 2.1: Zwei offene Mengen $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$: sowohl ihre Vereinigung (die ganze gefärbte Fläche) als auch ihr Schnitt (die Überlappung in der Mitte) sind wieder offen – so, wie es die zweite und dritte Bedingung der Definition verlangen.

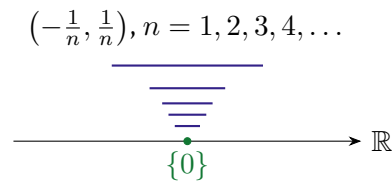


Abbildung 2.2: Warum es beim Schnitt wirklich auf *endlich viele* Mengen ankommt: jedes einzelne Intervall $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ist offen, aber schneidet man *alle* $n \in \mathbb{N}$ gleichzeitig, bleibt nur noch der einzelne Punkt $\{0\}$ übrig – und der ist, wie in der Definition erklärt (kein Ballon passt mehr hinein), nicht offen. Genau deshalb erlaubt die Definition beim Schnitt nur endlich viele Mengen.

Bemerkung 4.3 (feiner und gröber).

Die Topologien auf X bilden bezüglich $\subset$ ein Poset (Definition 2.26). Gilt $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, so heißt $\mathcal{T}_2$ **feiner** als $\mathcal{T}_1$ (und $\mathcal{T}_1$ **gröber** als $\mathcal{T}_2$). Jede Menge X trägt zwei triviale Topologien: die **diskrete Topologie** $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ (die feinste überhaupt) und die **indiskrete Topologie** $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ (die gröbste). Interessant sind meist die Topologien dazwischen. In Worten: Je mehr Mengen offiziell als „offen“ gelten, desto *feiner* unterscheidet die Topologie zwischen Punkten – die diskrete Topologie ist wie eine Schulklasse, in der jeder Schüler sein eigenes Einzelzimmer hat (jede einpunktige Menge $\{x\}$ ist offen, jeder Punkt lässt sich also von jedem anderen sauber trennen), während die indiskrete Topologie wie ein einziger großer Schlafsaal ist, in dem es außer „alle“ und „niemand“ überhaupt keine Unterteilung gibt. $\triangle$

Beispiel 4.4 (Topologien – einfach bis abstrakt).

- (i) Für $X = \{1, 2\}$ gibt es genau vier Topologien: $\{\emptyset, X\}$ (indiskret), $\{\emptyset, \{1\}, X\}$, $\{\emptyset, \{2\}, X\}$ und $\mathcal{P}(X)$ (diskret).
- (ii) Physik, konkret: In der diskreten Topologie auf dem Zustandsraum $\{\uparrow, \downarrow\}$ eines Spins ist *jede* Teilmenge offen – passend dazu, dass es zwischen den beiden Zuständen keine sinnvolle Zwischenstufe gibt.
- (iii) Abstrakter: $\mathbb{R}^D$ trägt die **Standardtopologie** (erzeugt durch die üblichen Kugeln, siehe § 3.2 des Originalskripts); ab jetzt ist damit stets diese Topologie gemeint, sofern nichts anderes gesagt wird.

$\triangle$

Definition 4.5 (offen, abgeschlossen, Umgebung, Hausdorff).

Eine Menge heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement offen ist. (Manche Mengen, z. B. $\emptyset$ und X , sind sowohl offen als auch abgeschlossen – man nennt sie **clopen**.) Für $x \in X$ ist eine **Umgebung** von x eine offene Menge $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$. Der Raum X heißt **Hausdorffsch**, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x_1 \neq x_2$ disjunkte Umgebungen $U_1 \ni x_1, U_2 \ni x_2$ gibt. $\triangle$

In einfachen Worten: Eine **Umgebung** von x ist einfach eine kleine offene „Blase persönlichen Freiraums“ um x herum – der Luftballon von eben. Und **Hausdorffsch** bedeutet nur, dass je zwei verschiedene Punkte immer genug Platz haben, um sich *jeweils* ihre eigene Blase aufzublasen, ohne dass sich die beiden Blasen berühren – ungefähr so, wie zwei Personen im Bus etwas Abstand zueinander halten können, solange der Bus nicht hoffnungslos überfüllt ist.

Bemerkung 4.6.

In einem Hausdorff-Raum lassen sich Punkte durch Umgebungen „voneinander trennen“. Die diskrete Topologie ist stets Hausdorffsch (man nehme $U_i = \{x_i\}$); die indiskrete Topologie ist es nie (sobald $|X| \geq 2$), da die einzige nichtleere offene Menge ganz X ist. Die meisten in der Physik verwendeten Räume – etwa $\mathbb{R}^D$ – sind Hausdorffsch. $\triangle$

Definition 4.7 (stetige und offene Abbildungen).

Eine Funktion $f: (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_2)$ zwischen topologischen Räumen heißt

ORIGINAL: DEFINITION
3.3

- **offen**, wenn $f(U) \in \mathcal{T}_2$ für alle $U \in \mathcal{T}_1$;
- **stetig**, wenn $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_1$ für alle $V \in \mathcal{T}_2$.

Ein Raum X heißt **zusammenhängend**, wenn er sich nicht in zwei disjunkte, nichtleere offene Mengen zerlegen lässt. Ein **Weg** von x nach y ist eine stetige Funktion $f: [0, 1] \rightarrow X$ mit $f(0) = x$, $f(1) = y$; X heißt **wegzusammenhängend**, wenn je zwei Punkte durch einen Weg verbunden sind. $\triangle$

In einfachen Worten: **Stetig** heißt nichts anderes, als dass die Funktion keine „Sprünge“ macht – läuft x ganz allmählich auf einen bestimmten Punkt zu, darf $f(x)$ nicht plötzlich woanders hinspringen, sondern muss ebenfalls allmählich hinterherwandern (das wird im Kapitel über Folgen noch viel greifbarer, sobald wir Stetigkeit über Grenzwerte von Folgen ausdrücken können). **Zusammenhängend** heißt einfach: der Raum lässt sich nicht sauber in zwei getrennte „Inseln“ zerlegen, zwischen denen es keine offene Brücke gibt – man kann sich den ganzen Raum als ein einziges, ungebrochenes Stück vorstellen. **Wegzusammenhängend** ist die noch handfestere Version davon: man kann tatsächlich, mit dem Finger sozusagen, einen ununterbrochenen Weg von jedem Punkt zu jedem anderen Punkt zeichnen, ohne den Raum je zu verlassen – ein Zimmer ganz ohne Mauern mittendrin ist wegzusammenhängend, ein Zimmer, das durch eine durchgehende Wand ohne Tür in zwei Hälften geteilt ist, dagegen nicht.

Beispiel 4.8 (Stetigkeit und Zusammenhang in der Physik).

- Ganz einfach: Eine Temperaturverteilung $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ oder ein elektrostatisches Potential $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sind (fast überall) stetige Funktionen zwischen topologischen Räumen.
- Physik: Der Konfigurationsraum eines Teilchens außerhalb einer undurchdringlichen Kugel, $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_1(0)}$, ist zusammenhängend (man kann jeden Punkt um die Kugel herum erreichen) und sogar wegzusammenhängend.
- Abstrakter: Die Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist *nicht* zusammenhängend (sie zerfällt in $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$), im Gegensatz zu $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, die zusammenhängend (sogar wegzusammenhängend) ist – „ein Loch stört den Zusammenhang erst ab Dimension 1“.

$\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 4

Übung 4.9. Listen Sie alle Topologien auf $X = \{1, 2, 3\}$ mit genau drei offenen Mengen auf.

Übung 4.10. Zeigen Sie: Ist $f: X \rightarrow Y$ stetig und $g: Y \rightarrow Z$ stetig, dann ist $g \circ f: X \rightarrow Z$ stetig.

Übung 4.11. Ist die Identität $\text{id}_X: (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ stetig, wenn $\mathcal{T}_1$ die diskrete und $\mathcal{T}_2$ die indiskrete Topologie ist? Und umgekehrt?

Übung 4.12 (*etwas schwerer*). Zeigen Sie, dass jede endliche Vereinigung und jeder beliebige Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist. *Hinweis: benutzen Sie die de Morganschen Regeln aus § 1.*

§ 4.1 KOMPAKTE MENGEN

Definition 4.13 (kompakte Menge).

Eine Menge $K \subset X$ heißt **kompakt**, wenn jede **offene Überdeckung** $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ (mit $U_\alpha \in \mathcal{T}$) eine **endliche Teilüberdeckung** besitzt, das heißt es gibt eine endliche Teilmenge $I \subset A$ mit $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. $\triangle$

ORIGINAL: DEFINITION
3.4

Diese Definition gehört zu den abstraktesten in diesem ganzen Kapitel – keine Sorge, wenn sie beim ersten Lesen noch nicht sofort „klick“ macht, das geht fast allen so. Hier eine Alltags-Übersetzung: Stell dir vor, du sollst eine Fläche K komplett mit Decken zudecken, und du darfst dafür beliebig viele (auch unendlich viele!) verschieden große, offene Decken U_α verwenden. **Kompakt** bedeutet: Egal, wie du das anstellst – egal wie viele Decken du benutzt und wie seltsam sie zugeschnitten sind –, es hätten schon *endlich viele davon* gereicht, um K vollständig zuzudecken. Du kannst also immer den allergrößten Teil deiner (vielleicht unendlichen) Deckensammlung wieder wegräumen und trotzdem bleibt K vollständig zugedeckt. Das ist überraschend restriktiv: Bei einer nicht-kompakten Menge (siehe die Übung unten zu $\mathbb{N}$) kann man sich eine Überdeckung ausdenken, bei der wirklich *jede einzelne* Decke gebraucht wird und keine einzige entbehrlich ist.

Satz 4.14 (Eigenschaften kompakter Mengen).

ORIGINAL: THEOREM 3.1

- (i) Ist K kompakt und $U \subset K$ offen, so ist $K \setminus U$ kompakt.
- (ii) Ist K kompakt in $(X, \mathcal{T})$, so ist K auch kompakt in der Teilraumtopologie $(K, \mathcal{T}_K)$.
- (iii) Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Funktion ist kompakt.

Beweis. (i) Sei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von $K \setminus U$. Dann ist $U, (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von K und besitzt, da K kompakt ist, eine endliche Teilüberdeckung $(U_i)_{i \in I}$ (die U enthalten darf). Da U keinen Punkt aus $K \setminus U$ enthält, ist $(U_i)_{i \in I} \setminus U$ eine endliche Überdeckung von $K \setminus U$.

(ii) Jede offene Überdeckung von K in der Teilraumtopologie hat die Form $(K \cap U_\alpha)_{\alpha \in A}$ mit $U_\alpha \in \mathcal{T}$. Dann ist $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung von K in $\mathcal{T}$ und besitzt eine endliche Teilüberdeckung $(U_i)_{i \in I}$, sodass $(K \cap U_i)_{i \in I}$ die gesuchte endliche Teilüberdeckung von K in $\mathcal{T}_K$ ist.

(iii) Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig und $K \subset X$ kompakt. Für eine offene Überdeckung $f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ sind die Mengen $f^{-1}(V_\alpha)$ offen (Stetigkeit von f) und überdecken K . Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(f^{-1}(V_i))_{i \in I}$, und $(V_i)_{i \in I}$ ist die gesuchte endliche Teilüberdeckung von $f(K)$. $\square$

Bemerkung 4.15 (Der Satz in Worten zusammengefasst).

Aussage (i) sagt, dass Kompaktheit erhalten bleibt, wenn man ein offenes Stück wieder ausschneidet. Aussage (ii) sagt, dass es für die Frage „ist K kompakt?“ egal ist, ob man K als Teil des großen Raums X betrachtet oder ganz für sich alleine als eigenen kleinen Raum – Kompaktheit ist eine Eigenschaft, die K „in sich selbst trägt“, unabhängig davon, in welcher Umgebung K gerade sitzt. Und Aussage (iii) sagt: Stetige Funktionen dürfen eine kompakte Menge zwar verbiegen, verzerren oder stauchen, aber niemals „die Kompaktheit kaputt machen“ – das Bild bleibt immer kompakt. $\triangle$

Beispiel 4.16 (Kompaktheit in der Physik).

- (i) Ganz einfach: Ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist kompakt (Satz von Heine-Borel, wird in einem späteren Kapitel bewiesen); das offene Intervall (a, b) dagegen nicht.
- (ii) Physik: Kompaktheit des zulässigen Bereichs ist oft die Zutat, die garantiert, dass ein Energiefunktional oder eine Wirkung tatsächlich ein Minimum *annimmt* (statt nur ein Infimum zu besitzen, das nie erreicht wird) – vgl. den Satz vom Minimum/Maximum in einem späteren Kapitel.
- (iii) Abstrakter: Nach Aussage (iii) bleibt Kompaktheit unter stetigen Bildern erhalten – deshalb ist z. B. das Bild einer kompakten Kreislinie unter einer stetigen Abbildung wieder kompakt, unabhängig davon, wie „verbeult“ das Bild aussieht.

$\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 4.1

Übung 4.17. Ist eine endliche Menge $K = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ immer kompakt (bezüglich jeder Topologie auf X)? Begründen Sie.

Übung 4.18. Ist $\mathbb{N}$ (mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie) kompakt? Finden Sie eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung.

Übung 4.19 (*etwas schwerer*). Zeigen Sie: die Vereinigung zweier kompakter Mengen ist kompakt.

§ 4.2 TOPOLOGISCHER RAND, ABSCHLUSS UND INNERES

Definition 4.20 (Häufungspunkt, innerer Punkt, isolierter Punkt).

Es sei $Y \subset X$ und $x \in X$. Der Punkt x heißt

- **Häufungspunkt** (oder Grenzpunkt) von Y , wenn jede Umgebung von x noch einen *weiteren* Punkt von Y enthält: $\forall U(x): (U(x) \cap Y) \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Ein Häufungspunkt von Y muss nicht in Y liegen.
- **innerer Punkt** von Y , wenn er eine Umgebung besitzt, die ganz in Y liegt: $\exists U(x) \subset Y$.
- **isolierter Punkt** von Y , wenn $x \in Y$, aber x kein Häufungspunkt von Y ist.

△

Auch hier hilft ein Bild, bevor wir mit den Formeln weiterarbeiten: Stell dir Y als ein Land auf einer Landkarte vor, und x als eine Stelle irgendwo auf dieser Karte (innerhalb von Y oder auch außerhalb).

- x ist ein **innerer Punkt** von Y , wenn er tief im Landesinneren liegt – so tief, dass man sich noch ein ganzes Stück in *jede* Richtung bewegen kann, ohne die Landesgrenze zu erreichen. Formal: *eine ganze* Umgebung von x passt komplett in Y hinein.
- x ist ein **Häufungspunkt** von Y , wenn sich beliebig nah an x heran immer wieder *andere* Punkte von Y finden lassen, egal wie klein man den Radius um x herum wählt – x selbst muss dabei gar nicht zu Y gehören, es zählt nur, was sich in seiner unmittelbaren Nähe drängt. Formal: *jede* Umgebung von x enthält, außer eventuell x selbst, noch mindestens einen weiteren Punkt von Y . Ein gutes Bild dafür: die Punkte $\frac{1}{n}$ (für $n = 1, 2, 3, \dots$) drängen sich immer dichter um $x = 0$ zusammen, ohne 0 jemals zu erreichen – trotzdem (oder gerade deswegen) ist 0 ein Häufungspunkt dieser Punktfolge.
- x ist ein **isolierter Punkt** von Y , wenn er zwar selbst zu Y gehört, aber ringsherum eine kleine Pufferzone hat, in der sich sonst nichts von Y befindet – eine einzelne, weit abgelegene Insel, kein Häufungspunkt.

Definition 4.21 (Inneres, Abschluss, Rand).

Für $Y \subset X$ heißt

- $Y^\circ := \bigcup \{U \in \mathcal{T} \mid U \subset Y\}$ das **Innere** von Y (die Vereinigung aller in Y enthaltenen offenen Mengen);
- $\bar{Y} := Y \cup \{\text{Häufungspunkte von } Y\}$ der **Abschluss** von Y ;
- $\partial Y := \bar{Y} \setminus Y^\circ$ der **Rand** von Y .

△

In einfachen Worten, um bei der Landkarte zu bleiben:

- Y° (das **Innere**) ist das sichere Kernland, in dem man garantiert noch nicht an der Grenze steht.

ORIGINAL: DEFINITION
3.5

ORIGINAL: DEFINITION
3.5, FORTSETZUNG

- $\bar{Y}$ (der **Abschluss**) ist das Land *plus* seine gesamte Grenzlinie – alles, was man erreicht, wenn man beliebig nah an Y herankommen darf, auch wenn der allerletzte Schritt vielleicht gar nicht mehr in Y selbst liegt.
- ∂Y (der **Rand**) ist genau diese Grenzlinie selbst: alles, was zum Abschluss gehört, aber nicht mehr zum sicheren Innenland – die „Haut“ der Menge sozusagen, weder ganz drinnen noch ganz draußen.

Die vielen kleinen Tatsachen über Inneres, Abschluss und Rand, die das Originalskript als eine einzige, sehr lange Übungsaufgabe versteckt, sind eigentlich das Kernresultat dieses Abschnitts – wir stellen die wichtigsten daher als richtigen Satz zusammen.

Satz 4.22 (Charakterisierung von Innerem, Abschluss und Rand).

Für $Y \subset X$ gilt:

ORIGINAL: EXERCISE 3.1

- (i) $x \in Y^\circ$ genau dann, wenn x ein innerer Punkt von Y ist; insbesondere ist Y° offen, und $Y^\circ \subset Y$.
- (ii) U ist offen genau dann, wenn $U = U^\circ$.
- (iii) $x \in \bar{Y}$ genau dann, wenn jede Umgebung von x die Menge Y trifft: $\forall U(x): U(x) \cap Y \neq \emptyset$.
- (iv) $X \setminus \bar{Y} = (X \setminus Y)^\circ$ (das Komplement des Abschlusses ist das Innere des Komplements).
- (v) C ist abgeschlossen genau dann, wenn $C = \bar{C}$.
- (vi) X zerfällt in die disjunkte Zerlegung $X = Y^\circ \sqcup \partial Y \sqcup (X \setminus Y)^\circ$, und $\partial Y = \partial(X \setminus Y)$.

Beweis. (i) Ist x innerer Punkt, so gibt es $U(x) \subset Y$ mit $U(x) \in \mathcal{T}$, also $U(x) \subset Y^\circ$ nach Definition von Y° , insbesondere $x \in Y^\circ$. Umgekehrt liegt jeder Punkt aus Y° in mindestens einer der offenen, in Y enthaltenen Mengen – das liefert die gesuchte Umgebung. Da Y° eine Vereinigung offener Mengen ist, ist Y° selbst offen.

(ii) Ist $U = U^\circ$, so ist U offen (nach (i)). Ist umgekehrt U offen, so ist U selbst eine der Mengen, über die in der Definition von U° vereinigt wird, also $U \subset U^\circ$; zusammen mit $U^\circ \subset U$ aus (i) folgt $U = U^\circ$.

(iii) Ist $x \in Y$, so trifft jede Umgebung von x die Menge Y (in x selbst). Ist x Häufungspunkt, so nach Definition ebenso. Für die Rückrichtung: Ist $x \notin Y$ aber jede Umgebung trifft Y , so ist x nach Definition ein Häufungspunkt.

(iv) Ist $x \in X \setminus \bar{Y}$, so ist x weder in Y noch Häufungspunkt von Y , also gibt es $U(x)$ mit $U(x) \cap Y = \emptyset$, das heißt $U(x) \subset X \setminus Y$, also $x \in (X \setminus Y)^\circ$. Die Umkehrung verläuft analog.

(v) Ist $X \setminus C$ offen, so ist $X \setminus C = (X \setminus C)^\circ \stackrel{(iv)}{=} X \setminus \bar{C}$, also $C = \bar{C}$. Die Rückrichtung folgt, da $\bar{C}$ nach (iv) stets abgeschlossen ist.

(vi) Jeder Punkt $x \in X$ liegt entweder in Y° , oder in $(X \setminus Y)^\circ$, oder in keinem von beiden – und im letzten Fall genau dann in $\partial Y = \bar{Y} \setminus Y^\circ$, wie man mit (iv) leicht nachrechnet. Die drei Mengen sind paarweise disjunkt, da Y° und $(X \setminus Y)^\circ$ es nach Konstruktion sind und

∂Y per Definition beide ausschließt. Vertauscht man Y mit $X \setminus Y$ in dieser Zerlegung, folgt $\partial Y = \partial(X \setminus Y)$. $\square$

Bemerkung 4.23 (Der Satz in Worten zusammengefasst).

Aussagen (i)+(ii) sagen, dass Y° wirklich die *größte* offene Menge ist, die noch ganz in Y hineinpasst, und (iv)+(v) sagen spiegelverkehrt dasselbe für den Abschluss: $\bar{Y}$ ist die *kleinste* abgeschlossene Menge, die Y noch komplett enthält. Aussage (vi) schließlich fasst das Gesamtbild zusammen: Jeder Punkt des ganzen Raums gehört zu genau einer von drei Gruppen – er liegt tief im Inneren von Y , tief im Inneren des Komplements von Y , oder direkt auf der gemeinsamen Grenze ∂Y dazwischen. Man kann also den gesamten Raum X komplett aufteilen in „eindeutig innerhalb von Y “, „eindeutig außerhalb von Y “ und „genau auf der Kante“. $\triangle$

Bemerkung 4.24.

Ein paar Warnungen, die man beim Rechnen mit Y° , $\bar{Y}$, ∂Y im Kopf behalten sollte: Im Allgemeinen ist $\overline{Y^\circ} \neq \bar{Y}$ und $(\bar{Y})^\circ \neq Y^\circ$ – Abschluss und Inneres sind *keine* zueinander inversen Operationen. Eine Menge Y heißt **dicht** in X , wenn $\bar{Y} = X$; ist U zusätzlich offen und dicht, so gilt $\partial U = X \setminus U$. $\triangle$

Beispiel 4.25 (Inneres, Abschluss, Rand – einfach bis abstrakt).

- (i) In $\mathbb{R}$ (Standardtopologie) gilt für $Y = (a, b)$ ebenso wie für $Y = [a, b]$: $Y^\circ = (a, b)$, $\bar{Y} = [a, b]$, $\partial Y = \{a, b\}$.
- (ii) Physik: Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, in dem eine partielle Differentialgleichung gelöst wird (z. B. die Wärmeleitungsgleichung), werden **Randbedingungen** genau auf $\partial\Omega$ vorgeschrieben – Dirichlet-Randbedingungen legen den Funktionswert auf $\partial\Omega$ fest, Neumann-Randbedingungen die Normalableitung.
- (iii) Abstrakter: In der diskreten Topologie ist jede einpunktige Menge $\{x\}$ offen, also gilt $Y^\circ = Y$ und $\partial Y = \emptyset$ für *jede* Teilmenge Y – jeder Punkt ist gleichzeitig isoliert und innerer Punkt, es gibt gar keine „Ränder“.

$\triangle$

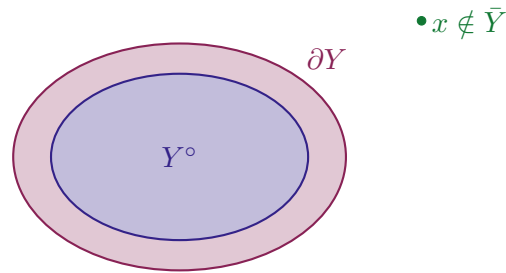


Abbildung 2.3: Ein Gebiet $Y \subset X$: das Innere Y° (dunkel), der Rand ∂Y (der Ring dazwischen) und ein Punkt außerhalb des Abschlusses $\bar{Y}$.

ÜBUNGEN ZU § 4.2

Übung 4.26. Bestimmen Sie Y° , $\bar{Y}$ und ∂Y für $Y = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. *Hinweis: benutzen Sie Satz 3.35.*

Übung 4.27. Zeigen Sie, dass ∂Y stets abgeschlossen ist.

Übung 4.28 (etwas schwerer). Zeigen Sie: eine Menge U ist genau dann offen, wenn $U \cap \partial U = \emptyset$.

Übung 4.29 (schwerer). Zeigen Sie: der Rand einer offenen Menge V hat leeres Inneres, $(\partial V)^\circ = \emptyset$. *Hinweis: Wäre x innerer Punkt von ∂V , so gäbe es eine offene Umgebung $U(x) \subset \partial V$; zeigen Sie, dass das $U(x) \cap V = \emptyset$ und $U(x) \cap V \neq \emptyset$ gleichzeitig erzwingt.*

§ 5 METRISCHE RÄUME UND DIE STANDARDTOPOLOGIE

Die abstrakte Definition 4.1 einer Topologie sagt nichts darüber, *wie weit* zwei Punkte voneinander entfernt sind – nur, welche Mengen offen sind. In der Praxis kommt eine Topologie aber meistens von einem konkreten Abstandsbegriff. Ein topologischer Raum heißt **metrisierbar**, wenn er zu einem **metrischen Raum** homöomorph ist. Dieser Abschnitt entspricht Original 3.2.

ORIGINAL: ORIGINAL 3.2

Zur Beruhigung vorweg: Ein **metrischer Raum** ist eigentlich genau das, was du dir spontan unter „Abstand“ vorstellst, nur sauber aufgeschrieben. Denk an ein Lineal, mit dem du den Abstand zwischen zwei Punkten auf einem Blatt Papier misst, oder an eine Karte, auf der man Kilometer zwischen zwei Städten abliest. Eine **Metrik** d ist nichts anderes als eine Vorschrift, die je zwei Punkten x, y eine einzige nichtnegative Zahl $d(x, y)$ zuordnet – „wie weit x von y entfernt ist“ – und dabei ein paar ganz selbstverständliche Regeln einhält, die im Folgenden formalisiert werden.

Definition 5.1 (metrischer Raum).

Ein **metrischer Raum** ist eine Menge X zusammen mit einer **Abstandsfunktion** (Metrik) $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass:

ORIGINAL: DEFINITION 3.6

- $d(x, x) = 0$;
- (Symmetrie und Positivität) für $x \neq y$ gilt $d(x, y) = d(y, x) > 0$;
- (Dreiecksungleichung) für alle x, y, z gilt $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Die Dreiecksungleichung ist die interessanteste Eigenschaft: sie besagt, dass der direkte Weg von x nach y nie länger ist als ein Umweg über einen dritten Punkt z . $\triangle$

In einfachen Worten, Punkt für Punkt: Die erste Regel sagt nur, dass jeder Punkt von sich selbst den Abstand null hat – man muss ja nicht laufen, um bei sich selbst anzukommen (sehr philosophisch xD). Die zweite Regel sagt, dass zwei verschiedene Punkte immer einen *echten*, positiven Abstand haben (nichts ist „ein bisschen“ entfernt und trotzdem gleich weit weg wie umgekehrt betrachtet – der Abstand von München nach Berlin ist derselbe wie von Berlin nach München). Und die Dreiecksungleichung, wie schon gesagt, ist einfach die Alltagserfahrung, dass ein Umweg nie abkürzt: Willst du von x nach y , kannst du höchstens draufzahlen, wenn du erst bei z vorbeischaust, aber nie sparen. Genau diese drei ganz gewöhnlichen Eigenschaften – und sonst nichts! – machen aus einer Funktion d überhaupt erst eine „vernünftige“ Abstandsmessung.

Definition 5.2 (Standardtopologie).

Die **Standardtopologie** auf einem metrischen Raum (X, d) ist die Topologie, die von der Subbasis aller **offenen Kugeln**

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}, \quad x \in X, r \in \mathbb{R}_{>0}$$

erzeugt wird. $\triangle$

In einfachen Worten: Die **offene Kugel** $B_r(x)$ ist genau der Luftballon von vorhin, jetzt ganz konkret gemacht – sie besteht aus *allen* Punkten, die strikt weniger als r von x entfernt sind, also aus x selbst und allem, was „in Reichweite r “ liegt, ohne die Reichweite-Grenze mit einzuschließen. (In $\mathbb{R}^2$ mit dem gewohnten Abstand ist das buchstäblich eine runde Scheibe ohne ihren Rand; in $\mathbb{R}^3$ eine Kugel im Alltagssinn, wieder ohne die Oberfläche.) Die **Standardtopologie** erklärt dann einfach: eine Menge ist offen, wenn man sie komplett aus solchen Kugeln zusammensetzen kann – was ganz genau zu unserem Ballon-Bild von eben passt.

Bemerkung 5.3.

Der Abschluss einer Kugel in der Standardtopologie ist die **abgeschlossene Kugel** $\overline{B_r(x)} = \{y \mid d(x, y) \leq r\}$, und ihr Rand ist die **Sphäre** $\partial B_r(x) = \{y \mid d(x, y) = r\}$. Anders gesagt: Nimmt man zur offenen Kugel (der „vollen Scheibe ohne Rand“) noch die Randlinie selbst hinzu, erhält man die abgeschlossene Kugel; die Sphäre ist *nur* diese Randlinie, die hohle Schale sozusagen, ohne das Innere. $\triangle$

Satz 5.4 (Kugeln bilden eine Basis der Standardtopologie).

In der Standardtopologie eines metrischen Raums (X, d) enthält jede offene Menge U um jeden ihrer Punkte $y \in U$ eine ganze Kugel: es gibt $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(y) \subset U$. (Die Umkehrung ist

ORIGINAL: DEFINITION
3.7

ORIGINAL: THEOREM 3.2

trivial: enthält jeder Punkt von U eine solche Kugel, so ist U offen.)

Beweis. Wir zeigen die Aussage zunächst für eine einzelne Kugel, dann für beliebige Vereinigungen und schließlich für endliche Schnitte von Kugeln – jede offene Menge entsteht ja genau so aus der Subbasis.

Einzelne Kugel: Sei $y \in B_r(x)$. Da $d(x, y) < r$, existiert ϵ mit $0 < \epsilon < r - d(x, y)$. Für jedes $z \in B_\epsilon(y)$ liefert die Dreiecksungleichung $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \epsilon + d(y, x) < r$, also $B_\epsilon(y) \subset B_r(x)$.

Vereinigung: Ist $y \in \bigcup_{\alpha \in A} B_{r_\alpha}(x_\alpha)$, so liegt y in mindestens einer der Kugeln, etwa $B_{r_1}(x_1)$; nach dem vorigen Schritt gibt es ϵ mit $B_\epsilon(y) \subset B_{r_1}(x_1) \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_{r_\alpha}(x_\alpha)$.

Endlicher Schnitt: Ist $y \in B_{\epsilon_1}(y) \subset B_{r_1}(x_1)$ und $y \in B_{\epsilon_2}(y) \subset B_{r_2}(x_2)$, so liegt $B_{\min(\epsilon_1, \epsilon_2)}(y)$ in beiden Kugeln, also in ihrem Schnitt. $\square$

In Worten zusammengefasst: Egal wie kompliziert und „verbeult“ eine offene Menge U aussieht – steckst du den Finger an irgendeine Stelle $y \in U$, findest du dort immer noch ein kleines rundes Kugel-Fenster $B_\epsilon(y)$, das komplett in U liegt. Offene Mengen sind also, ganz gleich wie wild sie im Großen aussehen, „im Kleinen“ immer aus lauter runden Kugeln zusammengesetzt – wie ein Mosaik aus lauter kleinen, sich überlappenden Kreisscheiben.

Bemerkung 5.5 (Erstabzählbarkeit).

Ein topologischer Raum heißt **erstabzählbar**, wenn jeder Punkt x eine *abzählbare* Familie von Umgebungen $\{U_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ besitzt, sodass jede Umgebung von x eine der $U_n(x)$ enthält. Nach Satz 5.4 erfüllt die abzählbare Familie $\{B_{1/n}(x) \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ diese Eigenschaft – *jeder metrische Raum ist erstabzählbar*. Diese Bemerkung ist ein technisches Detail, das man beim ersten Lesen getrost überspringen kann: In Worten steckt dahinter nur, dass es reicht, sich um immer kleinere Kugeln mit Radius $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ zu kümmern, um *jede* noch so kleine Umgebung eines Punktes irgendwann zu erfassen – man braucht keine überabzählbar große Sammlung von Testkugeln, eine simple durchnummerierte Liste reicht völlig aus. $\triangle$

Satz 5.6 (Die Standardtopologie ist Hausdorffsch).

Die Standardtopologie eines metrischen Raums (und allgemeiner jede metrisierbare Topologie) ist Hausdorffsch.

ORIGINAL: THEOREM 3.3

Beweis. Für $x \neq y$ gilt $d(x, y) > 0$. Die Kugeln $B_{d(x,y)/3}(x)$ und $B_{d(x,y)/3}(y)$ sind disjunkt: Gäbe es z in beiden, so wäre $d(z, x), d(z, y) < d(x, y)/3$, und die Dreiecksungleichung lieferte $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{2}{3}d(x, y)$, ein Widerspruch. $\square$

In Worten: Der Trick ist ganz mechanisch – man nimmt einfach ein Drittel des Abstands zwischen x und y als Radius für zwei kleine, um x bzw. y zentrierte Blasen. Diese Blasen können sich unmöglich überlappen, denn läge ein Punkt z in beiden, wäre er nach der Dreiecksungleichung gleichzeitig zu nah an x und zu nah an y , um noch den vollen Abstand zwischen x und y zu erklären – ein klassischer Widerspruchsbeweis. Das bestätigt noch

einmal die Bemerkung von vorhin: In jedem metrischen Raum, insbesondere in $\mathbb{R}^D$, lassen sich verschiedene Punkte immer sauber „trennen“.

Bemerkung 5.7 (nicht jede Topologie ist metrisierbar).

Ein Beispiel für eine *nicht*-metrisierbare Topologie ist die **Sorgenfrey-Gerade**: die Topologie auf $\mathbb{R}$, die von der Basis aller halboffenen Intervalle $[a, b)$ erzeugt wird. Diese Bemerkung ist reine Randnotiz und kann beim ersten Lesen ruhig übersprungen werden – sie sagt nur, dass es (etwas exotische) Topologien gibt, die *nicht* von irgendeiner Abstandsfunktion erzeugt werden können; für alle Räume, die uns in diesem Skript begegnen, wie $\mathbb{R}^D$ und $\mathbb{C}$, ist das aber kein Thema. $\triangle$

Beispiel 5.8 (Metriken – einfach bis abstrakt).

- (i) Ganz einfach: Der Abstand zwischen zwei Punkten im dreidimensionalen Raum, den wir aus der Schule kennen, macht $\mathbb{R}^3$ zu einem metrischen Raum – Details dazu in § 5.1.
- (ii) Physik: In der Statistik verwendet man oft die **Betragsdifferenz** als Metrik auf Messwerten: $d(x, y) = |x - y|$ auf $\mathbb{R}$ misst, wie weit zwei Messergebnisse auseinanderliegen.
- (iii) Abstrakter: $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ macht auch $\mathbb{C}$ zu einem metrischen Raum, mit derselben Struktur wie $\mathbb{R}^2$ (vgl. Bemerkung 5.14). $\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 5

Übung 5.9 (*Exercise 3.2 im Original*). Zeigen Sie, dass $d(x, y) = |x - y|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist, und dass $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ eine Metrik auf $\mathbb{C}$ ist.

Übung 5.10. Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Kugel $\overline{B_r(x)}$ tatsächlich abgeschlossen ist.

Übung 5.11 (*etwas schwerer*). Zeigen Sie: In jedem metrischen Raum ist $\{x\}$ für jeden Punkt x eine abgeschlossene Menge.

§ 5.1 DER METRISCHE RAUM $\mathbb{R}^D$

Ab jetzt (und in allen folgenden Kapiteln, sofern nichts anderes gesagt wird) verstehen wir $\mathbb{R}^D = \{(x^1, \dots, x^D) \mid x^\mu \in \mathbb{R}\}$ mit der Standardtopologie bezüglich der euklidischen Metrik, die wir jetzt einführen. Wir schreiben $0 = (0, \dots, 0)$ für den Ursprung. (Stolperfalle: das x^1, x^D, x^μ sind Indices und keine Exponenten)

Definition 5.12 (p -Normen auf $\mathbb{R}^D$).

Für $p \in [1, \infty)$ und $x, y \in \mathbb{R}^D$ definiert man

ORIGINAL: TEXT NACH
THEOREM 3.3

$$d_p(x, y) := \|x - y\|_p := \left(\sum_{\mu=1}^D |x^\mu - y^\mu|^p \right)^{1/p}, \quad d_\infty(x, y) := \|x - y\|_\infty := \max_{\mu=1, \dots, D} |x^\mu - y^\mu|.$$

Für $D = 1$ stimmen alle diese Abstände mit dem gewöhnlichen Betrag $|x - y|$ überein. $\triangle$

Keine Sorge, wenn diese drei Formeln auf den ersten Blick beliebig aussehen – dahinter stecken drei ganz unterschiedliche, aber alle völlig plausible Arten, „Entfernung“ in mehreren Dimensionen zu messen, und jede hat ein eigenes Alltagsbild:

- d_1 (die **Manhattan-Norm** oder Taxifahrer-Norm) addiert einfach die Abweichungen in jeder einzelnen Koordinatenrichtung. Stell dir eine Stadt mit einem schachbrettartigen Straßennetz vor (daher der Name): Ein Taxi kann nicht diagonal durch die Häuserblocks fahren, sondern muss erst so viele Blocks nach Osten und dann so viele nach Norden fahren – die gefahrene Gesamtstrecke ist genau d_1 .
- d_2 ist der ganz gewöhnliche „Luftlinienabstand“, den man aus der Schule als Satz des Pythagoras kennt – die direkte, diagonale Strecke „als Vogel fliegt“, ohne Rücksicht auf Straßen.
- d_∞ schließlich schaut sich *nur* die größte einzelne Koordinatenabweichung an und ignoriert alle anderen. Stell dir eine Klassenarbeit mit mehreren Teilaufgaben vor: d_∞ interessiert sich nur dafür, in welcher *einzelnen* Teilaufgabe zwei Schüler am weitesten auseinanderliegen, egal wie ähnlich sie sich in allen anderen Teilaufgaben sind.

Alle drei sind, wie das folgende Lemma zeigt, für die Frage „was ist offen?“ letztlich gleichwertig – nur die konkreten Zahlenwerte unterscheiden sich.

Lemma 5.13 (Äquivalenz der p -Normen).

Für alle $p, q \geq 1$ gibt es Konstanten $c_{pq}, C_{pq} > 0$ mit $c_{pq} d_p(x, y) \leq d_q(x, y) \leq C_{pq} d_p(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^D$. ORIGINAL: LEMMA 3.1

Beweis. Es genügt, jedes d_p mit d_∞ zu vergleichen. Es gilt

$$\max_{\mu} |x^\mu - y^\mu| \leq \left(\sum_{\mu=1}^D |x^\mu - y^\mu|^p \right)^{1/p} \leq D^{1/p} \max_{\mu} |x^\mu - y^\mu|,$$

da die Summe mindestens den größten Summanden enthält, aber höchstens D -mal den größten Summanden. $\square$

In Worten: Egal welches der drei „Lineale“ d_1, d_2, d_∞ (oder irgendein d_p dazwischen) du benutzt, um Abstände zu messen – die Zahlenwerte, die dabei herauskommen, unterscheiden sich zwar (das Taxifahrer-Lineal liefert meist größere Werte als das Luftlinien-Lineal), aber sie unterscheiden sich immer nur um einen *festen Faktor*, der von D, p und q abhängt, aber

nicht von x und y selbst. Zwei Punkte, die laut d_1 „nah“ sind, sind also automatisch auch laut d_2 und d_∞ „nah“ – nur eben mit einer etwas anderen Zahl davor.

Bemerkung 5.14.

Nach Lemma 5.13 liefern alle d_p dieselbe Standardtopologie auf $\mathbb{R}^D$: eine Menge ist bezüglich eines d_p genau dann offen, wenn sie es bezüglich jedes anderen ist. Üblicherweise wählt man daher die euklidische Norm d_2 , kurz $d(x, y) = \|x - y\|$. Topologisch ist $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ dasselbe wie $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ mit der komplexen Betragsmetrik – kein Zufall, denn $\mathbb{C}$ ist als Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (Konstruktion 3.43). In Worten: $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ sind, was Nähe und Offenheit angeht, ein und dasselbe Objekt in zwei verschiedenen Verkleidungen – ein Punkt der komplexen Ebene und ein Punkt der reellen Zahlenebene „wohnen“ an genau derselben Stelle, nur die Rechenoperationen (Addition, Multiplikation) sind bei $\mathbb{C}$ zusätzlich definiert. $\triangle$

Beispiel 5.15 (p -Normen in der Physik).

- (i) Ganz einfach: Für $x = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\|x\|_1 = 7$, $\|x\|_2 = 5$ (der gewohnte euklidische Abstand vom Ursprung) und $\|x\|_\infty = 4$.
- (ii) Physik: Bei der Fehleranalyse einer Messreihe $(x^1, \dots, x^D)$ misst $\|x\|_1$ die Summe der Beträge aller Abweichungen, $\|x\|_2$ die „gesamte“ (quadratisch gemittelte) Abweichung, und $\|x\|_\infty$ die *größte einzelne* Abweichung – je nachdem, was man kontrollieren will, ist eine andere Norm die relevante.
- (iii) Abstrakter: Der Fall $p = q = 2$ von Hölders Ungleichung (Satz 5.17) unten ist die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, ein zentrales Werkzeug u. a. für die Heisenbergsche Unschärferelation in der Quantenmechanik.

$\triangle$

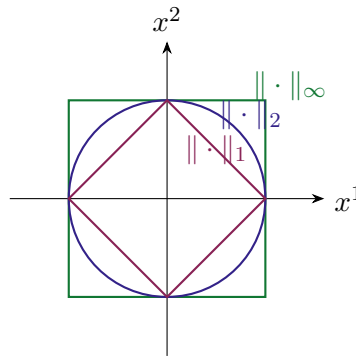


Abbildung 2.4: Die Einheitskugeln $\{x \mid \|x\|_p \leq 1\}$ für $p = 1, 2, \infty$ in $\mathbb{R}^2$: ineinander geschachtelt, aber nach Lemma 5.13 liefern alle dieselbe Standardtopologie.

Satz 5.16 ($\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, topologisch).

In der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

ORIGINAL: THEOREM 3.4

Beweis. Die Kugeln in der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ sind die offenen Intervalle $B_\epsilon(x) = (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt nach Satz 3.35 $\mathbb{Q} \cap ((x - \epsilon, x) \cup (x, x + \epsilon)) \neq \emptyset$ für jedes $\epsilon > 0$, also ist x ein Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$ (oder $x \in \mathbb{Q}$ selbst). Nach Definition 4.21 folgt $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. $\square$

In Worten: Dieser Satz ist die topologische Version dessen, was wir im Zahlen-Kapitel bereits als „ $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$ “ kennengelernt haben (Satz 3.35) – egal wie klein du das Kugel-Fenster $B_\epsilon(x)$ um eine beliebige reelle Zahl x machst, es sitzt garantiert mindestens ein Bruch darin. Rationale Zahlen liegen also nicht nur „irgendwie überall verteilt“, sondern im präzisen topologischen Sinn beliebig dicht gepackt – der Abschluss von $\mathbb{Q}$ ist bereits ganz $\mathbb{R}$, es fehlt kein einziger Punkt.

Die nächsten beiden Aussagen (Höldersche und Minkowski-Ungleichung) sind handfeste Rechenwerkzeuge, die vor allem später gebraucht werden – wer sie beim ersten Lesen nur überfliegt und sich die Kernaussage merkt („es gibt eine Dreiecksungleichung auch für $\|\cdot\|_p$, für jedes p “), verpasst nichts Wesentliches.

Satz 5.17 (Höldersche Ungleichung).

Es seien $p, q \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $a_1, \dots, a_D, b_1, \dots, b_D \geq 0$:

ORIGINAL: EXERCISE 3.4

$$\sum_{\mu=1}^D a_\mu b_\mu \leq \left(\sum_{\mu=1}^D a_\mu^p \right)^{1/p} \left(\sum_{\mu=1}^D b_\mu^q \right)^{1/q}.$$

Beweisskizze. Der Kern des Arguments ist die **Youngsche Ungleichung** $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ für $x, y > 0$ (sie folgt aus der Konkavität des Logarithmus, angewendet auf $\ln(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q) = \ln(xy)$). Setzt man

$$x_\mu = \frac{a_\mu}{(\sum_\nu a_\nu^p)^{1/p}}, \quad y_\mu = \frac{b_\mu}{(\sum_\nu b_\nu^q)^{1/q}}$$

in die Youngsche Ungleichung ein und summiert über μ , ergibt sich die Behauptung nach Kürzen. $\square$

Korollar 5.18 (Minkowski-Ungleichung – d_p ist wirklich eine Metrik).

Für $p \geq 1$ gilt $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$; insbesondere erfüllt d_p die Dreiecksungleichung und ist damit tatsächlich eine Metrik auf $\mathbb{R}^D$.

Beweisskizze. Mit der Hölderschen Ungleichung (angewendet auf die Exponenten p und $q = \frac{p}{p-1}$) schätzt man

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{\mu} |x_\mu + y_\mu|^p \leq \sum_{\mu} (|x_\mu| + |y_\mu|) |x_\mu + y_\mu|^{p-1} \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p-1}$$

ab und teilt beide Seiten durch $\|x + y\|_p^{p-1}$. $\square$

In Worten: Die Minkowski-Ungleichung ist genau die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p$, verallgemeinert von der euklidischen Norm auf jede der p -Normen – sie garantiert, dass „ein Umweg über einen dritten Punkt nie kürzer ist“, egal welches der drei Lineale von oben man gerade benutzt. Das ist genau die Eigenschaft, die d_p erst offiziell zu einer richtigen Metrik im Sinne von Definition 5.1 macht.

Bemerkung 5.19 (Exkurs: die Riemannsche Zahlenkugel).

Zu jedem topologischen Raum X kann man einen einzigen Punkt „im Unendlichen“ hinzufügen und erhält die **Alexandroff-Kompaktifizierung** $X^* = X \cup \{\infty\}$, in der die Umgebungen von ∞ genau die Komplemente kompakter Mengen sind. Für $X = \mathbb{R}$ liefert das einen Kreis: $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist homöomorph zu S^1 (via stereographischer Projektion). Für $X = \mathbb{C}$ liefert dieselbe Konstruktion die **Riemannsche Zahlenkugel** $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$ – ein Bild, das in der Funktionentheorie und z. B. bei der Beschreibung von Polstellen ganz natürlich auftaucht, und das der Bloch-Kugel aus der Quanteninformation zum Verwechseln ähnlich sieht. Wie das Wort „Exkurs“ schon andeutet, ist dieser ganze Absatz ein freiwilliger Ausflug und für den weiteren Verlauf des Skripts nicht notwendig – wer mag, kann sich einfach vorstellen, dass man die Zahlengerade $\mathbb{R}$ an ihren beiden „Enden“ bei $+\infty$ und $-\infty$ zu einer einzigen Schlaufe zusammenbindet und dadurch einen Kreis erhält; dieselbe Idee, nur eine Dimension höher, verwandelt die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ in die Oberfläche einer Kugel. $\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 5.1

Übung 5.20. Berechnen Sie $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ und $\|x\|_\infty$ für $x = (1, -2, 2) \in \mathbb{R}^3$.

Übung 5.21. Geben Sie ein Beispiel für eine in $\mathbb{R}$ offene, dichte Teilmenge an, die nicht ganz $\mathbb{R}$ ist.

Übung 5.22 (etwas schwerer). Zeigen Sie mithilfe von Lemma 5.13 explizit die Konstanten $c_{1\infty}$ und $C_{1\infty}$ für $D = 2$.

Übung 5.23 (schwerer). Zeigen Sie, dass die Höldersche Ungleichung für $p = q = 2$ genau die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\sum_\mu a_\mu b_\mu \leq \|a\|_2 \|b\|_2$ ist.

3 Folgen

Fast jede numerische Methode der Physik – vom Newton-Verfahren über selbstkonsistente Feldberechnungen bis zur Zeitdiskretisierung einer Bewegungsgleichung – erzeugt eine **Folge** von Näherungen, die (hoffentlich) gegen die gesuchte Lösung konvergiert. Auch die reellen Zahlen selbst lassen sich, wie wir in Bemerkung 6.17 sehen werden, als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen verstehen. Dieses Kapitel entspricht Kapitel 4 (*Sequences*) des Originalskripts. Wir betrachten Folgen zunächst in allgemeinen metrischen Räumen – das ist wichtiger, als es zunächst scheint: schon in der Quantenmechanik sind Zustände Elemente eines metrischen Raums von Funktionen, keine gewöhnlichen Zahlen.

ORIGINAL: KAPITEL 4

Bevor es losgeht, ganz elementar: Eine **Folge** ist im Grunde nichts weiter als eine durchnummerierte, niemals endende Liste – so wie ein Tagebuch, in das du jeden Tag (Tag 0, Tag 1, Tag 2, ...) genau einen neuen Wert einträgst, zum Beispiel die Temperatur um 12 Uhr mittags. Manche solcher Listen „pendeln sich“ mit der Zeit auf einen ganz bestimmten Wert ein (die Temperatur nähert sich im Laufe eines Jahres nicht wirklich einem festen Wert, aber die Amplitude eines ausschlagenden Pendels schon), andere tun das nicht (denk an die Tagedemperaturen über mehrere Jahre, die immer wieder hoch und runter gehen). Genau dieses „sich auf einen Wert einpendeln“ wird im Folgenden als **Konvergenz** präzise gefasst – eines der wichtigsten Werkzeuge der gesamten Analysis.

§ 6 FOLGEN IN METRISCHEN RÄUMEN

Definition 6.1 (Folge, Teilfolge).

Eine **Folge** in einem metrischen Raum (X, d) ist eine Funktion $x: \mathbb{N} \rightarrow X$; man schreibt $x_n := x(n)$ und identifiziert die Folge mit ihrem Bild $(x_0, x_1, x_2, \dots) \equiv (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, kurz (x_n) . Eine **Teilfolge** entsteht durch Weglassen von Termen, ohne die Reihenfolge zu ändern: $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ (insbesondere $n_k \geq k$). $\triangle$

ORIGINAL: DEFINITION 4.1

In einfachen Worten: Eine **Folge** ist die durchnummerierte Liste von eben, $x_0, x_1, x_2, \dots$ – der Index n ist einfach die laufende Nummer des Eintrags. Eine **Teilfolge** entsteht, indem du dir aus dieser Liste eine *Auswahl* von Einträgen herausuchst, ohne sie umzusortieren – du darfst beliebig viele Einträge überspringen („ich nehme nur jeden zehnten Tag“, oder auch ganz unregelmäßig), aber die Reihenfolge, in der die ausgewählten Einträge ursprünglich in der Liste standen, muss erhalten bleiben.

Definition 6.2 (Konvergenz).

Eine Folge (x_n) in (X, d) **konvergiert** gegen x , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ gibt mit

ORIGINAL: DEFINITION 4.2

$n > N_\epsilon \Rightarrow d(x, x_n) < \epsilon$ – äquivalent: jede Kugel $B_\epsilon(x)$ enthält alle Folgenglieder ab einem gewissen Index. Man schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ oder $x_n \rightarrow x$, und x heißt der **Grenzwert** (Limes) der Folge. $\triangle$

Diese berühmt-berüchtigte „ ϵ - N “-Definition ist für die allermeisten Studienanfänger die erste echte Hürde der Analysis – keine Sorge, wenn sie beim ersten Lesen sperrig wirkt, das geht wirklich fast jedem so, und mit etwas Übung wird sie zu einem vertrauten Werkzeug. In einfachen Worten übersetzt: Egal wie *winzig* du eine Zielgenauigkeit ϵ vorgibst („ich will, dass der Abstand zum Grenzwert kleiner als ein Millionstel ist“), gibt es *immer* einen Zeitpunkt N_ϵ in der Liste, ab dem *alle* nachfolgenden Folgenglieder diese Zielgenauigkeit tatsächlich einhalten – die Folge kommt dem Grenzwert also nicht nur zwischendurch mal nahe, sondern bleibt ab einem bestimmten Punkt für immer beliebig nah dran. Ein Bild dafür: Ein Bogenschütze, der mit jedem Pfeil näher an die Zielscheibenmitte trifft und irgendwann (je nachdem, wie nah man es verlangt) dauerhaft im gewünschten Zielbereich landet, „konvergiert“ gegen die Mitte.

Beispiel 6.3 (Folgen – einfach bis abstrakt).

- (i) Ganz einfach: $x_n = 1/n$ konvergiert gegen 0 in $\mathbb{R}$.
- (ii) Physik: Die Amplitude eines gedämpften Oszillators nach n vollen Perioden ist $a_n = a_0 q^n$ mit $0 < q < 1$ (dem Dämpfungsfaktor pro Periode); die Folge (a_n) konvergiert gegen 0 – das System kommt zur Ruhe.
- (iii) Abstrakter: Die durch $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ rekursiv definierte Folge rationaler Zahlen (das **Heron-Verfahren**) konvergiert in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$ – aber, wie wir in § 6.1 sehen, *nicht* innerhalb von $\mathbb{Q}$.

$\triangle$

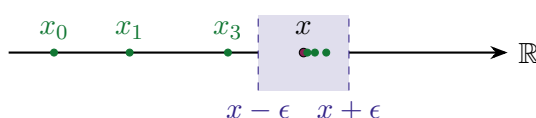


Abbildung 3.1: Konvergenz $x_n \rightarrow x$ (Definition 6.2): ab einem Index N_ϵ liegen *alle* Folgenglieder in der ϵ -Umgebung $(x - \epsilon, x + \epsilon)$.

Lemma 6.4 (Teilfolgenkriterium).

Eine Folge in (X, d) konvergiert genau dann, wenn all ihre Teilfolgen konvergieren; eine konvergente Folge und alle ihre Teilfolgen haben denselben Grenzwert.

Beweis. Da jede Folge eine Teilfolge von sich selbst ist, ist eine Richtung trivial. Für die andere: konvergiert (x_n) gegen x , so gibt es zu jedem ϵ ein N_ϵ mit $d(x_k, x) < \epsilon$ für $k > N_\epsilon$. Da für jede Teilfolge $n_k \geq k$ gilt, folgt auch $d(x_{n_k}, x) < \epsilon$ für $k > N_\epsilon$. $\square$

In Worten: Wenn sich die ganze Liste auf einen Wert einpendelt, dann pendelt sich natürlich auch jede beliebige Auswahl aus dieser Liste auf denselben Wert ein – das ist die eine (triviale) Richtung. Interessanter, aber ebenso einleuchtend, ist die andere: Pendeln sich *alle* möglichen Teilauswahlen auf einen Wert ein, dann kann auch die ganze Liste nicht „ausscheren“, denn sie ist ja insbesondere ihre eigene Teilfolge.

Satz 6.5 (Häufungspunkte sind Grenzwerte von Folgen).

Ein Punkt x ist genau dann Häufungspunkt einer Teilmenge Y eines metrischen Raums (X, d) (Definition 4.20), wenn es eine Folge (y_n) mit $y_n \in Y$, $y_n \neq x$ und $\lim y_n = x$ gibt.

ORIGINAL: THEOREM 4.1

Beweis. Gilt $\lim y_n = x$, so enthält jede Kugel $B_\epsilon(x)$ alle y_n mit $n > N_\epsilon$, die in Y liegen und von x verschieden sind – also ist x Häufungspunkt. Für die Umkehrung betrachten wir die Kugeln vom Radius $1/n$ um x : da x Häufungspunkt ist, gilt $B_{1/n}(x) \cap Y \setminus \{x\} \neq \emptyset$ für jedes n . Mit dem **Auswahlaxiom** (Axiom 2.21!) wählen wir aus jeder dieser Mengen ein Element y_n ; nach der archimedischen Eigenschaft (Satz 3.34) gilt dann $y_n \rightarrow x$. $\square$

In Worten: Erinnerst du dich an das Bild des Häufungspunkts aus dem Topologie-Kapitel – eine Stelle, um die sich eine Menge beliebig eng zusammendrängt, wie Regentropfen entlang einer Dachrinne (§ 4.2)? Dieser Satz sagt genau, dass man dieses „Zusammendrängen“ immer als eine konkrete Folge von Punkten *einfangen* kann, die tatsächlich gegen den Häufungspunkt läuft – die etwas verschwommene topologische Vorstellung und die handfeste Folgen-Vorstellung beschreiben also exakt dasselbe Phänomen.

Definition 6.6 (folgenstetig).

Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **folgenstetig**, wenn für jede Folge $x_n \rightarrow x$ auch $f(x_n) \rightarrow f(x)$ gilt.

 $\triangle$

ORIGINAL: TEXT VOR THEOREM 4.2

In einfachen Worten: f ist folgenstetig, wenn sie „konvergente Listen in konvergente Listen verwandelt“ – pendelt sich die Eingabe-Folge auf einen Wert x ein, muss sich auch die Ausgabe-Folge $f(x_n)$ auf den entsprechenden Wert $f(x)$ einpendeln, ohne unerwartete Sprünge oder Aussetzer.

Satz 6.7 (in metrischen Räumen: stetig $\Leftrightarrow$ folgenstetig).

Für X, Y metrische Räume ist $f: X \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn sie folgenstetig ist.

ORIGINAL: THEOREM 4.2

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Sei f stetig und $\epsilon > 0$. Da $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ offen ist und x enthält, gibt es δ mit $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$. Für $x_n \rightarrow x$ gibt es N mit $x_n \in B_\delta(x)$ für $n > N$, also $f(x_n) \in B_\epsilon(f(x))$ für $n > N$, das heißt $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

„ $\Leftarrow$ “: Sei f folgenstetig, aber *nicht* stetig in x . Dann gibt es eine offene Umgebung V von $f(x)$, sodass $f^{-1}(V)$ keine Umgebung von x ist; also trifft jede Kugel $B_{1/n}(x)$ das Komplement $X \setminus f^{-1}(V)$. Wählt man $x_n \in B_{1/n}(x) \setminus f^{-1}(V)$, so gilt $x_n \rightarrow x$, aber $f(x_n) \notin V$ für alle n , also $f(x_n) \not\rightarrow f(x)$ – ein Widerspruch zur Folgenstetigkeit. $\square$

In Worten zusammengefasst: Dieser Satz ist eine gute Nachricht, denn er sagt, dass wir uns in metrischen Räumen (also praktisch überall in diesem Skript) nie entscheiden müssen, welche der beiden Definitionen von „stetig“ wir benutzen wollen – die abstrakte, offene-Mengen-basierte Definition 4.7 und die konkretere, folgenbasierte Definition von eben, sind einfach zwei verschiedene Beschreibungen *desselben* Sachverhalts. In der Praxis rechnet man mit Stetigkeit meistens über Folgen („läuft x_n gegen x , muss auch $f(x_n)$ gegen $f(x)$ laufen“), weil das oft handfester ist als das abstrakte Offene-Mengen-Argument.

Satz 6.8 (jede Abstandsfunktion ist stetig).

ORIGINAL: THEOREM 4.3

Für einen festen Punkt z ist die Funktion $x \mapsto d(x, z)$ stetig.

Beweis. Aus der Dreiecksungleichung folgt $d(x_n, z) \leq d(x_n, x) + d(x, z)$ und ebenso mit vertauschten Rollen, also $|d(x_n, z) - d(x, z)| \leq d(x_n, x)$. Für $x_n \rightarrow x$ geht die rechte Seite gegen 0, also $d(x_n, z) \rightarrow d(x, z)$. $\square$

In Worten: Anschaulich ist das keine Überraschung – bewegst du dich nur ein kleines Stück, ändert sich auch dein Abstand zu einem fest gewählten Punkt z nur um höchstens dasselbe kleine Stück (das ist genau, was die Dreiecksungleichung im Beweis ausdrückt). Der Abstand „springt“ also nie plötzlich, wenn man sich nur ein bisschen bewegt.

ÜBUNGEN ZU § 6

Übung 6.9. Konvergiert die Folge $x_n = (-1)^n$ in $\mathbb{R}$? Konvergiert eine ihrer Teilfolgen?

Übung 6.10. Zeigen Sie mithilfe von Satz 6.5, dass 0 ein Häufungspunkt von $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ ist.

Übung 6.11 (etwas schwerer). Zeigen Sie direkt aus Definition 6.2 (ohne Sätze zu zitieren), dass der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig ist.

§ 6.1 CAUCHY-FOLGEN

Definition 6.12 (Cauchy-Folge).

ORIGINAL: DEFINITION 4.3

Eine Folge (x_n) in (X, d) heißt **Cauchy-Folge**, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein N_ϵ gibt mit $m, n > N_\epsilon \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$ – die Folgenglieder rücken also beliebig nah zusammen, ohne dass wir schon wissen, wogegen sie konvergieren. $\triangle$

Ein Bild, das den feinen aber entscheidenden Unterschied zur gewöhnlichen Konvergenz greifbar macht: Stell dir eine Wanderung im dichten Nebel vor, bei der du dein Ziel nicht sehen kannst. Eine **Cauchy-Folge** ist wie eine Wanderung, bei der deine Schritte immer kleiner werden und du dich (verglichen mit jedem *früheren* Punkt deines Weges) immer weniger vom Fleck bewegst – du merkst also, dass sich „irgendetwas einpendelt“, *ohne* zu wissen, ob es tatsächlich ein Ziel im begehbaren Gelände gibt, das du erreichst, oder ob du z. B. auf einen unsichtbaren Abgrund zuläufst, der in deiner Karte gar nicht eingezeichnet ist (mehr dazu gleich bei $\mathbb{Q}$). Konvergenz (Definition 6.2) dagegen verlangt, dass es dieses Ziel

im Raum, in dem man sich bewegt, bereits gibt und du dich ihm nachweislich näherst.

Bemerkung 6.13.

Jede konvergente Folge ist Cauchy (Dreiecksungleichung: $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n)$). Die *Umkehrung gilt nicht*: Das Heron-Verfahren $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ aus dem einführenden Beispiel ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ (aufeinanderfolgende Glieder rücken beliebig nah zusammen), konvergiert aber *nicht* in $\mathbb{Q}$, da der einzig mögliche Grenzwert $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ist. In Worten, um beim Nebel-Bild zu bleiben: Die Folge „weiß“ gewissermaßen genau, wo sie hin will ($\sqrt{2}$), aber dieser Zielpunkt fehlt in der Landkarte $\mathbb{Q}$ – genau dieses „Loch“ ist der Grund, warum man überhaupt die reellen Zahlen braucht (vgl. Konstruktion 3.30 der Dedekind-Schnitte). $\triangle$

Lemma 6.14 (Konvergenzkriterium für Cauchy-Folgen).

Eine Cauchy-Folge in (X, d) konvergiert genau dann, wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt.

ORIGINAL: LEMMA 4.2

Beweis. Eine Richtung ist trivial. Sei (x_n) Cauchy mit konvergenter Teilfolge $x_{n_k} \rightarrow x$. Zu $\epsilon > 0$ wähle N_ϵ mit $d(x_k, x_l) < \epsilon/2$ für $k, l > N_\epsilon$ und $d(x_{n_k}, x) < \epsilon/2$ für $k > N_\epsilon$. Da $n_k \geq k$, folgt $d(x_k, x) \leq d(x_k, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \epsilon$ für $k > N_\epsilon$. $\square$

In Worten: Auch wenn eine ganze Cauchy-Folge (der Wanderer im Nebel) selbst noch nicht weiß, ob und wohin sie konvergiert, reicht es völlig aus, wenn *irgendeine* Teilauswahl ihrer Schritte nachweislich irgendwo ankommt – dann zieht der Rest der Folge zwangsläufig mit, weil aufeinanderfolgende Glieder ja ohnehin schon beliebig nah zusammenrücken.

Satz 6.15 (in metrischen Räumen: kompakt $\Leftrightarrow$ folgenkompakt).

Eine Menge K heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge in K eine in K konvergente Teilfolge besitzt. In einem metrischen Raum ist K genau dann kompakt, wenn K folgenkompakt ist.

ORIGINAL: THEOREM 4.4

Beweisskizze. „folgenkompakt $\Rightarrow$ kompakt“: Man zeigt zunächst, dass es zu jeder offenen Überdeckung $\{U_\alpha\}$ ein von x unabhängiges $\delta > 0$ gibt, sodass jede Kugel $B_\delta(x)$, $x \in K$, ganz in einem U_α liegt (die **Lebesgue-Zahl** der Überdeckung) – gäbe es kein solches δ , ließe sich eine Folge konstruieren, deren konvergente Teilfolge einen Widerspruch liefert. Anschließend zeigt man, dass K von endlich vielen Kugeln vom Radius δ überdeckt wird (sonst ließe sich eine Folge ohne Cauchy-Teilfolge konstruieren) – zusammen liefert das eine endliche Teilüberdeckung durch U_α 's.

„kompakt $\Rightarrow$ folgenkompakt“: Sei (x_p) eine Folge paarweise verschiedener Punkte in K . Hätte jeder Punkt $y \in K$ eine Umgebung, die nur endlich viele Folgenglieder enthält, so lieferte die Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung, die dennoch nur endlich viele x_p enthalten könnte – ein Widerspruch, da die Folge unendlich viele (verschiedene) Glieder hat. Es gibt also $y \in K$, sodass jede Kugel um y unendlich viele Folgenglieder enthält; daraus konstruiert man induktiv eine gegen y konvergente Teilfolge. $\square$

Dieser Satz gehört zu den technisch anspruchsvolleren in diesem Kapitel – die Kernaussage in Worten ist aber gut zu merken: In einem metrischen Raum kann man Kompaktheit (die Decken-Überdeckungs-Eigenschaft aus § 4.1) komplett durch eine handfestere Eigenschaft von *Folgen* ersetzen. Anschaulich: In einer kompakten Menge kann man unendlich viele Punkte nicht beliebig „verstreuen“, ohne dass sich zumindest eine Teilauswahl davon irgendwo im Inneren der Menge zusammendrängt (ein bisschen wie das Schubfachprinzip: unendlich viele Tauben in endlich vielen Schubladen – irgendwo müssen sich welche stapeln).

Definition 6.16 (Cauchy-vollständig).

Ein metrischer Raum, in dem *jede* Cauchy-Folge konvergiert, heißt **vollständig** (Cauchy-vollständig). $\triangle$

ORIGINAL: DEFINITION
4.4

In einfachen Worten: Ein Raum ist **vollständig**, wenn er „keine Löcher“ hat – jeder Wanderer im Nebel (jede Cauchy-Folge), der sich erkennbar auf ein Ziel zubewegt, findet dieses Ziel auch tatsächlich *im Raum selbst* vor, statt an einer unsichtbaren Lücke in der Landkarte hängen zu bleiben. $\mathbb{R}$ ist in diesem Sinn „lückenlos“, $\mathbb{Q}$ dagegen voller solcher unsichtbaren Löcher (an genau den Stellen, wo irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$ sitzen sollten).

Bemerkung 6.17.

$\mathbb{Q}$ ist *nicht* vollständig (Heron-Verfahren, s. o.); $\mathbb{R}$ dagegen schon – das zeigen wir in einem späteren Abschnitt („ $\mathbb{R}^D$ ist Cauchy-vollständig“). Ausgehend von einem unvollständigen Raum kann man stets seine **Vervollständigung** bilden, indem man die Grenzwerte aller Cauchy-Folgen formal hinzufügt – wendet man das auf $\mathbb{Q}$ an, erhält man eine *alternative Konstruktion* von $\mathbb{R}$, gleichwertig zu den Dedekind-Schnitten aus Konstruktion 3.30. In Worten: Man „stopft“ jedes Loch in $\mathbb{Q}$ nachträglich, indem man ihm einfach den fehlenden Grenzwert als neuen Punkt hinzufügt – macht man das für *alle* Löcher gleichzeitig (also für jede Cauchy-Folge, die in $\mathbb{Q}$ noch kein Ziel findet), landet man am Ende genau bei $\mathbb{R}$. $\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 6.1

Übung 6.18. Ist jede Cauchy-Folge beschränkt? Begründen Sie kurz.

Übung 6.19. Ist die Folge $x_n = n$ in $\mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge?

Übung 6.20 (etwas schwerer). Zeigen Sie: Besitzt eine Cauchy-Folge eine konstante Teilfolge (also $x_{n_k} = c$ für alle k), so konvergiert die ganze Folge gegen c .

§ 6.2 DER BANACHSCHE FIXPUNKTSATZ

Definition 6.21 (kontrahierende Abbildung).

Eine Abbildung $T: X \rightarrow X$ heißt **kontrahierend** (eine **Kontraktion**), wenn es $q \in [0, 1)$ gibt mit $d(T(x), T(y)) \leq q d(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Die Konstante q heißt **Lipschitz-Konstante** von T . $\triangle$

ORIGINAL: TEXT VOR
THEOREM 4.5

In einfachen Worten: Eine **Kontraktion** ist eine Vorschrift T , die je zwei Punkte x, y garantiert *näher zueinander* bringt, wenn man sie beide durch T schickt – und zwar um mindestens den festen Faktor $q < 1$. Ein anschauliches Bild: ein Fotokopierer, der jedes Bild, das man hineinlegt, automatisch um denselben Faktor verkleinert. Kopiert man ein Bild von einer Landkarte, auf der die Landkarte selbst abgebildet ist, immer wieder (verkleinert es also immer weiter), rücken zwei beliebige Punkte auf der Karte bei jeder Kopie näher zusammen – irgendwann, so die Intuition, muss sich das Ganze auf einen einzigen „Fixpunkt“ zusammenziehen, den die Verkleinerung nicht mehr verändert. Genau das behauptet der folgende, berühmte Satz.

Satz 6.22 (Banachscher Fixpunktsatz).

Es sei T eine Kontraktion auf einem nichtleeren, vollständigen metrischen Raum X . Dann besitzt T genau einen **Fixpunkt** x^* , das heißt $T(x^*) = x^*$. Für jeden Startwert x_0 konvergiert die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} = T(x_n)$ gegen x^* , mit der Fehlerabschätzung

ORIGINAL: THEOREM 4.5

$$d(x^*, x_n) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(x_1, x_0).$$

Beweis. Aus der Kontraktionseigenschaft folgt induktiv $d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0)$. Für $p \geq 1$ liefert die Dreiecksungleichung

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \sum_{i=0}^{p-1} d(x_{n+1+i}, x_{n+i}) \leq \sum_{i=0}^{p-1} q^{n+i} d(x_1, x_0) = \frac{1 - q^p}{1 - q} q^n d(x_1, x_0) < \frac{q^n}{1 - q} d(x_1, x_0).$$

Da $q^n \rightarrow 0$ (Monotoniekriterium, siehe späteres Kapitel), ist (x_n) eine Cauchy-Folge und konvergiert, da X vollständig ist, gegen ein $x^* \in X$. Lässt man $p \rightarrow \infty$ in obiger Abschätzung gehen, ergibt sich die behauptete Fehlerschranke. Schließlich ist x^* tatsächlich ein Fixpunkt: für k groß genug ist $d(x^*, x_{k+1})$ und $d(T(x_k), T(x^*)) \leq q d(x_k, x^*)$ beliebig klein, also

$$d(x^*, T(x^*)) \leq d(x^*, x_{k+1}) + d(T(x_k), T(x^*)) \rightarrow 0,$$

das heißt $x^* = T(x^*)$. Die Eindeutigkeit folgt sofort aus der Kontraktionseigenschaft: wären x^*, y^* beides Fixpunkte, so $d(x^*, y^*) = d(T(x^*), T(y^*)) \leq q d(x^*, y^*)$, was wegen $q < 1$ nur für $d(x^*, y^*) = 0$ möglich ist. $\square$

In Worten zusammengefasst – und das ist einer der praktisch nützlichsten Sätze in der gesamten Analysis: Wenn eine Vorschrift T eine Kontraktion auf einem vollständigen („lückenlosen“) Raum ist, dann (a) gibt es garantiert genau einen Punkt x^* , den T auf sich selbst abbildet – die Fotokopie hat also wirklich genau ein „Zentrum“, das beim Verkleinern gleich bleibt –, (b) findet man diesen Punkt einfach, indem man T auf *irgendeinen* Startwert immer wieder anwendet ($x_0, T(x_0), T(T(x_0)), \dots$), egal wo man anfängt, und (c) weiß man sogar schon im Voraus, *wie schnell* man sich dem Fixpunkt nähert (die Fehlerschranke $q^n / (1 - q) d(x_1, x_0)$) – ein seltener Luxus in der Mathematik, eine explizite Geschwindigkeitsgarantie mitgeliefert zu bekommen.

Beispiel 6.23 (der Banachsche Fixpunktsatz in der Physik).

- (i) Ganz einfach: Die Iteration $T(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ auf $X = [1, \infty)$ ist eine Kontraktion mit Fixpunkt $x^* = \sqrt{2}$ – das ist genau das Heron-Verfahren von oben, jetzt mit Konvergenzgarantie *und* Fehlerschranke.
- (ii) Physik: **Selbstkonsistente Feldmethoden** (etwa in der Elektronenstruktur-Rechnung) berechnen ein Potential $V_{n+1} = T(V_n)$ aus der vorherigen Näherung; ist T eine Kontraktion, garantiert der Banachsche Fixpunktsatz Konvergenz gegen die selbstkonsistente Lösung – unabhängig vom Startwert.
- (iii) Abstrakter: Newton-artige Iterationsverfahren zur Nullstellensuche lassen sich oft als Fixpunktiteration einer Kontraktion in einer Umgebung der Lösung auffassen; die Fehlerschranke $q^n/(1-q)d(x_1, x_0)$ sagt sogar, *wie viele* Iterationsschritte n für eine gewünschte Genauigkeit nötig sind.

△

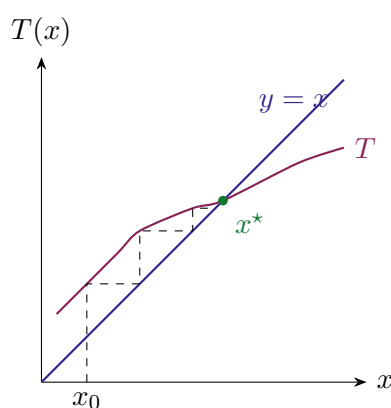


Abbildung 3.2: Die Fixpunktiteration $x_{n+1} = T(x_n)$ als „Spinnennetz“-Diagramm: von x_0 ausgehend nähert man sich treppenförmig dem Fixpunkt x^* .

So liest man das Diagramm, Schritt für Schritt: Man startet bei x_0 auf der x -Achse und geht *senkrecht* nach oben bis zur Kurve T – dort liest man den Funktionswert $T(x_0) = x_1$ ab. Von diesem Punkt geht man *waagerecht* hinüber zur Diagonalen $y = x$; das überträgt den eben berechneten Wert x_1 zurück auf die x -Achse, sodass man ihn im nächsten Schritt wieder als Startwert einer senkrechten Linie zur Kurve T benutzen kann (dort liest man $T(x_1) = x_2$ ab), und so weiter. Diese Wechsel „senkrecht zur Kurve, waagerecht zur Diagonale“ sind genau die geometrische Übersetzung der Rekursion $x_{n+1} = T(x_n)$ – jede der eingezeichneten Treppentufen ist ein Iterationsschritt. Dass sich hier eine *Treppe* statt eines echten Zickzack-„Netzes“ ergibt, liegt daran, dass T in diesem Bild wachsend ist: Bei einer *fallenden* Kontraktion T würden die Stufen stattdessen abwechselnd über und unter die Diagonale springen und ein echtes Spinnennetz-Muster zeichnen – der Name „Spinnennetz-Diagramm“ ist die gängige Bezeichnung für *beide* Varianten dieser Konstruktion, auch wenn nur die fallende Variante

wirklich wie ein Netz aussieht. In beiden Fällen zieht sich die Treppe (bzw. das Netz) immer enger um denselben Punkt x^* zusammen – genau die geometrische Intuition hinter dem Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes.

ÜBUNGEN ZU § 6.2

Übung 6.24. Zeigen Sie, dass $T(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ die Menge $[1, \infty)$ in sich abbildet.

Hinweis: $\frac{x}{2} + \frac{1}{x} \geq 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$.

Übung 6.25. Zeigen Sie, dass T aus der vorigen Übung eine Kontraktion auf $[1, \infty)$ ist. *Hinweis:* $T(x) - T(y) = (x - y)(\frac{1}{2} - \frac{1}{xy})$.

Übung 6.26. Berechnen Sie die ersten drei Iterierten x_1, x_2, x_3 der Folge $x_0 = 1$, $x_{n+1} = T(x_n)$ und vergleichen Sie mit $\sqrt{2} \approx 1,41421$.

Übung 6.27 (etwas schwerer). Zeigen Sie: Ist T eine Kontraktion mit Lipschitz-Konstante q , so ist T stetig.

§ 7 FOLGEN IN $\mathbb{R}$ UND $\mathbb{R}^D$

Reelle Zahlenfolgen sind ein besonders reichhaltiger Spezialfall: Da $\mathbb{R}$ nicht nur ein metrischer Raum, sondern auch ein Körper mit Ordnung ist, können wir Grenzwerte addieren, multiplizieren, vergleichen – und, wie wir sehen werden, sogar dazu benutzen, wichtige Konstanten wie die Eulersche Zahl e zu *definieren*. Dieser Abschnitt entspricht Original 4.2.

ORIGINAL: ORIGINAL 4.2

In einfachen Worten, was das für dich als Leser bedeutet: In einem allgemeinen metrischen Raum konnte man mit Grenzwerten nicht viel mehr anfangen, als zu sagen „die Folge rückt näher an einen Punkt heran“. In $\mathbb{R}$ dagegen kann man mit Grenzwerten ganz genauso rechnen wie mit den Zahlen selbst – man darf sie addieren, multiplizieren, der Größe nach vergleichen, und das alles „verträgt sich“ mit dem Grenzwertbegriff (das ist der Inhalt des ersten Satzes dieses Abschnitts). Dieser Abschnitt ist entsprechend rechenlastiger und konkreter als der vorige – ein gutes Zeichen, denn hier wird die abstrakte Theorie endlich praktisch nutzbar.

§ 7.1 HOMOGENE LINEARE DIFFERENZENGLEICHUNGEN

Bemerkung 7.1 (rekursiv definierte Folgen).

Häufig ist eine Folge durch eine feste Anzahl ihrer Vorgänger festgelegt: $x_{n+q} = F(x_n, \dots, x_{n+q-1})$. Ist F stetig und konvergiert (x_n) , so erfüllt der Grenzwert x^* die **Fixpunktgleichung** $x^* = F(x^*, \dots, x^*)$ – genau die Situation aus dem Banachschen Fixpunktsatz 6.22. $\triangle$

ORIGINAL: TEXT VOR DEFINITION ZUR DIFFERENZENGLEICHUNG

In einfachen Worten: Eine „rekursiv definierte Folge“ ist einfach eine Vorschrift, bei der jedes neue Folgenglied aus einer festen Anzahl direkter Vorgänger berechnet wird – wie ein Dominoeffekt, bei dem der nächste Stein immer durch die Position der letzten paar Steine davor festgelegt ist, oder wie eine Familie, in der man den Kontostand am Monatsende aus dem Kontostand des Vormonats plus Zinsen berechnet.

Definition 7.2 (homogene lineare Differenzgleichung).

Eine **homogene lineare Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten** der Ordnung q ist eine Rekursion

$$x_{n+q} = \sum_{p=0}^{q-1} c_p x_{n+p}, \quad c_0, \dots, c_{q-1} \text{ fest,}$$

zusammen mit q Anfangswerten $x_0, \dots, x_{q-1}$. △

In Worten: „Ordnung q “ bedeutet nur, dass man genau die letzten q Folgenglieder braucht, um das nächste zu berechnen (bei der bekannten Fibonacci-Folge etwa, die gleich als Beispiel kommt, sind es die letzten zwei), und „homogen linear mit konstanten Koeffizienten“ heißt lediglich, dass diese Berechnung eine ganz gewöhnliche gewichtete Summe der Vorgänger ist, mit stets denselben festen Gewichten c_p – keine Quadrate, keine Wurzeln, kein n -abhängiges Gewicht, nur simple, feste Multiplikation und Addition.

Bemerkung 7.3 (Lösungsverfahren via charakteristischem Polynom).

Da jede Linearkombination zweier Lösungen wieder eine Lösung ist, genügt es, q linear unabhängige Lösungen $y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(q)}$ zu finden; die allgemeine Lösung ist dann $x_n = \sum_{i=1}^q d_i y_n^{(i)}$, und die Konstanten d_i werden eindeutig durch die Anfangswerte festgelegt. Man findet die $y^{(i)}$ mit dem Ansatz $x_n = t^n$: Einsetzen liefert das **charakteristische Polynom**

$$P(t) = t^q - \sum_{p=0}^{q-1} c_p t^p = 0.$$

Sind die q Nullstellen $r_1, \dots, r_q \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden, so ist $x_n = \sum_{i=1}^q d_i r_i^n$ die allgemeine Lösung (die Vandermonde-Determinante $\det(r_i^j) = \prod_{i < j} (r_i - r_j)$ ist dann $\neq 0$, was die Eindeutigkeit der d_i sichert). Hat eine Nullstelle r Vielfachheit ν , so treten stattdessen die ν linear unabhängigen Lösungen $r^n, n r^n, n^2 r^n, \dots, n^{\nu-1} r^n$ auf. △

Keine Sorge, wenn dieses Lösungsverfahren beim ersten Lesen wie ein Zaubertrick wirkt – es ist im Kern ein festes Kochrezept mit drei Schritten, das man sich einmal einprägen und danach immer wieder anwenden kann: (1) Rate die Lösung in der Form $x_n = t^n$ und setze sie in die Rekursion ein, das liefert automatisch das charakteristische Polynom $P(t)$; (2) finde die Nullstellen $r_1, \dots, r_q$ dieses Polynoms (reine Schulalgebra, wenn auch manchmal mühsam); (3) bastle aus den Potenzen r_i^n dieser Nullstellen die allgemeine Lösung zusammen und bestimme die Vorfaktoren d_i so, dass die vorgegebenen Anfangswerte $x_0, \dots, x_{q-1}$ herauskommen. Das Beispiel gleich im Anschluss (Fibonacci) macht dieses Rezept konkret.

Beispiel 7.4 (homogene Differenzgleichungen – einfach bis abstrakt).

- (i) Die **Fibonacci-Folge** $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ hat charakteristisches Polynom $t^2 = t + 1$ mit Nullstellen $t_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (dem **Goldenen Schnitt** $\varphi = t_+$ und seinem

Partner t_-). Aus den Anfangswerten folgt die geschlossene Formel (**Satz von Binet**):

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

- (ii) Physik, sehr direkt: Die Differenzengleichung $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n + \omega^2 a_n = 0$ ist genau die naheliegendste Zeitdiskretisierung („finite Differenzen“) der Schwingungsgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ – man ersetzt $\ddot{x}(t)$ durch den zweiten Differenzenquotienten $(a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1})/\Delta t^2$. Die Lösungen oszillieren entsprechend den komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Ersetzt man $+\omega^2$ durch $-\lambda^2$, erhält man stattdessen die Diskretisierung von $\ddot{x} - \lambda^2 x = 0$ mit reellen (exponentiell wachsenden/fallenden) Nullstellen.
- (iii) Abstrakter: Eine doppelte Nullstelle r des charakteristischen Polynoms liefert die Lösungen r^n und $n r^n$ – ganz analog zur Situation bei einer doppelten Nullstelle im charakteristischen Polynom einer linearen Differentialgleichung, wo man ebenfalls einen zusätzlichen Faktor t erhält.

△

ÜBUNGEN ZU § 7.1

Übung 7.5. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$ und lösen Sie die Rekursion für $x_0 = 1, x_1 = 1$.

Übung 7.6. Zeigen Sie, dass die Fibonacci-Folge tatsächlich der Formel aus Beispiel 7.4 (Satz von Binet) für $n = 0, 1, 2$ genügt.

Übung 7.7 (etwas schwerer). Lösen Sie die diskretisierte Schwingungsgleichung $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n + a_n = 0$ (also $\omega = 1$) explizit. *Hinweis: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind komplex; benutzen Sie die Polardarstellung aus § 3.6.*

§ 7.2 GRENZWERTE REELLER FOLGEN, LIMES SUPERIOR UND LIMES INFERIOR

Satz 7.8 (Rechenregeln für Grenzwerte).

Sind $(a_n), (b_n)$ konvergente reelle Folgen mit $\lim a_n = a, \lim b_n = b$, so gilt:

ORIGINAL: THEOREM 4.6

- (i) $\lim |a_n| = |a|$;
- (ii) $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$, und $\lim(c a_n) = c a$ für $c \in \mathbb{R}$;
- (iii) $\lim(a_n b_n) = ab$, und falls $b \neq 0$: $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$;
- (iv) gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n > N$, so folgt $a \leq b$. (**Einschnürungssatz**, „Sandwich-Theorem“: gilt zusätzlich $a_n \leq c_n \leq b_n$ und $a = b$, so folgt $\lim c_n = a$.)

Beweis. (i) Aus $|a| \leq |a - a_n| + |a_n|$ und $|a_n| \leq |a_n - a| + |a|$ folgt $||a| - |a_n|| \leq |a - a_n| \rightarrow 0$.

(iii), Quotient: Es gilt $\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq |a_n| \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|} + \frac{|a_n - a|}{|b|}$, und für n groß genug ist $|b_n|$ von 0 weg

beschränkt (da $b \neq 0$) und $|a_n| < |a| + \epsilon$, also geht die rechte Seite gegen 0.

(iv) Angenommen $b < a$. Die Kugel $B_{|a-b|/3}(a)$ enthält alle a_n für $n > N_1$, die Kugel $B_{|a-b|/3}(b)$ enthält alle b_n für $n > N_2$; für $n > \max(N_1, N_2)$ folgt dann $b_n < a_n$, im Widerspruch zur Voraussetzung $a_n \leq b_n$. $\square$

In Worten zusammengefasst: Dieser Satz ist eigentlich nur eine lange Liste guter Nachrichten – Grenzwerte verhalten sich beim Rechnen genau so, wie man es sich naiv wünschen würde. Der Grenzwert einer Summe ist die Summe der Grenzwerte, der Grenzwert eines Produkts ist das Produkt der Grenzwerte, und Ungleichungen zwischen Folgengliedern übertragen sich (nicht ganz überraschend nur nicht-strikt, siehe Übungen) auf die Grenzwerte selbst. Besonders nützlich im Alltag ist der **Einschnürungssatz**: Ist eine Folge (c_n) zwischen zwei anderen Folgen „eingeklemmt“, die beide gegen denselben Wert laufen, bleibt (c_n) gar keine andere Wahl, als ebenfalls gegen diesen Wert zu laufen – wie eine Scheibe Käse zwischen zwei Scheiben Brot, die beide von oben und unten immer enger zusammengedrückt werden.

Definition 7.9 (Limes superior und Limes inferior).

Für eine beliebige reelle Folge (x_n) (nicht notwendig konvergent) definiert man

$$\limsup_n x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{m \geq n} x_m \right), \quad \liminf_n x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{m \geq n} x_m \right),$$

wobei auch die Werte $\pm\infty$ zugelassen sind. Die Folge $\sup_{m \geq n} x_m$ ist monoton fallend in n (das Supremum wird über eine kleiner werdende Menge gebildet), sodass der Grenzwert im erweiterten Sinn stets existiert. $\triangle$

Limes superior und Limes inferior gehören zu den Begriffen, die beim ersten Kontakt am meisten Kopfzerbrechen bereiten – keine Sorge, das ist völlig normal, und ein Bild hilft enorm: Stell dir eine Folge als die Kursverläufe einer Aktie über sehr viele Tage vor, die ständig auf und ab schwankt, ohne sich auf einen festen Wert einzupendeln. Der **Limes superior** ist dann nicht der höchste Kurs, der jemals erreicht wurde (der könnte ein einmaliger Ausreißer ganz am Anfang gewesen sein), sondern die kleinste „Deckel“-Schranke, unter die der Kurs zwar irgendwann für immer zurückfällt, die er aber – egal wie weit man in der Zukunft schaut – immer wieder (unendlich oft) fast wieder erreicht. Der **Limes inferior** ist symmetrisch dazu die größte „Boden“-Schranke von unten. Formal wird dieses Bild eingefangen, indem man erst für jeden Zeitpunkt n das Supremum *aller noch kommenden* Werte bildet (das „vergisst“ bewusst alles, was vor n war) und dann schaut, wie sich dieses Supremum mit wachsendem n selbst verhält.

Bemerkung 7.10.

Es gilt $\limsup x_n = \infty$ genau dann, wenn (x_n) jede noch so große Schranke unendlich oft übertrifft. Ist $\limsup x_n = L < \infty$, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ nur endlich viele Folgenglieder oberhalb von $L + \epsilon$, aber unendlich viele oberhalb von $L - \epsilon$. Eine Folge (x_n) konvergiert genau dann, wenn $\limsup x_n = \liminf x_n = x \neq \pm\infty$ gilt – limsup und liminf „klemmen“ den möglichen Grenzwert von oben und unten ein, auch wenn die Folge selbst nicht konvergiert.

In Worten: Fallen „Deckel“ und „Boden“ zu ein und demselben endlichen Wert zusammen, bleibt der Folge gar kein Spielraum mehr zum Schwanken übrig – sie *muss* dann konvergieren, und zwar genau gegen diesen gemeinsamen Wert. $\triangle$

Beispiel 7.11 (limsup/liminf in der Physik).

- (i) Ganz einfach: Für $x_n = (-1)^n$ gilt $\limsup x_n = 1$, $\liminf x_n = -1$ – die Folge konvergiert nicht, aber ist beidseitig eingeschlossen.
- (ii) Eine Variante mit demselben limsup/liminf, aber ohne dass die Folgenglieder je genau ± 1 treffen: $x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$ (siehe Abbildung 3.3 unten). Für gerades n ist $x_n = 1 + \frac{1}{n} > 1$, für ungerades n ist $x_n = -(1 + \frac{1}{n}) < -1$; beide Zweige nähern sich mit wachsendem n von außen den Werten ± 1 an, sodass wieder $\limsup x_n = 1$ und $\liminf x_n = -1$ gilt.
- (iii) Physik: Bei einer verrauschten Messreihe (x_n) (z. B. thermisches Rauschen um einen wahren Wert) beschreibt $\limsup x_n$ die kleinste Schranke, die die Messwerte *asymptotisch* nicht mehr überschreiten – eine robustere Kenngröße als das (möglicherweise nicht existierende) Maximum.

$\triangle$

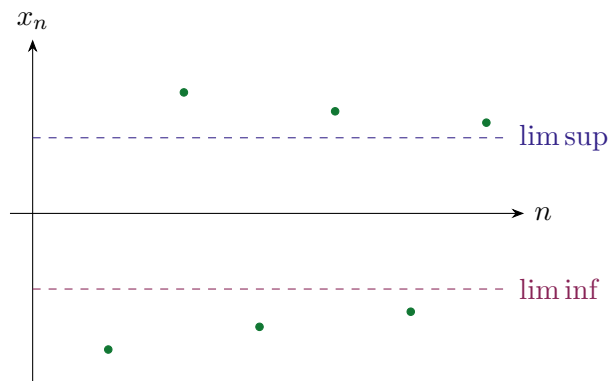


Abbildung 3.3: Die oszillierende Folge $x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$ aus dem Beispiel: für ungerades n liegt x_n unterhalb von -1 , für gerades n oberhalb von 1 . Sie konvergiert nicht, aber Limes superior (1) und Limes inferior (-1) schnüren sie beidseitig ein.

ÜBUNGEN ZU § 7.2

Übung 7.12. Bestimmen Sie $\limsup$ und $\liminf$ der Folge $x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$.

Übung 7.13. Zeigen Sie: Ist (x_n) beschränkt, so sind $\limsup x_n$ und $\liminf x_n$ endlich (benutzen Sie die Supremumseigenschaft, Satz 3.31).

Übung 7.14 (etwas schwerer). Zeigen Sie $\liminf x_n \leq \limsup x_n$ für jede reelle Folge (x_n) .

§ 7.3 DER SATZ VON DER MONOTONEN KONVERGENZ

Definition 7.15 (Monotonie und Beschränktheit).ORIGINAL: DEFINITION
4.5

Eine reelle Folge (a_n) heißt **monoton wachsend**, wenn $a_n \geq a_p$ für $n > p$, **monoton fallend**, wenn $a_n \leq a_p$ für $n > p$, und **beschränkt**, wenn $|a_n| \leq M$ für ein festes M . $\triangle$

In einfachen Worten: **Monoton wachsend** heißt schlicht, dass die Folge sich niemals rückwärtsbewegt – eine Treppe, die immer nur nach oben führt (oder zumindest niemals eine Stufe zurückgeht) –, **monoton fallend** entsprechend eine Treppe, die niemals nach oben führt. **Beschränkt** heißt, dass die ganze Folge in einem festen, endlich großen Zimmer bleibt und niemals über eine feste Wand M hinauswächst.

Satz 7.16 (monotone Konvergenz).

ORIGINAL: THEOREM 4.7

Eine monotone, beschränkte reelle Folge konvergiert – und zwar gegen ihr Supremum, falls sie wächst, bzw. ihr Infimum, falls sie fällt.

Beweis. Sei (x_n) monoton wachsend und beschränkt. Die Menge $\{x_n\}$ ist beschränkt, besitzt also nach der Supremumseigenschaft (Satz 3.31) ein Supremum x . Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein N mit $x_N > x - \epsilon$ (sonst wäre $x - \epsilon$ eine kleinere obere Schranke), und wegen der Monotonie gilt für $n > N$: $x - \epsilon < x_N \leq x_n \leq x$. $\square$

In Worten: Dieser Satz ist einer der intuitivsten in der ganzen Analysis, sobald man ihn bildlich vor sich sieht – eine Treppe, die immer nur nach oben führt (monoton wachsend), aber gegen eine Zimmerdecke stößt, die sie niemals durchbrechen kann (beschränkt), *muss* sich zwangsläufig irgendeiner Höhe unterhalb der Decke annähern; sie kann ja nicht ewig weiter steigen, ohne die Decke zu durchstoßen, und sie kann auch nicht „springen“ oder „zurückrutschen“, da sie ja monoton ist. Die Stelle, an der sie sich einpendelt, ist dann genau das Supremum – die niedrigste Decke, die die Treppe niemals durchbricht.

Lemma 7.17 (Bernoullische Ungleichung).

ORIGINAL: EXERCISE 4.6

Für $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Beweis. Induktion über n : Für $n = 0$ ist beides $= 1$. Der Schritt $n \rightarrow n+1$: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$. $\square$

Dieses Lemma wirkt wie eine belanglose Fußnote, ist aber ein enorm nützliches Rechenwerkzeug – es taucht gleich mehrfach im Beweis des nächsten Satzes auf. In Worten sagt es nur: Rundest du $(1+x)^n$ nach unten ab, indem du beim binomischen Ausmultiplizieren alle Terme außer den ersten beiden wegwirfst, bist du (solange $x > -1$) immer noch auf der sicheren, unteren Seite – die weggeworfenen Terme können den Wert nur noch größer machen, nie kleiner.

Satz 7.18 (eine Sammlung klassischer Grenzwerte).ORIGINAL: EXERCISE 4.6,
FORTSETZUNG

- (i) Für $s \in \mathbb{Q}_{>0}$: $\lim n^{-s} = 0$.
- (ii) Für $a > 0$: $\lim a^{1/n} = 1$.
- (iii) $\lim n^{1/n} = 1$.
- (iv) Für $0 < q < 1$: $\lim q^n = 0$.
- (v) Für $x > 1, k \in \mathbb{N}$: $\lim n^k/x^n = 0$ (Exponentialfunktionen schlagen jede Potenz).
- (vi) Für jedes $x \in \mathbb{R}$: $\lim x^n/n! = 0$ (die Fakultät schlägt jede Exponentialfunktion).

Bevor der (eher technische) Beweis kommt, in Worten, was diese sechs Grenzwerte eigentlich alle gemeinsam aussagen – ein „Wettrennen“ verschiedener Wachstumsgeschwindigkeiten: (i) sagt, dass jede negative Potenz von n irgendwann gegen null geht, egal wie klein der Exponent s ist. (ii) und (iii) sagen, dass n -te Wurzeln fester bzw. wachsender Zahlen sich immer mehr der 1 annähern – die n -te Wurzel „zieht jede Zahl gegen 1“. (iv) ist die Aussage, die uns schon im Banachschen Fixpunktsatz gefehlt hat: eine Zahl zwischen 0 und 1, immer wieder mit sich selbst multipliziert, wird beliebig klein. Und (v)+(vi) sind die wichtigste Faustregel der ganzen Liste, die man sich unbedingt merken sollte: In einem Wettrennen zwischen Potenzen (n^k), Exponentialfunktionen (x^n) und der Fakultät ($n!$) gewinnt für große n *immer* die Fakultät, gefolgt von der Exponentialfunktion, mit den Potenzen weit abgeschlagen auf dem letzten Platz – egal wie groß man den Exponenten k oder die Basis x zunächst wählt.

Beweisskizzen. (i) Zu $\epsilon > 0$ wähle $N_\epsilon > \epsilon^{-1/s}$.

(ii) Für $a > 1$: mit $a = (1 + (a^{1/n} - 1))^n$ liefert die Bernoullische Ungleichung $a \geq 1 + n(a^{1/n} - 1)$, also $0 < a^{1/n} - 1 \leq (a - 1)/n \rightarrow 0$; für $a < 1$ folgt die Aussage durch Übergang zu $1/a$.

(iii) Analog zu (ii), angewendet auf $n^{1/(2n)}$: aus $n^{1/2} = (1 + (n^{1/(2n)} - 1))^n \geq 1 + n(n^{1/(2n)} - 1)$ folgt $n^{1/(2n)} \rightarrow 1$, also auch $n^{1/n} = (n^{1/(2n)})^2 \rightarrow 1$.

(iv) (q^n) ist monoton fallend und beschränkt (durch 0), konvergiert also nach Satz 7.16 gegen ihr Infimum $c \geq 0$. Wäre $c > 0$, gäbe es p mit $q^p < c/q$ (da c/q keine untere Schranke mehr wäre), also $q^{p+1} < c$, im Widerspruch zu c als Infimum.

(v) Aus der Bernoullischen Ungleichung, angewendet auf $x^{1/2^k}$, folgt $n^k/x^n \rightarrow 0$ durch geschicktes Abschätzen (Details: siehe Originalskript).

(vi) Für $a_n := |x|^n/n!$ gilt $a_{n+1} = \frac{|x|}{n+1}a_n$, also ist (a_n) für $n > |x|$ monoton fallend und (durch 0) beschränkt, konvergiert also gegen ein Infimum $c \geq 0$; wäre $c > 0$, führte dasselbe Argument wie in (iv) zum Widerspruch. $\square$

Definition 7.19 (Eulersche Zahl).

Die Folge $x_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ ist monoton wachsend und durch 16 beschränkt (binomische Entwicklung zeigt $x_n \leq \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} \leq 8 \sum_{p \geq 0} 2^{-p} < 16$, da $p! > 2^{p-3}$ für $p \geq 0$). Nach Satz 7.16 konvergiert (x_n) ; ihr Grenzwert heißt die **Eulersche Zahl**

ORIGINAL: EXERCISE 4.6,
LETZTER PUNKT

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828 \dots$$



In einfachen Worten, mit einem Bild, das viele aus dem Alltag kennen: Stell dir eine Bank vor, die dir 100 % Zinsen *pro Jahr* verspricht, aber die Zinsen n -mal im Jahr in immer kleineren Häppchen gutschreibt (bei $n = 1$ einmal am Jahresende, bei $n = 12$ monatlich, bei $n = 365$ täglich, ...) – und die jeweils gutgeschriebenen Zinsen sofort wieder mitverzinst werden (**Zinseszins**). Der Kontostand am Jahresende ist dann genau $(1 + \frac{1}{n})^n$ Startkapital. Die Definition sagt: Auch wenn man die Zinsgutschrift beliebig oft im Jahr wiederholt („kontinuierliche Verzinsung“, $n \rightarrow \infty$), wächst der Kontostand *nicht* unbegrenzt an, sondern pendelt sich auf einen ganz konkreten, endlichen Faktor ein – nämlich genau $e \approx 2,71828$. Diese scheinbar willkürliche Zahl taucht deshalb überall auf, wo etwas kontinuierlich (nicht in diskreten Schritten) wächst oder zerfällt.

Beispiel 7.20 (klassische Grenzwerte und e in der Physik).

- (i) Physik, fundamental: Radioaktiver Zerfall, $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, und jede Relaxation zu einem Gleichgewicht bauen auf genau dieser Konstanten e auf.
- (ii) Physik: Aussage (v) – „Exponentialfunktionen schlagen jede Potenz“ – erklärt, warum in der statistischen Physik der Boltzmann-Faktor $e^{-E/k_B T}$ jedes noch so große Polynom in E (etwa eine Zustandsdichte) für große E dominiert und die entsprechenden Integrale konvergieren lässt.
- (iii) Abstrakter: Aussage (iv), $\lim q^n = 0$ für $0 < q < 1$, ist genau die Zutat, die wir im Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes (Satz 6.22) für „ $q^n \rightarrow 0$, siehe späteres Kapitel“ gebraucht und nun nachgeliefert haben.



ÜBUNGEN ZU § 7.3

Übung 7.21. Zeigen Sie mit der Bernoullischen Ungleichung: $2^n \geq 1 + n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Übung 7.22. Für welche n gilt $(1 + \frac{1}{n})^n > 2,5$? (Numerisches Ausprobieren reicht.)

Übung 7.23 (etwas schwerer). Zeigen Sie mithilfe von Satz 7.18(vi), dass die Folge $a_n = x^n/n!$ für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ tatsächlich monoton fallend ist, sobald $n > |x|$.

§ 7.4 DER SATZ VON BOLZANO-WEIERSTRASS

Satz 7.24 (Intervallschachtelung).

ORIGINAL: THEOREM 4.8

Es sei $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge ineinander geschachtelter abgeschlossener Intervalle, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, mit $\lim(b_n - a_n) = 0$. Dann gibt es genau eine reelle Zahl x mit $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$.

Beweis. Wegen der Schachtelung sind (a_n) monoton wachsend und (b_n) monoton fallend,

beide beschränkt, also nach Satz 7.16 konvergent. Da $\lim(a_n - b_n) = 0$, haben beide denselben Grenzwert x , und wegen der Monotonie gilt $a_n \leq x \leq b_n$ für alle n , also $x \in \bigcap_n [a_n, b_n]$. Gäbe es $x' \neq x$ im Schnitt, könnte x' nicht in einem Intervall mit Durchmesser $b_n - a_n < |x - x'|$ liegen – ein Widerspruch, da solche n existieren. $\square$

In Worten, mit einem Bild, das an die Matroschka-Puppen aus dem Zahlen-Kapitel erinnert: Man hat eine Folge von immer kleineren, ineinander verschachtelten Kisten (den Intervallen $[a_n, b_n]$), von denen jede vollständig in der vorherigen steckt, und deren Größe gegen null schrumpft. Dieser Satz sagt: So eine Verschachtelung „verschwindet nicht ins Nichts“, sondern zieht sich exakt auf einen einzigen, wohldefinierten Punkt zusammen – man kann beliebig weit hineinzoomen, ohne dass am Ende „nichts“ übrig bleibt.

Satz 7.25 (Bolzano-Weierstrass).

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^D$ (das heißt $\|x_n\| \leq M$ für ein festes M) besitzt eine konvergente Teilfolge.

ORIGINAL: THEOREM 4.9

Beweisskizze für $D = 1$. Der allgemeine Fall folgt komponentenweise. Sei (x_n) beschränkt durch $a_0 \leq x_n \leq b_0$; wir halbieren $I_0 = [a_0, b_0]$ und wählen die Hälfte I_1 , die unendlich viele Folgenglieder enthält (mindestens eine der beiden Hälften muss das tun). Iteration liefert geschachtelte Intervalle $I_k = [a_k, b_k]$ mit Durchmesser $(b_0 - a_0)2^{-k}$, jedes mit unendlich vielen Folgengliedern. Nach Satz 7.24 gibt es $\{x\} = \bigcap_k I_k$. Wir konstruieren eine Teilfolge $x_{n_k} \rightarrow x$, indem wir induktiv $x_{n_k} \in I_k$ mit $n_k > n_{k-1}$ wählen (möglich, da I_k unendlich viele Folgenglieder enthält); dann gilt $d(x_{n_k}, x) \leq (b_0 - a_0)2^{-k} \rightarrow 0$. $\square$

In Worten zusammengefasst: Dieser Satz ist die konkrete, handfeste Version des Schubfachprinzip-Arguments, das wir schon beim „kompakt $\Leftrightarrow$ folgenkompakt“-Satz im vorigen Kapitel angedeutet haben (§ 6.1) – nur jetzt ganz explizit für $\mathbb{R}^D$ bewiesen, mit einer konkreten Bauanleitung (immer wieder halbieren, die volle Hälfte behalten) statt eines abstrakten Widerspruch-sarguments. Er sagt: Sperrt man unendlich viele Punkte in ein endlich großes „Zimmer“ ein (*beschränkt*), *müssen* sich zumindest einige davon irgendwo im Zimmer zusammendrängen – man kann unendlich viele Punkte nicht beliebig gleichmäßig über einen endlichen Raum verteilen, ohne dass irgendwo eine Verdichtung entsteht.

ÜBUNGEN ZU § 7.4

Übung 7.26. Besitzt die (unbeschränkte) Folge $x_n = n$ eine konvergente Teilfolge? Widerspricht das dem Satz von Bolzano-Weierstrass?

Übung 7.27. Wenden Sie den Satz von Bolzano-Weierstrass auf die Folge $x_n = (-1)^n$ an: welche konvergenten Teilfolgen finden Sie?

Übung 7.28 (etwas schwerer). Zeigen Sie: Eine beschränkte reelle Folge, die genau einen Häufungswert besitzt (das heißt, jede konvergente Teilfolge hat denselben Grenzwert), konvergiert bereits selbst gegen diesen Wert.

§ 7.5 $\mathbb{R}^D$ IST CAUCHY-VOLLSTÄNDIG

Satz 7.29 ($\mathbb{R}^D$ ist Cauchy-vollständig).

$\mathbb{R}$ (und allgemeiner $\mathbb{R}^D$) mit der Standardtopologie ist ein vollständiger metrischer Raum.

ORIGINAL: THEOREM
4.10

Beweis. Jede Cauchy-Folge ist beschränkt (für $n > N_\epsilon$ gilt $|x_n| \leq |x_{N_\epsilon}| + \epsilon$). Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass besitzt sie also eine konvergente Teilfolge, und nach dem Konvergenzkriterium für Cauchy-Folgen (Lemma 6.14) konvergiert damit bereits die ganze Folge. Für $\mathbb{R}^D$ überträgt sich das komponentenweise: ist (x_n) Cauchy in $\mathbb{R}^D$, so ist jede Komponentenfolge $(x_n^\mu)_n$ Cauchy in $\mathbb{R}$. $\square$

In Worten: Dieser Satz löst endlich das Versprechen ein, das seit dem vorigen Kapitel im Raum stand (Bemerkung 6.17) – $\mathbb{R}$ hat wirklich, nachweislich, „keine Löcher“: Jeder Wanderer im Nebel (jede Cauchy-Folge) findet in $\mathbb{R}$ tatsächlich ein Ziel. Der Beweis-Trick ist dabei denkbar elegant: Eine Cauchy-Folge ist automatisch beschränkt (die Folgenglieder können sich ja nach endlich vielen Schritten nicht mehr weit von einem festen Punkt entfernen), Bolzano-Weierstrass liefert daraus eine konvergente Teilfolge, und das Cauchy-Konvergenzkriterium von vorhin (Lemma 6.14) zieht daraus die Konvergenz der *gesamten* Folge nach – drei bereits bekannte Bausteine, hier nur clever kombiniert.

Korollar 7.30 ($\mathbb{R}$ ist die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$).

$\mathbb{R}$ ist die Cauchy-Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ im Sinne von Bemerkung 6.17.

ORIGINAL: COROLLARY
4.1

Beweis. Da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert jede Cauchy-Folge rationaler Zahlen bereits in $\mathbb{R}$. Umgekehrt gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ nach Satz 3.35 für jedes n ein $q_n \in \mathbb{Q}$ mit $x - \frac{1}{n} < q_n < x$; die Folge (q_n) konvergiert gegen x und ist daher (als konvergente Folge) Cauchy. $\square$

In Worten: Das ist genau die Formalisierung der „Löcher stopfen“-Idee aus Bemerkung 6.17 – $\mathbb{R}$ ist tatsächlich *nichts anderes* als $\mathbb{Q}$ zusammen mit sämtlichen fehlenden Grenzwerten, die man formal hinzufügen musste, um jedes Loch zu stopfen. Kein Punkt in $\mathbb{R}$ ist „überflüssig“ (jeder ist Grenzwert einer rationalen Cauchy-Folge), und keiner fehlt mehr (jede rationale Cauchy-Folge findet nun ihr Ziel).

ÜBUNGEN ZU § 7.5

Übung 7.31. Ist die Folge $x_n = \sum_{k=1}^n 1/k!$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$? Konvergiert sie in $\mathbb{Q}$? (Ihr Grenzwert ist $e - 1$.)

Übung 7.32 (etwas schwerer). Erklären Sie, warum der Beweis von Satz 7.29 für $\mathbb{Q}$ nicht funktioniert – an welcher Stelle scheitert er konkret?

§ 7.6 DER SATZ VON HEINE-BOREL

Definition 7.33 (beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^D$).

Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^D$ heißt **beschränkt**, wenn sie von einer (hinreichend großen) Kugel um den Ursprung überdeckt wird. $\triangle$

ORIGINAL: TEXT VOR THEOREM 4.11

In einfachen Worten: S ist beschränkt, wenn sie komplett in einen (vielleicht riesigen, aber immer noch endlich großen) Koffer passt – sie „läuft nicht bis ins Unendliche davon“.

Satz 7.34 (Satz von Heine-Borel).

In der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^D$ ist eine Menge genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

ORIGINAL: THEOREM 4.11

Dies ist einer der wichtigsten Sätze des ganzen Kapitels, und die gute Nachricht vorweg: Die abstrakte Definition von Kompaktheit über offene Überdeckungen (§ 4.1), mit der man normalerweise nur schwer direkt rechnen kann, wird in $\mathbb{R}^D$ auf zwei ganz simple, leicht nachprüfbare Eigenschaften reduziert. In einfachen Worten: In $\mathbb{R}^D$ (und *nur* dort – in allgemeinen metrischen Räumen ist das falsch!) ist eine Menge genau dann kompakt, wenn sie zwei Bedingungen gleichzeitig erfüllt, die man mit blankem Auge prüfen kann: sie darf keinen „fehlenden Rand“ haben (**abgeschlossen**, wie beim Intervall $[a, b]$, im Gegensatz zu (a, b)) und sie darf nicht bis ins Unendliche reichen (**beschränkt**, passt in einen endlich großen Koffer). Das ist der eigentliche Grund, warum in praktisch jedem Physik-Lehrbuch bei „kompakt“ sofort „abgeschlossen und beschränkt“ mitgedacht wird – man befindet sich fast immer in $\mathbb{R}^D$, wo genau das gilt.

Beweisskizze in vier Schritten. Kompakt $\Rightarrow$ abgeschlossen: Dies gilt in jedem Hausdorff-Raum (Satz 5.6 zeigt, dass $\mathbb{R}^D$ Hausdorffsch ist): Für einen Häufungspunkt $x \notin K$ liefert die Hausdorff-Eigenschaft zu jedem $y \in K$ eine offene Menge, die y , aber nicht x enthält; diese bilden eine offene Überdeckung von K , deren endliche Teilüberdeckungen aber nie ganz K von x trennen könnten, wenn x wirklich Häufungspunkt wäre – Widerspruch.

Kompakt $\Rightarrow$ beschränkt: Die Kugeln vom Radius 1 um jeden Punkt von K bilden eine offene Überdeckung; eine endliche Teilüberdeckung mit Mittelpunkten $x_1, \dots, x_l$ und der (endliche, also endlichen) maximale paarweise Abstand M liefern via Dreiecksungleichung eine Schranke $d(x, y) \leq 2 + M$ für alle $x, y \in K$.

Abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt: Für $S \subset K$ abgeschlossen und eine offene Überdeckung von S ergänzt man diese um die offene Menge $\mathbb{R}^D \setminus S$ zu einer Überdeckung von K ; deren endliche Teilüberdeckung liefert (nach Entfernen von $\mathbb{R}^D \setminus S$) eine endliche Teilüberdeckung von S .

Abgeschlossen und beschränkt $\Rightarrow$ kompakt: Dies ist der aufwendigste Teil und benutzt die Vollständigkeit von $\mathbb{R}^D$ (Satz 7.29) wesentlich. Es genügt, dies für einen Würfel $T_0 = [-a, a]^D$ zu zeigen. Angenommen, T_0 hätte eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung. Wie bei der Intervallschachtelung zerlegt man T_0 in 2^D Teilwürfel halber Kantenlänge; mindestens einer davon, genannt T_1 , benötigt ebenfalls unendlich viele Überdeckungsmengen. Iteration liefert geschachtelte Würfel $T_0 \supset T_1 \supset \dots$ mit Durchmesser $\rightarrow 0$; eine Folge $x_k \in T_k$ ist Cauchy und konvergiert (Vollständigkeit!) gegen ein x , das in jedem T_k liegt. Da x in einer der offenen Überdeckungsmengen U liegt, liegt für k groß genug ganz $T_k \subset U$ –

im Widerspruch dazu, dass T_k unendlich viele Überdeckungsmengen benötigt. $\square$

In Worten, die vier Beweisschritte noch einmal ganz ohne Formeln: Erstens, kompakte Mengen haben keinen „fehlenden Rand“, weil sich in einem Hausdorff-Raum jeder Punkt außerhalb der Menge von ihr durch offene Umgebungen sauber trennen lässt. Zweitens, kompakte Mengen können nicht ins Unendliche reichen, weil man sie sonst nicht mit endlich vielen Einheitskugeln überdecken könnte. Drittens, eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge „erbt“ deren Kompaktheit. Und viertens – der eigentliche Kraftakt des Beweises – benutzt exakt denselben Verschachtelungs-Trick wie beim Satz von Bolzano-Weierstrass (immer wieder halbieren, die „volle“ Hälfte behalten), nur jetzt mit Würfeln statt Intervallen, um zu zeigen, dass abgeschlossene und beschränkte Mengen wirklich kompakt sind.

Korollar 7.35 (Umkehrabbildungen zwischen kompakten Räumen).

Die Umkehrfunktion einer stetigen Bijektion zwischen zwei kompakten Hausdorff-Räumen ist automatisch stetig.

ORIGINAL: COROLLARY
4.2

Beweisskizze. Ist $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Bijektion zwischen kompakten Hausdorff-Räumen, so zeigt man, dass f eine **offene** Abbildung ist: für offenes $U \subset X$ ist $X \setminus U$ abgeschlossen, also kompakt (dritter Schritt oben), also ist $f(X \setminus U)$ kompakt (Satz 4.14), also abgeschlossen in Y (Hausdorff!), also ist $f(U) = Y \setminus f(X \setminus U)$ offen. Für die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ ist dann $g^{-1}(U) = f(U)$ offen für jedes offene U , also ist g stetig. $\square$

In Worten: Normalerweise muss man Stetigkeit der Umkehrfunktion einer Bijektion *extra* nachweisen – eine stetige Funktion kann durchaus eine unstetige Umkehrung haben. Dieses Korollar sagt: Solange beide beteiligten Räume kompakt und Hausdorffsch sind, ist das automatisch geschenkt, man muss sich darüber keine Gedanken mehr machen. Kompaktheit „verhindert“ gewissermaßen, dass die Umkehrfunktion irgendwo unerwartet springen könnte.

Beispiel 7.36 (Kompaktheit in $\mathbb{R}^D$ – einfach bis abstrakt).

- (i) Ganz einfach: $[0, 1]$, jede endliche Menge und die Einheitssphäre $\{x \in \mathbb{R}^D \mid \|x\| = 1\}$ sind kompakt; $(0, 1)$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Z}$ sind es nicht (das eine ist nicht abgeschlossen, die anderen sind nicht beschränkt).
- (ii) Physik: Eine **Energieschale** $\{(q, p) \mid H(q, p) = E\}$ mit stetigem, nach oben beschränktem Impulsanteil ist oft abgeschlossen und beschränkt, also kompakt – das garantiert (via Satz 4.14, stetiges Bild kompakter Mengen ist kompakt) unter anderem, dass stetige Observable auf ihr ein Maximum und ein Minimum annehmen.
- (iii) Abstrakter: Korollar 7.35 rechtfertigt, warum man sich beim Wechsel zwischen zwei kompakten Koordinatenkarten (z. B. zwei Parametrisierungen einer kompakten Fläche) um die Stetigkeit der Rückrichtung meist keine Sorgen machen muss – sie ist automatisch gegeben.



ÜBUNGEN ZU § 7.6

Übung 7.37. Ist die Menge $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} \subset \mathbb{R}$ kompakt? Und $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$?

Übung 7.38. Ist die abgeschlossene Kugel $\overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^D$ kompakt? Begründen Sie mit dem Satz von Heine-Borel.

Übung 7.39 (etwas schwerer). Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ beschränkt, aber *nicht* kompakt ist (obwohl $[0, 1]$ es ist). Welcher Schritt im Beweis des Satzes von Heine-Borel scheitert für $\mathbb{Q}$?

§ 8 REIHEN

Eine **Reihe** ist eine unendliche Summe – formal nichts anderes als eine Folge von Partialsummen, aber mit einer eigenen Denkweise und eigenen Kriterien, die in der Physik überall auftauchen: von der geometrischen Reihe bei Mehrfachreflexionen bis zur Potenzreihe, mit der wir am Ende dieses Abschnitts die Exponentialfunktion (und damit letztlich $e^{i\varphi}$) sauber definieren. Dieser Abschnitt entspricht Original 4.3.

ORIGINAL: ORIGINAL 4.3

In einfachen Worten, bevor die Formeln kommen: Eine **Reihe** ist nichts Neues gegenüber dem vorigen Kapitel – es ist einfach eine ganz bestimmte *Folge*, nämlich die Folge der „Zwischenstände“, die entsteht, wenn man immer weiter Zahlen zu einer laufenden Summe hinzuaddiert (ein bisschen wie ein Sparschwein, in das man jeden Tag eine weitere Münze wirft, und man fragt sich: Pendelt sich der Gesamtbetrag im Sparschwein auf einen festen Wert ein, obwohl man *unendlich oft* weitere Münzen hineinwirft, oder wächst er unbegrenzt?). Alles, was wir über Folgen und Konvergenz bereits wissen, funktioniert also hier direkt weiter – wir müssen nur lernen, wie man dieser speziellen Art von Folge ansieht, ob sie konvergiert, ohne jedes Mal die Partialsummen explizit ausrechnen zu müssen.

Definition 8.1 (Reihe, Konvergenz, absolute Konvergenz).

Zu einer Folge (a_k) in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt der formale Ausdruck $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ eine **Reihe** mit **allgemeinem Glied** a_k . Die Reihe heißt

ORIGINAL: DEFINITION 4.6

- **konvergent**, wenn die Folge der **Partialsummen** $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ konvergiert, $s_n \rightarrow s$; man schreibt dann $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$;
- **absolut konvergent**, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert;
- **divergent**, wenn sie nicht konvergiert.



In einfachen Worten: Die Partialsumme s_n ist genau der „Kontostand im Sparschwein nach dem n -ten Wurf“ – die Reihe konvergiert, wenn dieser Kontostand sich auf einen festen

Endwert einpendelt. **Absolute Konvergenz** ist eine strengere, robustere Version davon: Man verlangt, dass die Summe sogar dann noch endlich bleibt, wenn man *alle* Minuszeichen vorher in Pluszeichen verwandelt (also mit den Beträgen $|a_k|$ statt den a_k selbst rechnet) – die Summe darf also nicht nur „zufällig“ durch geschicktes Auslöschen positiver und negativer Terme endlich sein, sondern muss auch dann endlich bleiben, wenn sich alle Terme gegenseitig *verstärken* statt aufzuheben. Das macht absolut konvergente Reihen viel gutmütiger im Umgang, wie der nächste Unterabschnitt zeigt.

Bemerkung 8.2.

Ist $\sum a_k$ konvergent, so muss $a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow 0$ gelten (sonst wäre (s_n) nicht Cauchy) – das ist notwendig, aber *nicht hinreichend* für Konvergenz. Außerdem gilt: *absolute* Konvergenz impliziert Konvergenz, denn $|\sum_{k=n}^m a_k| \leq \sum_{k=n}^m |a_k|$ zeigt, dass die Partialsummen von $\sum a_k$ Cauchy sind, sobald die von $\sum |a_k|$ es sind. Die Umkehrung gilt nicht. In Worten: „Die Summanden werden irgendwann winzig“ reicht *nicht* aus, damit die Summe endlich bleibt (das berühmteste Gegenbeispiel, die harmonische Reihe $\sum 1/k$, kommt gleich) – aber wenn schon die Summe der Beträge endlich ist, kann man ganz beruhigt sein, dass auch die ursprüngliche Reihe konvergiert. $\triangle$

Beispiel 8.3 (Reihen – einfach bis abstrakt).

- (i) Ganz einfach: $\sum_{k \geq 1} 1/k^2$ ist absolut konvergent (Vergleich mit $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ zeigt, dass die Partialsummen monoton und beschränkt sind).
- (ii) Physik: Bei Mehrfachreflexionen in einem optischen Resonator mit Reflexionsgrad $q \in (0, 1)$ addiert sich die gesamte transmittierte Intensität zu einer **geometrischen Reihe** $\sum_{k \geq 0} q^k$.
- (iii) Abstrakter: $\sum_{k \geq 1} (-1)^k/k$ (die alternierende harmonische Reihe) ist konvergent, aber *nicht* absolut konvergent – die gewöhnliche harmonische Reihe $\sum_{k \geq 1} 1/k$ divergiert (Gruppieren der Terme in Zweierpotenz-Blöcken zeigt $s_{2^n} \geq 1 + n/2 \rightarrow \infty$).

$\triangle$

Bemerkung 8.4 (zwei Standardreihen).

Geometrische Reihe. $\sum_{k \geq 0} q^k$ ist für $0 < q < 1$ absolut konvergent mit Summe $\frac{1}{1-q}$ (aus $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$), und divergent für $q \geq 1$.

Verallgemeinerte harmonische Reihe. $\zeta(\alpha) := \sum_{k \geq 1} k^{-\alpha}$ (die **Riemannsche Zeta-funktion**) ist absolut konvergent für $\alpha > 1$ und divergent für $\alpha \leq 1$.

$\triangle$

In einfachen Worten zur geometrischen Reihe, die im Rest dieses Skripts noch sehr oft auftauchen wird: Jeder Term ist um denselben festen Faktor $q < 1$ kleiner als der vorherige

– wie ein Ball, der bei jedem Aufprall nur noch einen festen Bruchteil seiner vorherigen Sprunghöhe erreicht. Addiert man alle unendlich vielen, immer winzigeren Sprunghöhen zusammen, kommt trotzdem nur eine endliche Gesamtstrecke heraus, nämlich $\frac{1}{1-q}$ – ein Ball, der bei jedem Sprung nur noch die Hälfte der Höhe erreicht ($q = \frac{1}{2}$), legt insgesamt also nur das Doppelte seiner ersten Sprunghöhe zurück, nicht unendlich viel.

Satz 8.5 (Konvergenzkriterien).

Für eine Reihe $\sum_{k \geq 0} a_k$ gilt:

ORIGINAL: THEOREM
4.12

- (i) **Cauchysches Verdichtungskriterium:** Ist $a_k \geq 0$ monoton fallend, so konvergiert $\sum_{k \geq 1} a_k$ genau dann, wenn $\sum_{k \geq 1} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.
- (ii) **Direktes Vergleichskriterium:** Gilt $|a_k| \leq b_k$ und konvergiert $\sum b_k$, so konvergiert $\sum a_k$ absolut.
- (iii) **Leibniz-Kriterium** (alternierende Reihen): Ist (a_k) monoton fallend mit $a_k \rightarrow 0$, so konvergiert $\sum_{k \geq 0} (-1)^k a_k$.
- (iv) **Wurzelkriterium** (Cauchy-Hadamard): Ist $r := \limsup_k |a_k|^{1/k}$, so konvergiert $\sum a_k$ absolut für $r < 1$ und divergiert für $r > 1$.
- (v) **Quotientenkriterium:** Existiert $r := \lim_k |a_{k+1}/a_k|$, so konvergiert $\sum a_k$ absolut für $r < 1$ und divergiert für $r > 1$.
- (vi) **Integralkriterium:** Ist $a_k = f(k)$ für eine monoton fallende Funktion $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, so konvergiert $\sum_{k \geq 1} a_k$ genau dann, wenn $\int_1^\infty f(t) dt < \infty$.
- (vii) **Abelsches Kriterium:** Konvergiert $\sum a_k$ und ist (b_k) monoton und beschränkt, so konvergiert $\sum a_k b_k$.

Sieben Kriterien auf einmal wirken erschlagend – keine Sorge, niemand behält alle sieben gleichzeitig im Kopf, und man braucht sie auch nicht alle gleichzeitig. Diese Liste ist eher ein *Werkzeugkasten*: Bei einer konkreten Reihe probiert man in der Praxis meist zuerst das **Quotientenkriterium** („wie verhält sich der Term im Vergleich zu seinem Vorgänger?“) oder das **Vergleichskriterium** („liegt meine Reihe term-für-term unter einer bekannten, konvergenten Reihe – meistens einer geometrischen?“), weil diese beiden am schnellsten zu einer Antwort führen. Erst wenn diese beiden keine Entscheidung liefern (was gerade bei $\zeta(\alpha)$ nahe $\alpha = 1$ passiert, siehe Beispiel unten), zieht man die spezialisierteren Werkzeuge wie das Verdichtungs-, Integral- oder Leibniz-Kriterium heran. Wichtig zum Merken ist eigentlich nur die *Existenz* dieser Kriterien und ihre grobe Funktionsweise – die genauen Voraussetzungen kann man bei Bedarf jederzeit nachschlagen.

Beweisskizzen. (i) Gruppiert man die Terme in Zweierpotenz-Blöcke, $a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \dots + a_7) + \dots$, so zeigt die Monotonie sowohl $\sum_{k \geq 1} a_k \leq \sum_{k \geq 0} 2^k a_{2^k}$ als auch $\sum_{k \geq 0} 2^k a_{2^k} \leq 2 \sum_{k \geq 1} a_k$; die beiden Reihen konvergieren oder divergieren also gemeinsam.

(ii) Die Partialsummen $u_n = \sum_{k=0}^n b_k$ sind konvergent, also Cauchy; aus $|s_m - s_n| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^m b_k = u_m - u_n$ folgt, dass auch (s_n) Cauchy und damit konvergent

ist.

(iii) Für $m > n$ gilt $|s_m - s_n| \leq |a_{n+1}| \rightarrow 0$ (die Partialsummen „pendeln“ sich mit abnehmender Schrittweite ein), also ist (s_n) Cauchy.

(vii) Mit $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ liefert Abelsche partielle Summation $\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^n A_k (b_{k+1} - b_k)$; beide Terme rechts konvergieren, da (A_n) und (b_n) konvergieren und $\sum_k |b_{k+1} - b_k| = |b_m - b_n| \rightarrow 0$ (Monotonie von (b_n)).

ORIGINAL: EXERCISE 4.8

Die übrigen Aussagen (iv)–(vi) werden hier nicht im Detail ausgeführt. $\square$

Satz 8.6 (Euler-Reihe für e).

ORIGINAL: EXERCISE 4.9

Es gilt $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, wobei e die Eulersche Zahl aus Definition 7.19 ist.

Beweisskizze. Mit $s_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ und $t_n := (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{1}{n^p}$ zeigt die binomische Entwicklung $t_n \leq s_n$ (jeder Summand von t_n ist höchstens so groß wie der entsprechende von s_n), also $e = \lim t_n \leq \lim s_n$. Umgekehrt liefert für festes $m < n$ das Weglassen der höheren Terme in t_n eine Schranke $v_m \leq t_n$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} v_m = s_m$, also $s_m \leq e$ für jedes m und damit $\lim s_m \leq e$. $\square$

In Worten: Wir kennen e bereits als Grenzwert der Zinseszins-Folge $(1 + \frac{1}{n})^n$ (Definition 7.19) – dieser Satz liefert eine *zweite*, oft praktischere Beschreibung derselben Zahl als unendliche Summe von Kehrwerten der Fakultäten, $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$. Diese Reihe konvergiert sehr viel schneller (die Terme schrumpfen dank der Fakultät im Nenner rasant, vgl. Satz 7.18(vi)) und ist deshalb die Formel, mit der man e in der Praxis tatsächlich numerisch berechnet.

Beispiel 8.7 (Reihen in der Physik).

- (i) Physik: Der Wert $\zeta(2) = \pi^2/6$ (den wir hier nicht beweisen) taucht in der Herleitung des Stefan-Boltzmann-Gesetzes für die Schwarzkörperstrahlung auf.
- (ii) Physik: Die **Madelung-Konstante** eines Ionenkristalls wird als (bedingt konvergente, alternierende) Reihe über die elektrostatischen Wechselwirkungen aller Ionen mit einem Referenzion berechnet – ein Musterbeispiel für das Leibniz-Kriterium.
- (iii) Abstrakter: Das Quotientenkriterium ist meist der einfachste erste Test, aber liefert bei $r = 1$ *keine* Aussage – genau das passiert bei $\zeta(\alpha)$ für α nahe 1, wo man auf das Verdichtungs- oder Integralkriterium ausweichen muss.

$\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 8

Übung 8.8. Zeigen Sie mit dem Quotientenkriterium, dass $\sum_{k \geq 0} z^k / k!$ für jedes feste $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert.

Übung 8.9. Konvergiert $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)}$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Hinweis: Partialbruchzerlegung $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

Übung 8.10 (etwas schwerer). Zeigen Sie mit dem Leibniz-Kriterium, dass $\sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} / \sqrt{k}$ konvergiert, aber nicht absolut.

§ 8.1 ABSOLUT KONVERGENTE REIHEN

Absolut konvergente Reihen verhalten sich in vielerlei Hinsicht wie endliche Summen – insbesondere darf man ihre Reihenfolge vertauschen, was für bedingt konvergente Reihen bekanntlich *nicht* gilt (vgl. Ramanujans Umordnungstrick, s. u.).

Das mag zunächst überraschen: Bei einer *endlichen* Summe ist es völlig klar, dass die Reihenfolge der Summanden das Ergebnis nicht ändert ($3 + 5 + 7 = 7 + 3 + 5$). Bei einer *unendlichen* Summe ist das keineswegs mehr selbstverständlich – schließlich „addiert“ man dabei niemals wirklich fertig, sondern bildet nur einen Grenzwert, und Grenzwerte können empfindlich auf die Reihenfolge reagieren, in der man sich ihnen nähert. Der folgende Satz sagt: Solange absolute Konvergenz vorliegt, passiert genau das *nicht* – man darf beliebig umsortieren, ohne den Wert zu verändern, ganz wie bei einer endlichen Summe.

Lemma 8.11 (Umordnungssatz).

Ist $\sum_k a_k$ absolut konvergent mit Summe A , so gilt für jede Bijektion (Permutation) $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ auch $\sum_k a_{\sigma(k)} = A$. ORIGINAL: LEMMA 4.3

Beweis. Zu $\epsilon > 0$ wähle N_ϵ mit $\sum_{k=N_\epsilon}^\infty |a_k| < \epsilon/2$ und $|\sum_{k=1}^{N_\epsilon} a_k - A| < \epsilon/2$. Für N groß genug enthält $a_{\sigma(0)}, \dots, a_{\sigma(N)}$ alle Terme $a_1, \dots, a_{N_\epsilon}$ (und eventuell weitere); dann

$$\left| \sum_{i=0}^N a_{\sigma(i)} - A \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{N_\epsilon} a_j - A \right| + \sum_{j=N_\epsilon}^\infty |a_j| < \epsilon.$$

□

In einfachen Worten: Man kann sich eine absolut konvergente Reihe wie einen riesigen (aber insgesamt endlich schweren) Sack voller Münzen vorstellen, den man nach und nach auszählt – egal, in welcher Reihenfolge man die Münzen aus dem Sack nimmt und zählt, am Ende kommt immer derselbe Gesamtbetrag heraus, weil der Sack von vornherein nur endlich viel wiegt. Bei einer nur bedingt konvergenten Reihe (wie der alternierenden harmonischen Reihe) ist das *nicht* der Fall – dort „wiegt“ die Menge der positiven Münzen für sich genommen unendlich viel, ebenso die der negativen, und nur die *Reihenfolge*, in der sich Plus und Minus gerade noch rechtzeitig gegenseitig aufheben, hält die Summe endlich.

Ändert man diese Reihenfolge, kann man (wie Ramanujans Beispiel unten warnend zeigt) praktisch jedes beliebige Ergebnis erzwingen.

Satz 8.12 (Cauchy-Produkt).

ORIGINAL: THEOREM
4.13

Das **Cauchy-Produkt** zweier Reihen $\sum_k a_k$ und $\sum_k b_k$ ist die Reihe $\sum_p c_p$ mit $c_p := \sum_{k=0}^p a_k b_{p-k}$. Konvergieren beide Reihen und ist mindestens eine davon absolut konvergent, so konvergiert $\sum_p c_p$ gegen $(\sum_k a_k)(\sum_k b_k)$. Sind beide Reihen absolut konvergent, so auch ihr Cauchy-Produkt.

Beweisskizze. Mit Partialsummen A_n, B_n, C_n und der Annahme, dass $\sum_k a_k$ absolut konvergiert, schreibt man $C_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k}(B_k - B) + A_n B$. Da $B_n \rightarrow B$ und $\sum_k |a_k| < \infty$, wird der erste Summand für große n beliebig klein (die „späten“ a_{n-k} mit kleinem k sind winzig, weil $\sum |a_k|$ konvergiert; die „frühen“ a_{n-k} mit großem k treffen auf $B_k - B \approx 0$); der zweite Summand konvergiert gegen AB . Sind beide Reihen absolut konvergent, so liefert dieselbe Zerlegung, angewendet auf $\sum |c_p|$, die absolute Konvergenz des Produkts. $\square$

In einfachen Worten: Das **Cauchy-Produkt** ist genau das, was passiert, wenn man zwei unendliche Summen so miteinander multipliziert, wie man es von zwei Polynomen oder Klammern kennt („jeder mit jedem“, ausmultiplizieren) – man sammelt danach nur alle Terme, deren Indizes sich zu p addieren, in einem gemeinsamen Koeffizienten c_p . Der Satz garantiert, dass dieses naive „Ausmultiplizieren“ bei absolut konvergenten Reihen tatsächlich das richtige Ergebnis liefert (das Produkt der beiden Summen) und nicht etwa in ein sinnloses Durcheinander ausartet.

Satz 8.13 (Fubini-Tonelli für Reihen).

ORIGINAL: THEOREM
4.14

Für eine Doppelreihe komplexer Zahlen $(a_{ij})_{i,j \geq 0}$ mit $\sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} |a_{ij}| < \infty$ konvergiert die Reihe, und die Summationsreihenfolge darf vertauscht werden: $\sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} a_{ij} = \sum_{j \geq 0} \sum_{i \geq 0} a_{ij}$.

Beweisskizze. Die absolute Summierbarkeit liefert $M_i := \sum_{j \geq 0} |a_{ij}| < \infty$ mit $\sum_i M_i < \infty$. Die Partialsummen $f_n(m) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij}$ konvergieren für $m \rightarrow \infty$ gleichmäßig in m gegen $f(n) := \sum_{i=0}^n \sum_{j \geq 0} a_{ij}$ (die Restglieder werden durch $\sum_{i > n} M_i \rightarrow 0$ kontrolliert), und $f(n)$ ist selbst Cauchy (wieder wegen $\sum_i M_i < \infty$), konvergiert also gegen die Doppelsumme in der einen Reihenfolge. Ein symmetrisches Argument (Vertauschen der Rollen von i und j) liefert dasselbe für die andere Reihenfolge, und ein Dreiecksungleichungs-Sandwich zeigt, dass beide Grenzwerte übereinstimmen. $\square$

In einfachen Worten: Stell dir die Zahlen a_{ij} als Einträge einer riesigen (nach rechts und nach unten unendlich fortgesetzten) Tabelle vor. Man kann diese Tabelle entweder **zeilenweise** aufsummieren (erst jede Zeile für sich zu Ende summieren, dann diese Zeilensummen addieren) oder **spaltenweise** (umgekehrt). Bei einer endlichen Tabelle ist völlig klar, dass beide Vorgehensweisen dasselbe Gesamtergebnis liefern. Dieser Satz überträgt genau das auf unendliche Tabellen – *solange* man vorher sicherstellt, dass die Tabelle der Beträge insgesamt endlich aufsummiert (die Voraussetzung $\sum_i \sum_j |a_{ij}| < \infty$), und ist damit die zweidimensionale Version des Umordnungssatzes von eben.

Beispiel 8.14 (Ramanujans Summierestricks – eine Warnung).

Ohne absolute Konvergenz führt das „Umordnen“ divergenter Reihen zu berühmten Paradoxien: Formal manipuliert man $c := \sum_{k \geq 1} k = 1 + 2 + 3 + \dots$ via $c - 4c = \sum_{p \geq 1} (-1)^{p+1} p$ und identifiziert die rechte Seite (durch Einsetzen von $x = 1$ in $\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{p \geq 0} (-1)^p (p+1) x^p$, was *außerhalb* des Konvergenzradius dieser Potenzreihe liegt!) mit $\frac{1}{4}$, also $-3c = \frac{1}{4}$, das heißt $c = -\frac{1}{12}$. Dieses berühmte (aber streng genommen bedeutungslose) Resultat $\sum_{k \geq 1} k = -\frac{1}{12}$ taucht überraschenderweise in der Bosonischen Stringtheorie wieder auf – dort jedoch über eine andere, rigorose Regularisierungsmethode (Zeta-Funktions-Regularisierung), nicht über dieses naive Umordnen. $\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 8.1

Übung 8.15. Warum darf man beim Beweis von Lemma 8.11 nicht auf die Voraussetzung „absolut konvergent“ verzichten?

Übung 8.16. Berechnen Sie die ersten drei Koeffizienten c_0, c_1, c_2 des Cauchy-Produkts von $\sum_k q^k$ mit sich selbst (für festes $0 < q < 1$).

Übung 8.17 (etwas schwerer). Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkt zweier absolut konvergenter geometrischer Reihen $\sum_k q^k$ und $\sum_k q^k$ die Reihe $\sum_p (p+1)q^p$ ergibt.

§ 8.2 POTENZREIHEN**Lemma 8.18 (Konvergenzverhalten von Potenzreihen).**

Es sei $P(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$ eine **Potenzreihe** mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Konvergiert $P(z)$ für ein festes z , so konvergiert $P(z')$ *absolut* für jedes z' mit $|z' - z_0| < |z - z_0|$.

ORIGINAL: LEMMA 4.4

Beweis. Aus der Konvergenz von $P(z)$ folgt $c_n (z - z_0)^n \rightarrow 0$, also $|c_n (z - z_0)^n| < S$ für ein festes S . Für $|z' - z_0| < u < |z - z_0|$ gilt dann $\sum_{n=0}^N |c_n (z' - z_0)^n| \leq S \sum_{n=0}^N \left(\frac{|z' - z_0|}{|z - z_0|} \right)^n$, eine geometrische Reihe mit Quotient < 1 , also monoton und beschränkt, damit konvergent. $\square$

In einfachen Worten: Eine **Potenzreihe** ist eine unendliche, verallgemeinerte Version eines Polynoms – statt bei einem festen Grad aufzuhören, geht die Summe der Potenzen $(z - z_0)^n$ immer weiter. Dieses Lemma sagt: Findest du *einen einzigen* Punkt z , an dem die Reihe konvergiert, hast du automatisch schon für *alle* Punkte gewonnen, die näher am Entwicklungspunkt z_0 liegen als z – die Konvergenz „strahlt“ sozusagen kreisförmig vom Zentrum z_0 nach außen ab, bis sie irgendwann (wie weit, sagt gleich der Konvergenzradius) abbricht.

Definition 8.19 (Konvergenzradius).

Der **Konvergenzradius** von $P(z) = \sum_n c_n (z - z_0)^n$ ist $r := \sup\{|z - z_0| \mid |P(z)| < \infty\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$: die Reihe konvergiert (absolut) für $|z - z_0| < r$ und divergiert für $|z - z_0| > r$. Der

ORIGINAL: DEFINITION 4.7

Konvergenzkreis ist die offene Kreisscheibe $B_r(z_0)$. Es gilt die **Cauchy-Hadamard-Formel**

$$\frac{1}{r} = \limsup_n |c_n|^{1/n},$$

und, falls der Grenzwert existiert, alternativ $r = \lim_n |c_n/c_{n+1}|$. $\triangle$

In einfachen Worten, mit einem Blick auf die Abbildung gleich unten: Der **Konvergenzradius** r ist genau der Radius eines „Vertrauenskreises“ um den Entwicklungspunkt z_0 – innerhalb dieses Kreises (dem Konvergenzkreis) verhält sich die Potenzreihe brav und konvergiert sogar absolut, außerhalb divergiert sie hoffnungslos, und exakt auf dem Rand selbst kann buchstäblich alles passieren (mal konvergiert sie dort, mal nicht – dazu sagt der Satz bewusst nichts). Man kann sich das wie den Radius vorstellen, bis zu dem eine lokale, um z_0 zentrierte Beschreibung noch verlässlich ist, ganz ähnlich wie eine Landkarte, die nur innerhalb eines bestimmten Umkreises um einen Ort noch maßstabgetreu ist.

Lemma 8.20 (gleichmäßige Approximation im Konvergenzkreis).

ORIGINAL: LEMMA 4.5

Für $|z - z_0| \leq \rho < r$ gibt es eine Konstante C mit $|P(z) - \sum_{n=0}^N c_n(z - z_0)^n| \leq C |z - z_0|^{N+1}$ für alle N .

Beweis. Wähle u mit $\rho < u < r$; dann ist $|c_n u^n|$ durch ein festes S beschränkt, und

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \right| \leq S \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{|z - z_0|}{u} \right)^n \leq |z - z_0|^{N+1} \frac{S}{u^{N+1}} \cdot \frac{1}{1 - \rho/u}.$$

□

Dieses Lemma ist eher ein technisches Handwerkszeug für spätere Kapitel als eine Aussage, die man sich sofort einprägen muss – die Kernaussage in Worten: Bricht man eine Potenzreihe nach N Termen ab (wie beim Taylor-Polynom, das man aus der Schule vielleicht schon kennt), wird der dabei gemachte Fehler umso kleiner, je näher man am Entwicklungspunkt z_0 bleibt *und* je mehr Terme man mitnimmt – und zwar nicht irgendwie, sondern geometrisch schnell. Das ist genau der mathematische Grund, warum „man nimmt nur die ersten paar Terme der Taylor-Reihe“ in der Physik so gut funktioniert, solange man sich nahe genug am Entwicklungspunkt bewegt (vgl. die harmonische Näherung im Beispiel gleich).

Beispiel 8.21 (Potenzreihen – einfach bis abstrakt).

- (i) Ganz einfach: Die geometrische Reihe $\sum_{n \geq 0} z^n$ hat Konvergenzradius $r = 1$.
- (ii) Physik: Die Taylor-Entwicklung des harmonischen Potentials um ein Minimum, $V(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n \approx c_0 + c_2 x^2$ für kleine Auslenkungen x , ist eine Potenzreihe – die Näherung des harmonischen Oszillators besteht gerade darin, nur die ersten Terme zu behalten.

- (iii) Abstrakter: Lemma 8.20 sagt, dass die Approximation durch die N -te Partialsumme innerhalb des Konvergenzkreises *geometrisch* gut wird – das rechtfertigt, warum abgebrochene Potenzreihen (wie die harmonische Näherung) für hinreichend kleine Auslenkung sinnvoll sind.

△

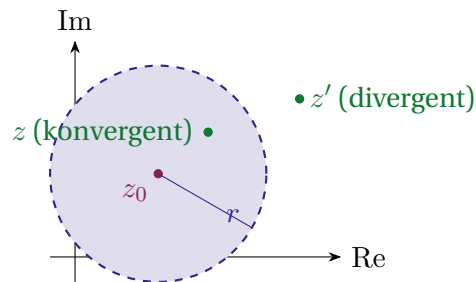


Abbildung 3.4: Der Konvergenzkreis $B_r(z_0)$ einer Potenzreihe (Definition 8.19): innerhalb konvergiert sie absolut, außerhalb divergiert sie – auf dem Rand selbst ist alles möglich.

ÜBUNGEN ZU § 8.2

Übung 8.22. Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{n \geq 0} n z^n$.

Übung 8.23. Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{n \geq 0} z^n/n!$ (Sie werden das Ergebnis in § 8.3 wiedererkennen).

Übung 8.24 (etwas schwerer). Zeigen Sie mit der Cauchy-Hadamard-Formel, dass $\sum_{n \geq 0} 2^n z^n$ Konvergenzradius $\frac{1}{2}$ hat.

§ 8.3 DIE EXPONENTIALFUNKTION

Definition 8.25 (Exponentialfunktion).

Die **Exponentialfunktion** ist definiert als die Potenzreihe

ORIGINAL: TEXT VOR
PROPOSITION 4.1

$$\exp(z) \equiv e^z := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

mit Konvergenzradius $r = \infty$ (aus $\lim_n \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0$, also $1/r = 0$) – die Reihe konvergiert also für *jedes* $z \in \mathbb{C}$. △

In einfachen Worten: Das ist dieselbe Konstante e von vorhin, jetzt aber zu einer richtigen *Funktion* ausgebaut – man ersetzt in der Reihe $\sum 1/n!$ (Satz 8.6) einfach die 1 im Zähler durch die n -te Potenz einer beliebigen Zahl z . Der Konvergenzradius $r = \infty$ bedeutet dabei etwas sehr Angenehmes: Anders als bei den meisten Potenzreihen (die nur innerhalb eines

endlichen „Vertrauenskreises“ verlässlich sind) gibt es hier *überhaupt keine* Einschränkung – die Exponentialreihe konvergiert absolut für jede reelle oder komplexe Zahl z , egal wie groß.

Satz 8.26 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion).

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$; insbesondere ist $e^z \neq 0$ für alle z . Außerdem gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Beweisskizze. Das Cauchy-Produkt (Satz 8.12) von e^{z_1} und e^{z_2} (beide absolut konvergent) ist

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} z_1^p z_2^{n-p} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n = e^{z_1+z_2}$$

(binomischer Lehrsatz). Mit $z_2 = -z_1$ folgt $e^z e^{-z} = e^0 = 1$, also insbesondere $e^z \neq 0$. Für die zweite Aussage vergleicht man die binomische Entwicklung von $(1 + z/n)^n$ mit den ersten N Termen der Exponentialreihe: Für festes N und $n \rightarrow \infty$ streben die ersten N Terme der binomischen Entwicklung gegen die entsprechenden Terme von e^z (die Faktoren $(1 - \frac{k-1}{n})$ gehen gegen 1), während der Rest (sowohl der binomischen Entwicklung als auch der Exponentialreihe ab Grad N) durch die absolute Konvergenz der Exponentialreihe beliebig klein gemacht werden kann. $\square$

In einfachen Worten: Die **Funktionalgleichung** $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ ist die Eigenschaft, die man von einer „Wachstumsfunktion“ naiv erwarten würde – wächst etwas erst mit Rate z_1 und dann (unabhängig davon) noch mit Rate z_2 , ist das Gesamtwachstum genau die Summe der beiden Raten im Exponenten, nicht ihr Produkt oder sonst etwas Kompliziertes; man „stapelt“ Wachstumsprozesse einfach durch Addition der Exponenten. Und die zweite Aussage, die Grenzwertformel $e^z = \lim_n (1 + z/n)^n$, ist genau unsere alte Bekannte, die Zinseszins-Formel für e (Definition 7.19), nur jetzt mit einer beliebigen Wachstumsrate z statt nur $z = 1$ – sie beschreibt kontinuierliche Verzinsung (oder allgemeiner: kontinuierliches statt schrittweises Wachstum) mit Rate z .

Beispiel 8.27 (die Exponentialfunktion in der Physik).

- (i) Ganz einfach: Radioaktiver Zerfall $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ und die barometrische Höhenformel $p(h) = p_0 e^{-h/H}$ sind Auswertungen von $\exp$ an reellen Stellen.
- (ii) Physik: Für rein imaginäres $z = i\varphi$ liefert dieselbe Reihe (nach Gruppieren von Real- und Imaginärteil, siehe späteres Kapitel) die **Eulersche Formel** $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ aus § 3.6 – die Exponentialfunktion, die Trigonometrie und die komplexen Zahlen sind letztlich ein und dasselbe Objekt.
- (iii) Abstrakter: Die Grenzwertformel $e^z = \lim_n (1 + z/n)^n$ ist genau die kontinuierliche Verzinsung (oder allgemeiner: der Übergang von diskreten zu kontinuierlichen Wachstumsprozessen) – n Zinsperioden pro Zeiteinheit mit Zinssatz z/n liefern im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ exponentielles Wachstum mit Rate z .

**ÜBUNGEN ZU § 8.3**

Übung 8.28. Zeigen Sie mit der Funktionalgleichung, dass $e^{nz} = (e^z)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Übung 8.29. Berechnen Sie die ersten vier Terme der Exponentialreihe für $e^{0,1}$ und vergleichen Sie mit dem Taschenrechnerwert.

Übung 8.30 (etwas schwerer). Zeigen Sie, dass $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht injektiv ist.

Hinweis: Was ist $e^{2\pi i}$, sobald man weiß, dass $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ gilt?

4 Vektorräume, erste Begegnung

ORIGINAL: KAPITEL 5

Vektorräume sind das mathematische Rückgrat fast der gesamten Physik: Kräfte, Geschwindigkeiten, elektromagnetische Felder und Quantenzustände sind allesamt Vektoren in einem geeigneten Vektorraum. Dieses Kapitel entspricht Kapitel 5 (*Vector spaces, first contact*) des Originalskripts und legt die Grundlagen; eine ausführlichere, eigenständige Behandlung der linearen Algebra liefert ein späteres Kapitel.

Bevor es formal wird, ganz aus der Schulperspektive: Einen **Vektor** kennst du vermutlich schon als „Pfeil“ – ein Pfeil auf einem Blatt Papier oder im Raum, mit einer Länge und einer Richtung, so wie man Geschwindigkeit oder Kraft in der Physik einzeichnet. Zwei solche Pfeile kann man aneinanderhängen (addieren) und man kann einen Pfeil strecken oder stauchen oder umdrehen, indem man ihn mit einer Zahl multipliziert (skalieren). Genau diese zwei Operationen – addieren und skalieren – sind der ganze Kern eines **Vektorraums**. Das Erstaunliche, was diesen Begriff so mächtig macht: Die formale Definition unten funktioniert nicht nur für Pfeile im dreidimensionalen Raum, sondern für erstaunlich viele andere Dinge, die auf den ersten Blick nichts mit Pfeilen zu tun haben – Polynome, Funktionen, sogar Quantenzustände –, solange man dort nur sinnvoll „addieren“ und „skalieren“ kann.

§ 9 VEKTORRÄUME

Definition 9.1 (Vektorraum).

Ein **Vektorraum** V über einem Körper $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ (dem **Skalkörper**) ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen:

- einer **Addition** $+: V \times V \rightarrow V$, sodass $(V, +, 0)$ eine abelsche Gruppe ist (Definition 3.15);
- einer **Skalarmultiplikation** $\cdot: F \times V \rightarrow V$ mit $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$, $1 \cdot x = x$, sowie den Distributivgesetzen $\alpha \cdot (x + y) = \alpha x + \alpha y$ und $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha x + \beta x$.

△

In einfachen Worten, Zeile für Zeile: Die **Addition** verlangt nur, dass sich zwei Vektoren zu einem neuen Vektor zusammenfügen lassen, mit den vertrauten Rechenregeln einer abelschen Gruppe (es gibt einen Nullvektor, jeder Vektor hat einen Gegenvektor, die Reihenfolge beim Addieren ist egal – wie beim „Pfeile aneinanderhängen“ von eben). Die **Skalarmultiplikation** verlangt, dass man jeden Vektor mit einer Zahl aus F strecken/stauchen kann, und dass sich dieses Strecken ganz normal verhält: zweimal hintereinander skalieren ist dasselbe

ORIGINAL: DEFINITION
5.1

wie einmal mit dem Produkt der beiden Faktoren zu skalieren ($\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$), mit dem Faktor 1 ändert sich nichts, und Skalieren „verträgt sich“ mit Addieren in beide Richtungen (die beiden Distributivgesetze) – ganz genau so, wie man es von Pfeilen erwarten würde, die man streckt oder zwei Pfeile, die man vor oder nach dem Zusammenrechnen skaliert.

Beispiel 9.2 (Vektorräume – einfach bis abstrakt).

- (i) Ganz einfach: $\mathbb{R}^D$ mit komponentenweiser Addition und Skalierung ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$; ebenso $\mathbb{C}^D$ über $\mathbb{C}$.
- (ii) Physik: Kräfte, Geschwindigkeiten und elektrische Feldstärken sind Vektoren in $\mathbb{R}^3$; ein quantenmechanischer Zustand $|\psi\rangle$ ist ein Vektor in einem komplexen Vektorraum (dem Hilbertraum des Systems).
- (iii) Abstrakter: Aus den Axiomen folgt bereits $0 \cdot x = 0$ für jeden Vektor x (denn $\alpha x = (\alpha + 0)x = \alpha x + 0 \cdot x$, also $0 \cdot x = 0$ nach Kürzen in der abelschen Gruppe $(V, +)$) – eine Konsequenz, kein zusätzliches Axiom.

△

Definition 9.3 (Norm, Banachraum).

Eine **Norm** auf V ist eine Funktion $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$, $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ und $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Jeder normierte Vektorraum ist via $d(x, y) = \|x - y\|$ ein metrischer Raum; ein **Banachraum** ist ein Cauchy-vollständiger normierter Vektorraum.

ORIGINAL: DEFINITION
5.2

△

In einfachen Worten: Eine **Norm** ist einfach eine verallgemeinerte „Länge“ eines Vektors – bei einem Pfeil im Raum genau die Länge, die man mit dem Lineal (oder Pythagoras) misst, aber der Begriff funktioniert genauso für Vektoren, die gar keine geometrischen Pfeile sind (etwa Funktionen, siehe spätere Kapitel). Die drei Bedingungen sind genau das, was man von einer „Länge“ erwarten würde: Nur der Nullvektor hat Länge 0, das Strecken eines Vektors um den Faktor α streckt auch seine Länge um $|\alpha|$, und die Dreiecksungleichung gilt genau wie beim gewöhnlichen Abstand (vgl. Definition 5.1) – kein Wunder, denn eine Norm *erzeugt* über $d(x, y) = \|x - y\|$ direkt eine Metrik. Ein **Banachraum** ist dann nichts weiter als ein normierter Vektorraum, der – im Sinne von Kapitel 3 – „keine Löcher“ hat: Jeder Wanderer im Nebel (jede Cauchy-Folge von Vektoren) findet dort tatsächlich einen Grenzwert.

Beispiel 9.4 (Banachräume und ihre Grenzen).

$\mathbb{R}^D$ und $\mathbb{C}^D$ sind mit jeder p -Norm (Definition 5.12) Banachräume. Interessanterweise ist $\mathbb{Q}^D$ mit derselben Norm ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$, aber *kein* Banachraum, da $\mathbb{Q}$ selbst nicht Cauchy-vollständig ist (Bemerkung 6.17) – Vollständigkeit ist eine Eigenschaft des Skalarkörpers, die sich auf den ganzen Vektorraum überträgt. In Worten: Löchriger Skalarkörper bedeutet löchrigen Vektorraum – die „Löcher“ von $\mathbb{Q}$ (wie das fehlende $\sqrt{2}$) pflanzen sich direkt in jeden Vektorraum über $\mathbb{Q}$ fort.

△

Lemma 9.5 (direkte Summenzerlegung).

ORIGINAL: LEMMA 5.1

Es seien Y_1, Y_2 Untervektorräume von X mit $Y_1 + Y_2 := \{y_1 + y_2 \mid y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2\} = X$. Ist $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$, so ist die Zerlegung $x = y_1 + y_2$ für jedes $x \in X$ eindeutig; man schreibt dann $X = Y_1 \oplus Y_2$.

Beweis. Aus zwei Zerlegungen $x = y_1 + y_2 = y'_1 + y'_2$ folgt $y_1 - y'_1 = y'_2 - y_2 \in Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$, also $y_1 = y'_1$ und $y_2 = y'_2$. $\square$

In einfachen Worten: Das ist genau die vertraute Situation, wenn man einen Vektor in $\mathbb{R}^2$ in seine x - und seine y -Komponente zerlegt – Y_1 wäre dann die x -Achse, Y_2 die y -Achse, und jeder Punkt der Ebene lässt sich auf *genau eine* Weise als Summe eines Punktes auf der x -Achse und eines Punktes auf der y -Achse schreiben. Die Bedingung $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$ ist dabei entscheidend: Hätten sich die beiden Achsen ein Stück gemeinsam „geteilt“ (mehr als nur den Nullpunkt), gäbe es plötzlich mehrere verschiedene Möglichkeiten, denselben Punkt aufzuteilen – die Eindeutigkeit ginge verloren.

Definition 9.6 (äußere direkte Summe).

ORIGINAL: DEFINITION 5.3

Für Vektorräume Y_1, Y_2 über F ist die **(äußere) direkte Summe** $Y_1 \oplus Y_2$ die Menge der Paare (y_1, y_2) mit komponentenweiser Addition und Skalierung. $\triangle$

In einfachen Worten: Während beim vorigen Lemma zwei *bereits existierende* Unterräume eines größeren Raums X zusammengesetzt wurden („innere“ direkte Summe), baut man hier aus zwei komplett unabhängigen Vektorräumen Y_1, Y_2 einen brandneuen, größeren Vektorraum – man packt einfach je ein Element aus jedem der beiden nebeneinander in ein Paar (y_1, y_2) , ähnlich wie beim kartesischen Produkt von Mengen (Definition 2.4), nur dass man hier zusätzlich komponentenweise addieren und skalieren darf. Das direkt folgende Beispiel (Orts- und Impulsraum eines Teilchens) macht diese Konstruktion sehr konkret.

Beispiel 9.7 (direkte Summen in der Physik).

Der Phasenraum eines Teilchens, $\mathbb{R}_{\text{Ort}}^3 \oplus \mathbb{R}_{\text{Impuls}}^3 \cong \mathbb{R}^6$, ist eine direkte Summe. Ebenso zerfällt der Raum der quadratischen Matrizen in symmetrische $\oplus$ antisymmetrische Matrizen – eine Zerlegung, die in der Quantenmechanik dem Unterschied zwischen bosonischen (symmetrischen) und fermionischen (antisymmetrischen) Vielteilchenzuständen entspricht. $\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 9

Übung 9.8. Zeigen Sie $(-1) \cdot x = -x$ für jeden Vektor x in einem Vektorraum V .

Übung 9.9. Ist die Menge der Polynome vom Grad genau 2 (nicht höchstens 2) ein Vektorraum? Begründen Sie.

Übung 9.10 (*etwas schwerer*). Zeigen Sie, dass jede Norm $\|\cdot\|$ auf V eine stetige Funktion $V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist (analog zu Satz 6.8).

§ 10 HAMELBASEN, DIMENSION EINES VEKTORRAUMS

Definition 10.1 (Hamelbasis, Spann).

Eine **Hamelbasis** eines Vektorraums V ist eine Teilmenge $B \subset V$, die

ORIGINAL: DEFINITION
5.4

- **linear unabhängig** ist: für jede endliche Teilmenge $\{e_1, \dots, e_n\} \subset B$ folgt aus $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$ bereits $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$;
- **aufspannend** ist: jedes $v \in V$ ist eine endliche Linearkombination von Vektoren aus B .

Der **Spann** $\text{Span}(S)$ einer Menge S ist die Menge aller endlichen Linearkombinationen von Vektoren aus S ; er ist stets ein Untervektorraum. $\triangle$

In einfachen Worten, mit einem LEGO-Bild: Stell dir die Vektoren aus B als eine Grundausrüstung von LEGO-Bausteinen vor, aus denen du – indem du sie in beliebigen Mengen (α_i) nimmst und zusammensteckst (addierst) – *jedes* Objekt im ganzen Vektorraum V bauen kannst. Das ist genau die Bedingung **aufspannend**: kein Vektor in V bleibt unerreichbar. **Linear unabhängig** heißt dagegen, dass keiner deiner Grundbausteine *überflüssig* ist – du kannst keinen der Bausteine aus B selbst aus den übrigen Bausteinen von B zusammenbauen (die einzige Möglichkeit, mit den Bausteinen aus B die Null zu bauen, ist, gar nichts zu benutzen, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$). Eine **Hamelbasis** ist also eine Grundausrüstung, die beides gleichzeitig erfüllt: groß genug, um alles zu bauen, aber schlank genug, dass kein Baustein verzichtbar wäre – die perfekt bemessene Werkzeugkiste sozusagen. Der **Spann** $\text{Span}(S)$ ist dann einfach „alles, was sich aus den Bausteinen in S bauen lässt“, egal ob S selbst schon unabhängig ist oder nicht.

Bemerkung 10.2.

Ist S linear unabhängig und $w \notin \text{Span}(S)$, $w \neq 0$, so ist auch $S \cup \{w\}$ linear unabhängig: In $\alpha w + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$ muss $\alpha \neq 0$ sein (sonst wären die e_i nicht unabhängig), also $w = -\frac{\alpha_1}{\alpha} e_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha} e_n \in \text{Span}(S)$ – im Widerspruch zur Annahme. $\triangle$

In Worten: Diese Bemerkung sagt nur, dass man eine unabhängige Bausteinsammlung S gefahrlos um einen weiteren Baustein w erweitern kann, *solange* sich w nicht bereits aus den vorhandenen Bausteinen zusammenbauen ließe – ein völlig neuer Baustein macht die Sammlung nie „redundant“. Genau dieser einfache Fakt ist der Schlüssel zum folgenden Existenzsatz: Man baut sich eine unabhängige Sammlung immer weiter aus, so lange es noch etwas Neues hinzuzufügen gibt.

Satz 10.3 (jeder Vektorraum besitzt eine Hamelbasis).

Jeder Vektorraum besitzt eine Hamelbasis, und alle Hamelbasen eines gegebenen Vektorraums sind gleichmächtig. Diese Kardinalzahl heißt die **Dimension** des Vektorraums.

ORIGINAL: THEOREM 5.1

Beweisskizze. Dies ist genau die Anwendung von Zorns Lemma (Lemma 2.35), die wir dort bereits angekündigt hatten! Sei $\mathcal{X}$ die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen von V , geordnet durch $\subset$. Für jede Kette $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ ist $S_{\mathcal{Y}} := \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y$ selbst linear unabhängig (jede endliche Teilmenge von $S_{\mathcal{Y}}$ liegt schon in einem einzelnen $Y \in \mathcal{Y}$, da $\mathcal{Y}$ eine Kette ist) und

damit eine obere Schranke für $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{X}$. Zorns Lemma liefert ein maximales Element $S_{\max} \in \mathcal{X}$. Wäre $S_{\max}$ nicht aufspannend, gäbe es $w \notin \text{Span}(S_{\max})$, und nach obiger Bemerkung wäre $S_{\max} \cup \{w\}$ linear unabhängig und echt größer – Widerspruch zur Maximalität. Also ist $S_{\max}$ eine Hamelbasis. Dass alle Hamelbasen gleichmächtig sind, zeigt man abermals mit Zorns Lemma im Unendlichdimensionalen; im endlichdimensionalen Fall folgt es aus Korollar 11.2 weiter unten. $\square$

In einfachen Worten: Dieser Beweis ist genau die Bauklötzchen-Turm-Situation aus Zorns Lemma (§ 2.4) wieder – man fängt mit gar keinen Bausteinen an (oder irgendeiner kleinen unabhängigen Sammlung) und fügt immer weiter neue, unabhängige Bausteine hinzu, so lange noch etwas fehlt. Zorns Lemma garantiert, dass dieser Prozess (auch wenn er unendlich oft weiterlaufen müsste) irgendwo an einer *maximalen* Sammlung endet – und maximal zu sein bedeutet hier automatisch, dass nichts mehr fehlt, also dass man bereits eine vollständige Basis in der Hand hat. Die **Dimension** ist dann einfach die Anzahl der Bausteine in einer solchen Basis – salopp gesagt: die Anzahl der „wirklich unabhängigen Richtungen“, die man braucht, um jeden Punkt im Raum zu erreichen. Der Satz sichert zusätzlich zu, dass es egal ist, *welche* Basis man wählt – die Anzahl der benötigten Bausteine ist immer dieselbe, ganz gleich wie man sie aussucht.

Beispiel 10.4 (Hamelbasen in der Physik).

Für einen quantenmechanischen Hilbertraum bilden die Energie-Eigenzustände $\{|n\rangle\}$ eines gebundenen Systems (etwa des harmonischen Oszillators) eine Basis – allerdings im unendlichdimensionalen Fall genauer eine **Hilbertraum-Basis** (mit unendlichen statt nur endlichen Linearkombinationen erlaubt), keine Hamelbasis im strengen Sinn dieses Abschnitts. Für praktische Zwecke ist dieser Unterschied meist unerheblich; wir konzentrieren uns ab hier auf den *endlichdimensionalen* Fall, der auch der praktisch wichtigere ist. $\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 10

Übung 10.5. Ist $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie.

Übung 10.6. Zeigen Sie, dass $\text{Span}(S)$ für jede Menge $S \subset V$ tatsächlich ein Untervektorraum ist.

§ 11 ENDLICHDIMENSIONALE VEKTORRÄUME

Satz 11.1 (Steinitzscher Austauschatz).

ORIGINAL: THEOREM 5.2

Es seien $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ linear unabhängig und $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ aufspannend in V . Dann gilt $m \leq n$, und es gibt $W' \subset W$ mit $|W'| = n - m$, sodass $U \cup W'$ aufspannt.

Beweisskizze. Man zeigt induktiv, dass sich für jedes $k \leq m$ die Menge $\{u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$ (nach geeigneter Umnummerierung der w_i) aufspannend wählen lässt: Ist das für k gezeigt, schreibt man u_{k+1} als Linearkombination von $u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, \dots, w_n$; da die u_i unabhän-

gig sind, muss dabei ein Koeffizient bei einem w_j ($j > k$) ungleich Null sein (insbesondere folgt $k + 1 \leq n$, also $m \leq n$), und man kann nach diesem w_j auflösen und es gegen u_{k+1} „austauschen“. $\square$

In einfachen Worten: Dieser Satz ist das eigentliche Arbeitspferd hinter dem gesamten Dimensionsbegriff, auch wenn sein Beweis auf den ersten Blick technisch wirkt. Er sagt zwei Dinge: Erstens kann eine unabhängige Bausteinsammlung (U) nie größer sein als eine Sammlung, die bereits alles aufspannt (W) – das leuchtet ein, denn sonst müsste einer der „unabhängigen“ Bausteine sich doch aus den anderen zusammenbauen lassen. Zweitens, und das ist der raffiniertere Teil: Man kann tatsächlich Baustein für Baustein aus U gegen einen passenden Baustein aus W „eintauschen“, ohne dass man dabei die Fähigkeit verliert, alles aufzuspannen – ein bisschen wie beim Tauschhandel, bei dem man nach und nach seine eigenen (unabhängigen) Gegenstände gegen gleichwertige Gegenstände aus einem fremden, aber vollständigen Warenlager eintauscht.

Korollar 11.2 (Eigenschaften endlichdimensionaler Vektorräume).

Es sei X ein Vektorraum mit endlicher Hamelbasis. Dann:

ORIGINAL: COROLLARY
5.1

- (i) Je zwei Basen von X haben dieselbe Anzahl Elemente $\dim X$.
- (ii) Jede Menge von $\dim X$ linear unabhängigen Vektoren ist bereits eine Basis; ebenso jede aufspannende Menge von $\dim X$ Vektoren.
- (iii) Jede Basis eines Untervektorraums $Y \subset X$ lässt sich zu einer Basis von X ergänzen; insbesondere $Y = X \Leftrightarrow \dim Y = \dim X$.
- (iv) Für Untervektorräume $Y_1, Y_2 \subset X$ gilt $\dim X + \dim(Y_1 \cap Y_2) \geq \dim Y_1 + \dim Y_2$.

Beweisskizze. (i) Für zwei Basen B_1, B_2 liefert der Austauschsatz (angewendet in beide Richtungen) $|B_1| \leq |B_2|$ und $|B_2| \leq |B_1|$.

(ii) Ist U eine $\dim X$ -elementige unabhängige Menge, so liefert der Austauschsatz (angewendet mit einer Basis W) $U \cup W' = U$ (da $|W'| = |W| - |U| = 0$) aufspannend. Für die zweite Aussage: wäre eine $\dim X$ -elementige aufspannende Menge W nicht unabhängig, gäbe es eine echt kleinere aufspannende Teilmenge $W' \subsetneq W$, und der Austauschsatz lieferte dann eine unabhängige, aufspannende (also Basis-)Menge mit weniger als $\dim X$ Elementen – Widerspruch zu (i).

(iii) Man tauscht die Elemente einer Basis von Y gegen Elemente einer Basis von X aus (Austauschsatz) und erhält eine aufspannende Menge von $\dim X$ Elementen, die nach (ii) eine Basis ist und die ursprüngliche Basis von Y enthält.

(iv) Man ergänzt eine Basis von $Y_1 \cap Y_2$ getrennt zu Basen von Y_1 und von Y_2 ; die Vereinigung dieser beiden Ergänzungen zusammen mit der Basis von $Y_1 \cap Y_2$ ist linear unabhängig in X , was die Ungleichung liefert. $\square$

In einfachen Worten, die vier Aussagen einzeln: (i) sagt nur, was wir eigentlich schon vermutet hatten – egal welche Basis man wählt, sie hat immer dieselbe Anzahl Bausteine, sodass

„die Dimension“ überhaupt eine wohldefinierte Zahl ist. (ii) ist eine praktische Abkürzung fürs Nachprüfen: Hat man schon genau $\dim X$ unabhängige Vektoren (oder genau $\dim X$ aufspannende Vektoren) beisammen, muss man *nicht mehr extra* die jeweils andere Eigenschaft nachrechnen – sie kommt automatisch mit. (iii) sagt, dass man eine Basis eines kleineren Unterraums immer zu einer Basis des ganzen Raums „auffüllen“ kann, so wie man eine unvollständige Werkzeugkiste einfach mit den fehlenden Werkzeugen ergänzt. Und (iv) ist eine Art Bausteine-Buchhaltung für zwei sich überlappende Unterräume, die aussagt, dass sich die Dimensionen nicht beliebig verschwenderisch verhalten können – ähnlich der Inklusions-Exklusions-Formel für die Größe zweier sich überschneidender Mengen.

Definition 11.3 (Tensorprodukt von Vektorräumen).

Sind $\{x_i\}_{i \in I}$ und $\{y_j\}_{j \in J}$ Basen von X bzw. Y , so ist das **Tensorprodukt** $X \otimes Y$ der Spann aller Paare $x_i \otimes y_j$:

$$X \otimes Y := \text{Span}\{x_i \otimes y_j \mid i \in I, j \in J\}, \quad \dim(X \otimes Y) = \dim(X) \cdot \dim(Y).$$

$X \otimes Y$ enthält die „einfachen“ Tensoren $v \otimes w$ mit $v \in X, w \in Y$, aber auch allgemeinere Linearkombinationen $\sum_{i,j} \alpha_{ij} x_i \otimes y_j$, die sich nicht als einzelnes $v \otimes w$ schreiben lassen. $\triangle$

Diese Definition gehört zu den abstraktesten in diesem Kapitel – keine Sorge, wenn sie zunächst befremdlich wirkt, das Beispiel gleich im Anschluss macht sie sehr konkret. In einfachen Worten der Unterschied zur direkten Summe von § 9: Die **direkte Summe** $Y_1 \oplus Y_2$ packt Elemente aus Y_1 und Y_2 nur *nebeneinander* (die Dimensionen *addieren* sich, $\dim(Y_1 \oplus Y_2) = \dim Y_1 + \dim Y_2$) – wie zwei getrennte Werkzeugkisten, die man einfach nebeneinanderstellt. Das **Tensorprodukt** $X \otimes Y$ dagegen bildet *alle möglichen Paarungen* eines Basisvektors aus X mit einem Basisvektor aus Y – wie eine vollständige Multiplikationstabelle, in der jede Zeile einem x_i und jede Spalte einem y_j entspricht, und jedes Feld der Tabelle sein eigener, neuer Basisvektor $x_i \otimes y_j$ ist. Deshalb *multiplizieren* sich hier die Dimensionen statt sich zu addieren ($\dim(X \otimes Y) = \dim(X) \cdot \dim(Y)$) – ein 3-dimensionaler und ein 2-dimensionalen Raum ergeben zusammen einen 6-dimensionalen Tensorproduktraum, nicht nur einen 5-dimensionalen wie bei der direkten Summe.

Beispiel 11.4 (Tensorprodukte in der Physik).

- (i) Physik, fundamental: Der Hilbertraum eines Zweiteilchensystems ist das Tensorprodukt $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ der Einzel-Hilberträume; ein Zustand der Form $|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$ heißt **Produktzustand**.
- (ii) Physik: Ein allgemeiner Zustand in $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ lässt sich *nicht* immer als einzelnes $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ schreiben – genau das ist die mathematische Definition von **Verschränkung** (Entanglement): ein Zustand wie $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B)$ ist verschränkt.
- (iii) Abstrakter: $\dim(X \otimes Y) = \dim(X) \dim(Y)$ erklärt, warum sich der Zustandsraum bei n zusammengesetzten Zwei-Zustands-Systemen (Qubits) wie 2^n verhält – eine der Grundlagen der Rechenleistung von Quantencomputern.



ÜBUNGEN ZU § 11

Übung 11.5. Zeigen Sie mit dem Austauschsatz: In $\mathbb{R}^3$ können nicht vier Vektoren linear unabhängig sein.

Übung 11.6. Bestimmen Sie $\dim(\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3)$.

Übung 11.7 (etwas schwerer). Zeigen Sie, dass der Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle)$ sich nicht als $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ schreiben lässt. *Hinweis: Nehmen Sie an, es ginge, und vergleichen Sie Koeffizienten.*

§ 12 LINEARE OPERATOREN

Definition 12.1 (linearer Operator, Kern, Bild).

Ein Operator $A: X \rightarrow Y$ zwischen Vektorräumen heißt **linear**, wenn $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$. Der **Kern** $\ker A := \{x \in X \mid Ax = 0\}$ und das **Bild** $\operatorname{Im} A := \{Ax \mid x \in X\}$ sind Untervektorräume. Ist $X = Y$, heißt A ein **Endomorphismus**. $\triangle$

ORIGINAL: DEFINITION 5.6

In einfachen Worten, mit der Black-Box-Vorstellung von Funktionen aus § 2 wieder aufgegriffen: Ein linearer Operator ist eine ganz besonders gutmütige Maschine – steckst du eine Summe (oder ein Vielfaches) von Vektoren hinein, kommt exakt die entsprechende Summe (oder das entsprechende Vielfache) der einzelnen Ausgaben heraus, ohne unerwartete Überraschungen. Der **Kern** ist dann alles, was diese Maschine „komplett zerstört“ bzw. auf null abbildet, und das **Bild** ist alles, was die Maschine überhaupt jemals ausspucken kann.

Satz 12.2 (Rangsatz).

Für einen linearen Operator $A: X \rightarrow Y$ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum X gilt $\dim(\ker A) + \dim(\operatorname{Im} A) = \dim X$.

ORIGINAL: THEOREM 5.3

Beweis. Sei $k = \dim(\ker A)$ mit Basis $\{v_1, \dots, v_k\}$, ergänzt zu einer Basis $\{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$ von X ($n = \dim X$). Dann spannen $Aw_{k+1}, \dots, Aw_n$ das Bild auf (da $Av_i = 0$). Sie sind auch linear unabhängig: aus $\sum_{i>k} \alpha_i Aw_i = 0$ folgt $\sum_{i>k} \alpha_i w_i \in \ker A$, also $\sum_{i>k} \alpha_i w_i = -\sum_{i\leq k} \alpha_i v_i$ für geeignete α_i ($i \leq k$); da alle v_i, w_i zusammen eine Basis bilden, folgt $\alpha_i = 0$ für alle $i > k$. Also ist $\{Aw_{k+1}, \dots, Aw_n\}$ eine Basis von $\operatorname{Im} A$ mit $n - k$ Elementen. $\square$

In einfachen Worten: Der **Rangsatz** ist eine Art Erhaltungssatz für Dimensionen – die Ausgangsdimension $\dim X$ teilt sich vollständig auf in einen Teil, der von der Maschine „geschluckt“ (auf null geschickt) wird, den Kern, und einen Teil, der tatsächlich als Ausgabe „überlebt“, das Bild. Nichts geht verloren und nichts wird doppelt gezählt – $\dim(\ker A)$ und $\dim(\operatorname{Im} A)$ addieren sich exakt zur ursprünglichen Dimension.

Definition 12.3 (Operatornorm).

ORIGINAL: DEFINITION
5.7

Die **Operatornorm** eines linearen Operators A zwischen normierten Räumen ist

$$\|A\|_{\text{op}} := \inf\{c \geq 0 \mid \|Av\| \leq c\|v\| \forall v\} = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|.$$

△

In einfachen Worten: Die **Operatornorm** ist der größtmögliche „Verstärkungsfaktor“ der Maschine A – sie beantwortet die Frage „um höchstens welchen Faktor kann A die Länge eines Vektors strecken?“. Ein Operator mit $\|A\|_{\text{op}} = 3$ kann die Länge eines Vektors also höchstens verdreifachen (und manche Vektoren vielleicht sogar stauchen), aber niemals stärker als um den Faktor 3 strecken.

Beispiel 12.4 (lineare Operatoren in der Physik).

- (i) Ganz einfach: Die Rotation eines Vektors in $\mathbb{R}^3$ um eine feste Achse ist ein linearer Operator (Endomorphismus).
- (ii) Physik: Quantenmechanische **Observable** (Ort, Impuls, Energie) sind lineare (genauer: selbstadjungierte) Operatoren auf dem Hilbertraum. Der Kern des Vernichtungsoperators $\hat{a}$ des harmonischen Oszillators ist der eindimensionale Raum, der vom Grundzustand $|0\rangle$ aufgespannt wird: $\hat{a}|0\rangle = 0$.
- (iii) Abstrakter: Der Rangsatz erklärt, warum ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ genau dann für jedes b lösbar ist, wenn $\text{Im } A = \mathbb{R}^m$, also $\dim(\ker A) = n - m$ – ein späteres Kapitel vertieft dies.

△

ÜBUNGEN ZU § 12

Übung 12.5. Bestimmen Sie $\ker A$ und $\text{Im } A$ für $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A(x, y, z) = (x, y, 0)$ (die Projektion auf die xy -Ebene).

Übung 12.6. Verifizieren Sie den Rangsatz für die Projektion aus der vorigen Übung.

Übung 12.7 (etwas schwerer). Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\text{op}}$ tatsächlich eine Norm auf dem Raum der linearen Operatoren ist.

§ 12.1 DER DUALRAUM

Definition 12.8 (Dualraum, Linearform).

Eine **Linearform** (oder **lineares Funktional**) auf V ist eine lineare Abbildung $\varphi: V \rightarrow F$. Der **Dualraum** V^* ist der Vektorraum aller Linearformen auf V , mit punktweiser Addition und Skalierung. Elemente von V^* heißen auch **Kovektoren**. △

In einfachen Worten: Eine **Linearform** ist eine Art Messgerät – sie nimmt einen Vektor entgegen und gibt dir dafür eine einzige („gemessene“) Zahl zurück, und zwar auf besonders

ORIGINAL: DEFINITION
5.8

faire, lineare Weise (misst man die Summe zweier Vektoren, kommt genau die Summe der beiden Einzelmessungen heraus). Der **Dualraum** V^* ist dann einfach die Sammlung *aller* denkbaren derartigen Messgeräte für den Vektorraum V – und diese Sammlung bildet selbst wieder einen Vektorraum, denn man kann zwei Messgeräte addieren (Werte einfach zusammenzählen) und mit einer Zahl skalieren.

Konstruktion 12.9 (Dualbasis).

Ist $\dim V = N$ mit Basis $\{e_1, \dots, e_N\}$, so hat V^* dieselbe Dimension N , mit **Dualbasis** $\{\theta^1, \dots, \theta^N\}$ definiert durch $\theta^j(e_i) = \delta_{ij}$ (das **Kronecker-Delta**). Für $v = \sum_i v^i e_i$ gilt also $\theta^j(v) = v^j$: die Dualbasis liest genau die j -te Komponente aus. $\triangle$

ORIGINAL:
CONSTRUCTION 5.1

In einfachen Worten: Die **Dualbasis** besteht aus N ganz speziellen, besonders einfachen Messgeräten – das j -te Messgerät θ^j interessiert sich *nur* für die j -te Koordinate eines Vektors (bezüglich der Basis $\{e_i\}$) und ignoriert alle anderen komplett: Steckt man den i -ten Basisvektor selbst hinein, zeigt θ^j genau dann 1 an, wenn $i = j$ ist, und sonst 0. Jedes beliebige andere Messgerät $\varphi \in V^*$ lässt sich dann, wie der anschließende Beweis zeigt, immer als Kombination dieser N Grundmessgeräte zusammensetzen.

Beweisskizze. Die θ^j sind linear unabhängig, da $\sum_j \alpha_j \theta^j = 0$, ausgewertet an e_k , sofort $\alpha_k = 0$ liefert. Sie spannen V^* auf, da jede Linearform φ die Darstellung $\varphi = \sum_i \varphi(e_i) \theta^i$ besitzt (beide Seiten stimmen auf jedem Basisvektor e_k überein). $\square$

Bemerkung 12.10 (Dirac-Notation).

Physikerinnen und Physiker schreiben Vektoren aus V oft als **Kets** $|v\rangle$ und Kovektoren aus V^* als **Bras** $\langle\varphi|$; die Auswertung $\varphi(v)$ wird zum „Bra-Ket“ $\langle\varphi|v\rangle$. Die Dualbasis θ^j entspricht genau den Basis-Bras $\langle j|$ mit $\langle j|i\rangle = \delta_{ij}$. $\triangle$

Lemma 12.11 (Matrixelemente als Tensorkomponenten).

Für endlichdimensionale X, Y mit Basen $\{e_j, \theta^j\}$ und $\{f_i, \mu^i\}$ (jeweils mit Dualbasis) lässt sich jeder lineare Operator $A: X \rightarrow Y$ als Element von $Y \otimes X^*$ schreiben:

ORIGINAL: LEMMA 5.2

$$A = \sum_{i,j} A_{ij} f_i \otimes \theta^j, \quad A_{ij} := \mu^i(Ae_j).$$

Man nennt (A_{ij}) die **Matrixelemente** von A in den gegebenen Basen.

Dieses Lemma wirkt notationslastig, ist aber letztlich nur die präzise Rechtfertigung für etwas, das man vermutlich schon aus der Schule kennt: Ein linearer Operator lässt sich vollständig durch eine *Zahlentabelle* (die Matrix (A_{ij})) beschreiben, sobald man sich für Basen in Start- und Zielraum entschieden hat – A_{ij} verrät genau, „wie viel vom i -ten Basisvektor des Zielraums“ in Ae_j (dem Bild des j -ten Basisvektors) steckt. Das kommende Kapitel über Matrizen baut auf genau dieser Idee auf.

Beweis. Für $x = \sum_j x^j e_j$ gilt $Ax = \sum_i \mu^i(Ax) f_i = \sum_{i,j} \mu^i(Ae_j) x^j f_i = \sum_{i,j} A_{ij} \theta^j(x) f_i = \left(\sum_{i,j} A_{ij} f_i \otimes \theta^j \right)(x)$. $\square$

Beispiel 12.12 (Matrizelemente in der Physik).

Der Ausdruck $A_{ij} = \mu^i(Ae_j)$ ist genau das, was Physikerinnen und Physiker als Matrizelement $\langle i|\hat{A}|j\rangle$ eines Operators $\hat{A}$ zwischen Basiszuständen $|i\rangle, |j\rangle$ schreiben – Konstruktion 12.9 und Lemma 12.11 sind die mathematische Rechtfertigung dieser allgegenwärtigen Notation. $\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 12.1

Übung 12.13. Bestimmen Sie die Dualbasis zur Standardbasis $\{e_1, e_2\}$ von $\mathbb{R}^2$.

Übung 12.14. Sei $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^*$ mit $\varphi(1, 0) = 2$, $\varphi(0, 1) = -1$. Schreiben Sie φ in der Dualbasis.

Übung 12.15 (etwas schwerer). Zeigen Sie, dass die natürliche Abbildung $V \rightarrow V^{**}$, $v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(v))$, injektiv ist (in endlicher Dimension ist sie sogar bijektiv).

§ 13 AFFINE RÄUME

Ein **affiner Raum** ist, salopp gesagt, das, was von einem Vektorraum übrig bleibt, wenn man den Ursprung vergisst: Während die Summe zweier Punkte vom gewählten Ursprung abhängt, tut das die Differenz zweier Punkte nicht – physikalisch der Unterschied zwischen einem **Ereignis** (einem Punkt in Raum und Zeit) und einer **Verschiebung** (einem Vektor).

Ein Bild dazu, das viele aus dem Alltag kennen: Stell dir ein leeres, unliniertes Blatt Papier vor – es gibt keinen ausgezeichneten Punkt darauf, den man „den Nullpunkt“ nennen müsste. Trotzdem kannst du auf dem Blatt sinnvoll von einem Punkt zu einem anderen „gehen“ (eine Verschiebung ausführen), und zwei solche Wege lassen sich hintereinander ausführen oder vergleichen. Was auf dem Blatt *keinen* Sinn ergibt, ist dagegen, zwei Punkte einfach zu „addieren“ – das setzt nämlich voraus, dass es schon einen Nullpunkt gibt, von dem aus man überhaupt sinnvoll addieren könnte. Genau dieser Unterschied – Punkte darf man nicht addieren, aber ihre *Differenz* (die Verschiebung von einem zum anderen) ist ein ganz normaler Vektor – ist die ganze Pointe eines affinen Raums.

Definition 13.1 (affiner Raum).

Ein **affiner Raum** ist eine Menge V zusammen mit einem Vektorraum $\vec{V}$ und einer Operation $+: V \times \vec{V} \rightarrow V$, $(a, \vec{v}) \mapsto a + \vec{v}$, sodass:

- $a + \vec{0} = a$ für alle $a \in V$;
- $(a + \vec{v}) + \vec{w} = a + (\vec{v} + \vec{w})$;
- für jedes $a \in V$ ist $\vec{v} \mapsto a + \vec{v}$ eine Bijektion $\vec{V} \rightarrow V$ („freie transitive Wirkung“).

Die **Dimension** von V ist die von $\vec{V}$. $\triangle$

In einfachen Worten: Die ersten beiden Bedingungen sagen nur, dass „eine Verschiebung ausführen“ sich vernünftig verhält (nichts verschieben lässt den Punkt, wo er ist; zwei Ver-

schiebungen hintereinander sind dasselbe wie eine einzige, kombinierte Verschiebung). Die dritte, etwas technisch klingende Bedingung („freie transitive Wirkung“) sagt schlicht: Von jedem Punkt a aus erreicht man, indem man alle möglichen Verschiebungen $\vec{v}$ durchprobiert, jeden anderen Punkt des Raums *genau einmal* – es gibt also zu je zwei Punkten immer eine (und nur eine) Verschiebung, die vom einen zum anderen führt.

Bemerkung 13.2.

Die dritte Eigenschaft ist gleichbedeutend damit, dass es zu je zwei Punkten $a, b \in V$ genau einen Vektor $\vec{v}$ mit $b = a + \vec{v}$ gibt; man schreibt $\vec{v} = b - a$. Es gilt $(c - b) + (b - a) = c - a$ für alle $a, b, c \in V$. Eine **affine Teilmenge** ist $a + W := \{a + \vec{w} \mid \vec{w} \in W\}$ für einen Untervektorraum $W \subset \vec{V}$; zwei affine Teilmengen mit derselben **Richtung** W heißen **parallel**. Dass es zu jeder Richtung W und jedem Punkt a genau eine affine Teilmenge $a + W$ gibt, ist im Wesentlichen Euklids fünftes Postulat (das Parallelenaxiom). In Worten: $b - a$ ist einfach „der Vektor, der dich von a nach b bringt“, und die Regel $(c - b) + (b - a) = c - a$ ist nur die vertraute Tatsache, dass sich Teilstrecken einer Reise zur Gesamtstrecke aufaddieren – erst von a nach b , dann von b nach c , ist dasselbe wie direkt von a nach c . $\triangle$

Beispiel 13.3 (affine Räume in der Physik).

- (i) Ganz einfach: Die Menge der Orte in unserem Alltagsraum ist ein affiner Raum über $\mathbb{R}^3$ – es gibt keinen „ausgezeichneten Ursprung“, nur Verschiebungen zwischen Punkten.
- (ii) Physik: Die Raumzeit der klassischen (Galileischen) Mechanik ist ein vierdimensionaler affiner Raum; ein **Ereignis** ist ein Punkt darin, kein Vektor – nur *Differenzen* von Ereignissen (Zeitspannen, Verschiebungen) sind Vektoren.
- (iii) Abstrakter: Für einen linearen Operator $A: X \rightarrow Y$ ist die Lösungsmenge $\{x \mid Ax = y\}$ eines *inhomogenen* Gleichungssystems (für festes $y \in \text{Im } A$) ein affiner Raum über $\ker A$ – die allgemeine Lösung ist „eine Partikulärlösung plus die homogene Lösungsmenge“, ein Prinzip, das in der Theorie linearer Differentialgleichungen wiederkehrt.

$\triangle$

Definition 13.4 (affine Abbildung).

Eine **affine Abbildung** $A: X \rightarrow Y$ zwischen affinen Räumen ist eine Abbildung, für die $\vec{A}(b - a) := A(b) - A(a)$ eine wohldefinierte *lineare* Abbildung $\vec{A}: \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ ist. Damit gilt $A(a + \vec{v}) = A(a) + \vec{A}(\vec{v})$: A ist durch einen Punktwert und ihren linearen Anteil $\vec{A}$ vollständig bestimmt. Zu einem Punkt b und einer linearen Abbildung $\vec{A}$ definiert $L_{b, \vec{A}}(a) := b + \vec{A}(b - a)$ die affine Abbildung „ $\vec{A}$, zentriert im Punkt b “. $\triangle$

ORIGINAL: DEFINITION
5.10

In einfachen Worten: Eine **affine Abbildung** ist genau „eine lineare Abbildung plus eine Verschiebung“ – sie darf drehen, strecken, stauchen oder spiegeln (das macht der lineare Anteil $\vec{A}$), und zusätzlich noch das ganze Ergebnis an eine andere Stelle verschieben. Wichtig zum Merken: Eine affine Abbildung muss den Nullpunkt *nicht* auf sich selbst abbilden (eine lineare Abbildung dagegen schon, immer) – genau das erlaubt die zusätzliche Verschiebung,

macht die Abbildung aber eben auch nicht mehr rein linear.

Beispiel 13.5 (affine Abbildungen in der Physik).

Eine **Galilei-Transformation** zwischen zwei gleichförmig gegeneinander bewegten Bezugssystemen, $x' = x - vt$, $t' = t$, ist eine affine Abbildung der Raumzeit auf sich selbst. Ebenso ist eine Drehung um einen beliebigen (nicht notwendig den Koordinaten-)Punkt b – also $L_{b,\vec{A}}$ mit $\vec{A}$ einer linearen Drehung – eine affine, aber im Allgemeinen *keine* lineare Abbildung (es sei denn $b = 0$). $\triangle$

Bemerkung 13.6 (affine Kombinationen und der Schwerpunkt).

Für $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ ist der Punkt $g := o + \lambda_1(a_1 - o) + \dots + \lambda_n(a_n - o)$ *unabhängig von der Wahl des Ursprungs o* (Rechnung: für zwei Ursprünge o, o' heben sich die Differenzen weg, gerade weil die λ_i sich zu 1 summieren). Man schreibt kurz $g = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ und nennt g die **affine Kombination** (oder den **Barycenter**) der a_i mit Gewichten λ_i . $\triangle$

In einfachen Worten: Eine **affine Kombination** ist nichts anderes als ein „gewichteter Mittelwert“ von Punkten – wie beim Schwerpunkt gleich im Beispiel, wo jeder Massenpunkt mit seinem Gewichtsanteil m_i/M in die Mittelung eingeht. Die Bedingung $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ ist dabei kein Zufall, sondern genau das, was garantiert, dass am Ende wieder ein *Punkt* herauskommt, unabhängig davon, wo man den (an sich beliebigen) Hilfs-Ursprung o zum Rechnen hinlegt – ähnlich wie bei einem gewichteten Notendurchschnitt, bei dem sich die Prozent-Gewichte ja auch zu 100 % aufaddieren müssen, damit „Durchschnittsnote“ überhaupt sinnvoll definiert ist.

Beispiel 13.7 (der Schwerpunkt als affine Kombination).

Der **Schwerpunkt** (Massenmittelpunkt) $S = \sum_i \frac{m_i}{M} x_i$ (mit $M = \sum_i m_i$) eines Systems von Massenpunkten x_i ist *per Definition* eine affine Kombination, denn die Gewichte m_i/M summieren sich zu 1. Bemerkung 13.6 erklärt, warum der Schwerpunkt ein wohldefinierter *Punkt* ist – unabhängig davon, welchen Koordinatenursprung man zu seiner Berechnung wählt, ganz so, wie man es von einem physikalisch sinnvollen Objekt erwarten würde. $\triangle$

Definition 13.8 (affine Basis, baryzentrische Koordinaten).

Eine **affine Basis** eines n -dimensionalen affinen Raums ist eine Menge $\{e_0, \dots, e_n\}$, sodass $\{e_1 - e_0, \dots, e_n - e_0\}$ eine Basis von $\vec{V}$ ist. Jeder Punkt x schreibt sich eindeutig als affine Kombination $x = \lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_n e_n$ mit $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$; die λ_i heißen die **baryzentrischen Koordinaten** von x . $\triangle$

In einfachen Worten: Eine **affine Basis** ist das affine Gegenstück zu einer gewöhnlichen Vektorraumbasis – statt Basisvektoren, die man von einem festen Nullpunkt aus abträgt, wählt man einfach $n + 1$ „Referenzpunkte“ $e_0, \dots, e_n$, deren paarweise Verschiebungsvektoren $e_i - e_0$ eine gewöhnliche Basis von $\vec{V}$ bilden. Die **baryzentrischen Koordinaten** eines beliebigen Punktes x verraten dann, mit welchen Gewichten man diese Referenzpunkte mischen muss (als affine Kombination, siehe eben), um genau bei x herauszukommen – das kommende Beispiel mit einem Dreieck macht das sehr anschaulich.

ORIGINAL: DEFINITION
5.11

Beispiel 13.9 (baryzentrische Koordinaten).

In der Ebene $x + y + z = 1 \subset \mathbb{R}^3$ (einem zweidimensionalen affinen Raum) definieren die Ecken $e_0 = (1, 0, 0)$, $e_1 = (0, 1, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1)$ eines Dreiecks eine affine Basis; die baryzentrischen Koordinaten eines Punkts im Dreieck sind genau seine gewöhnlichen (x, y, z) -Koordinaten. Die Ebenen $P_a = \{(x, y, z) \mid x + y + z = a\}$ für verschiedene a sind zueinander parallele affine Teilräume von $\mathbb{R}^3$ mit derselben Richtung $\{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$. $\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 13

Übung 13.10. Zeigen Sie, dass jeder Vektorraum V , aufgefasst mit $\vec{V} = V$ und der gewöhnlichen Addition, ein affiner Raum über sich selbst ist.

Übung 13.11. Berechnen Sie den Schwerpunkt dreier Massen $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 3$ an den Orten $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$ auf der reellen Achse.

Übung 13.12 (etwas schwerer). Zeigen Sie, dass die Translation $T_{\vec{v}}(a) = a + \vec{v}$ eine affine Abbildung mit linearem Anteil $\vec{T}_{\vec{v}} = \text{id}_{\vec{V}}$ ist.

Übung 13.13 (schwerer). Zeigen Sie: Ist $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ (statt 1), so ist $\lambda_1(a_1 - o) + \dots + \lambda_n(a_n - o)$ zwar ebenfalls unabhängig von o , aber jetzt ein *Vektor* in $\vec{V}$, kein Punkt in V .

5 Matrizen

Sobald man eine Basis fixiert, werden abstrakte Vektoren zu Zahlenkolonnen und lineare Operatoren zu Zahlentabellen – **Matrizen**. Dieses Kapitel entspricht Kapitel 6 (*Matrices*) des Originalskripts und macht die im letzten Kapitel abstrakt eingeführten Objekte (Vektoren, Linearformen, Operatoren, Dualbasis) konkret rechenbar.

In einfachen Worten, bevor die Indizes losgehen: Ein Vektor oder ein linearer Operator *existiert* unabhängig davon, ob man ihn in Zahlen ausdrückt – ein Pfeil im Raum bleibt derselbe Pfeil, egal welches Koordinatensystem man wählt. Eine **Matrix** ist nichts weiter als die *Übersetzung* eines solchen abstrakten Objekts in eine konkrete Zahlentabelle, sobald man sich für eine Basis (ein „Koordinatensystem“) entschieden hat – ganz ähnlich, wie ein und dieselbe Strecke, je nach gewähltem Maßstab, mal als „2 Meter“ und mal als „200 Zentimeter“ in Zahlen ausgedrückt wird. Der eigentliche Nutzen dieses Kapitels: Sobald alles in Zahlentabellen übersetzt ist, kann man mit reiner Rechenmechanik (Zeile mal Spalte, Gauß-Elimination, usw.) arbeiten, ohne bei jedem Schritt an die abstrakte Bedeutung dahinter denken zu müssen.

Wir fixieren also eine Basis $\{e_i\}_{i=1,\dots,N}$ von X mit Dualbasis $\{\theta^i\}$. Jeder Vektor $x = \sum_i x^i e_i$ wird durch seinen **Koordinatenvektor** (eine Spalte aus F^N) dargestellt:

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^N \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fixiert man zusätzlich eine Basis $\{f_i, \mu^i\}_{i=1,\dots,M}$ von Y , so wird ein linearer Operator $A: X \rightarrow Y$ (Lemma 12.11) durch die **Matrix** seiner Elemente $A_{ij} := \mu^i(Ae_j)$ dargestellt – eine Tabelle mit M Zeilen und N Spalten:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{M \times N}(F), \quad (Ax)_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} x^j.$$

Eine Linearform $\varphi = \sum_i \varphi_i \theta^i \in X^*$ wird entsprechend durch einen **Zeilenvektor** $(\varphi_1 \dots \varphi_N)$ dargestellt, mit $\varphi(x) = \sum_j \varphi_j x^j$. Wichtig: die Vektoren x, Ax selbst sind basisunabhängig – nur ihre *Darstellung* als Zahlenkolonne hängt von der gewählten Basis ab. Wie sich diese Darstellung bei Basiswechsel ändert, untersuchen wir in § 15.

§ 14 DIE ALGEBRA DER MATRIZEN

Bemerkung 14.1.

Da $\mathcal{B}_{\text{op}}(X, Y) \cong Y \otimes X^*$ (Lemma 12.11), bilden die Matrizen $\mathcal{M}_{M \times N}(F)$ selbst einen $(M \cdot N)$ -dimensionalen Vektorraum, mit komponentenweiser Addition $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ und Skalierung $(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}$; eine Basis bilden die Elementarmatrizen $E^{(ij)} := f_i \otimes \theta^j$ mit einer einzelnen 1 an Position (i, j) und sonst Nullen. $\triangle$

Bemerkung 14.2 (Matrixmultiplikation).

Die Komposition $A \circ B$ zweier linearer Operatoren $B: X \rightarrow Y$, $A: Y \rightarrow Z$ entspricht dem **Matrixprodukt** $A \cdot B$, definiert durch das Zeile-mal-Spalte-Schema

$$(A \cdot B)_{kj} = \sum_{i=1}^M A_{ki} B_{ij}, \quad A \in \mathcal{M}_{P \times M}(F), B \in \mathcal{M}_{M \times N}(F), A \cdot B \in \mathcal{M}_{P \times N}(F).$$

Man multipliziert also jede Zeile von A termweise mit jeder Spalte von B und summiert auf. Die Einheitsmatrix I mit $I_{ij} = \delta_{ij}$ ist neutral: $AI = IA = A$. $\triangle$

In einfachen Worten: Das „Zeile-mal-Spalte“-Rezept sieht auf den ersten Blick willkürlich aus, ist aber genau die Buchhaltung, die entsteht, wenn man zwei Maschinen (lineare Operatoren) hintereinanderschaltet – erst B anwenden, dann A auf das Ergebnis. Jeder einzelne Eintrag $(A \cdot B)_{kj}$ des Produkts ist dabei ein „Skalarprodukt“ der k -ten Zeile von A mit der j -ten Spalte von B : man geht beide gleichzeitig Position für Position durch, multipliziert und addiert alles auf. Die Einheitsmatrix I ist dabei die „Tu-nichts“-Maschine (die Identität), die jeden Vektor unverändert lässt.

Definition 14.3 (Algebra über einem Körper).

Eine **Algebra** $\mathcal{M}$ über F ist ein Vektorraum über F mit einem bilinearen Produkt $\cdot: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ (das heißt distributiv in beiden Argumenten und verträglich mit Skalaren). Die Algebra heißt **assoziativ**, wenn $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, **kommutativ**, wenn $A \cdot B = B \cdot A$, und **unital**, wenn es ein neutrales Element I gibt. $\triangle$

ORIGINAL: DEFINITION
6.1

In einfachen Worten: Eine **Algebra** ist einfach ein Vektorraum, in dem man *zusätzlich* zwei Elemente miteinander „multiplizieren“ kann (nicht nur skalieren und addieren), und diese Multiplikation sich vernünftig mit der Vektorraumstruktur verträgt. **Assoziativ** heißt dabei nur, dass Klammersetzung beim Mehrfach-Multiplizieren egal ist, **kommutativ**, dass die Reihenfolge egal ist, und **unital**, dass es ein „Nichts-tun“-Element gibt. Die Matrizen $\mathcal{M}_{N \times N}(F)$ sind das naheliegendste Beispiel: assoziativ und unital (das haben wir gerade gesehen), aber – wie das folgende Beispiel zeigt – *nicht* kommutativ, was in der Physik weitreichende Konsequenzen hat.

Beispiel 14.4 (Matrizenalgebren – einfach bis abstrakt).

- (i) $\mathcal{M}_{N \times N}(F)$ ist mit dem Matrixprodukt eine assoziative, unitale, aber *nicht kommutative* Algebra.

- (ii) Physik: Die drei Pauli-Matrizen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ zusammen mit der Einheitsmatrix I bilden eine Basis des (reellen, vierdimensionalen) Vektorraums der 2×2 -hermiteschen Matrizen – der natürliche Rahmen zur Beschreibung eines Spin- $\frac{1}{2}$ -Systems. Dass $\sigma_x \sigma_y \neq \sigma_y \sigma_x$ (genauer: $[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$) ist die algebraische Wurzel der Heisenbergschen Unschärferelation.
- (iii) Abstrakter: Auch $\mathcal{B}_{\text{op}}(X, X)$ (die Operatoren auf X mit Verkettung) ist eine assoziative, unitale, nichtkommutative Algebra – Matrizen sind einfach ihre Darstellung nach Wahl einer Basis.

△

Satz 14.5 (Links- und Rechtsinverse quadratischer Matrizen stimmen überein).

ORIGINAL: THEOREM 6.1

Für eine quadratische Matrix $A \in \mathcal{M}_{N \times N}(F)$ gilt: Besitzt A eine Linksinverse L ($LA = I$), so besitzt A auch eine Rechtsinverse R ($AR = I$), und $L = R$.

Beweis. Wir betrachten $\Phi: \mathcal{M}_{N \times N}(F) \rightarrow \mathcal{M}_{N \times N}(F)$, $\Phi(X) = AX$. Aus $\Phi(X) = 0$ folgt $LAX = X = 0$ (mit der Linksinversen L), also $\ker \Phi = 0$; nach dem Rangsatz (Satz 12.2) ist Φ dann surjektiv, insbesondere gibt es R mit $\Phi(R) = AR = I$. Existieren beide, so $L = L(AR) = (LA)R = R$. □

In einfachen Worten: Bei quadratischen Matrizen (im Gegensatz zu allgemeinen linearen Abbildungen) muss man sich zum Glück keine Gedanken machen, ob eine „Rückgängigmachen“-Maschine von links oder von rechts ansetzt – gibt es überhaupt eine, gibt es automatisch auch die andere, und beide sind identisch. Das ist eine direkte Konsequenz des Rangsatzes: eine quadratische Matrix als Operator $A: X \rightarrow X$ ist genau dann injektiv („zerstört nichts“), wenn sie surjektiv („erreicht alles“) ist – die eine Eigenschaft kommt bei quadratischen Matrizen nie ohne die andere.

Bemerkung 14.6.

Das ist eine unmittelbare Konsequenz des Rangsatzes: eine Matrix stellt einen Operator $A: X \rightarrow X$ dar, und ein solcher Operator ist genau dann injektiv, wenn er surjektiv ist – in diesem Fall (und nur dann) ist er invertierbar. △

ÜBUNGEN ZU § 14

Übung 14.7. Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und vergleichen

Sie – was zeigt das?

Übung 14.8. Zeigen Sie, dass die Elementarmatrizen $E^{(ij)}$ das Produkt $E^{(ij)} E^{(kl)} = \delta_{jk} E^{(il)}$ erfüllen.

Übung 14.9 (etwas schwerer). Zeigen Sie: Ist A eine 2×2 -Matrix mit $A^2 = 0$ aber $A \neq 0$, so ist A nicht invertierbar. Hinweis: Was wäre A , wenn A^{-1} existierte?

§ 15 BASISWECHSEL

Bemerkung 15.1 (die Basiswechselmatrix).

Wählt man in X eine neue Basis $\tilde{e}_i = \sum_j e_j S_{ji}$, so ist die **Basiswechselmatrix** $S = (\tilde{e}_1 \dots \tilde{e}_N)$ (die Spalten sind die neuen Basisvektoren, ausgedrückt in der alten Basis) automatisch invertierbar, und die alte Basis drückt sich durch $e_i = \sum_j \tilde{e}_j Q_{ji}$ mit $Q = S^{-1}$ aus. Dualbasis, Vektorkomponenten und Matricelemente transformieren sich wie folgt:

ORIGINAL: TEXT VOR
DEFINITION 6.2

$$\tilde{\theta}^i = \sum_j (S^{-1})_{ij} \theta^j, \quad \tilde{v}^i = \sum_j (S^{-1})_{ij} v^j, \quad \tilde{A} = S^{-1} A S.$$

Man sagt, die Komponenten v^i transformieren sich **kontravariant** („gegen die Basis“), während die Koeffizienten φ_i einer Linearform **kovariant** transformieren („mit der Basis“, $\tilde{\varphi}_i = \sum_j \varphi_j S_{ji}$). $\triangle$

In einfachen Worten, um sich durch die vielen Indizes nicht abschrecken zu lassen: Der Vektor x selbst *ändert sich nicht*, wenn man die Basis wechselt – nur seine *Beschreibung* als Zahlenkolonne ändert sich, ganz wie eine Strecke von 2 Metern immer dieselbe Strecke bleibt, egal ob man sie in Metern oder Zentimetern angibt. Wählt man eine „größere“ neue Basis (die neuen Basisvektoren $\tilde{e}_i$ sind lang), müssen die neuen Komponenten $\tilde{v}^i$ automatisch *kleiner* werden, damit dieselbe Kombination herauskommt – das ist die ganze Bedeutung von **kontravariant**, „gegen die Basis“: wächst die Basis, schrumpfen die Komponenten. Eine Linearform (ein Messgerät, § 12.1) verhält sich dagegen umgekehrt: Ihre Koeffizienten wachsen **mit** der Basis mit („kovariant“), weil ein Messgerät ja *auf* die Basisvektoren angewendet wird, statt aus ihnen zusammengesetzt zu werden.

Beispiel 15.2 (Basiswechsel in der Physik).

- (i) Ganz einfach: Der Übergang von kartesischen Koordinaten zu einem um 45° gedrehten Koordinatensystem in $\mathbb{R}^2$ ist ein Basiswechsel mit S einer Rotationsmatrix.
- (ii) Physik: Die Unterscheidung zwischen ko- und kontravarianten Komponenten ist in der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie zentral – dort werden Vierervektoren mit oberen Indizes v^μ (kontravariant) und Vierer-Kovektoren mit unteren Indizes φ_μ (kovariant) unterschieden, genau der hier eingeführten Konvention folgend.
- (iii) Abstrakter: Zwei Matrizen $A, \tilde{A} = S^{-1} A S$ heißen **ähnlich** – sie beschreiben denselben Operator in verschiedenen Basen. Die Eigenwerte eines Operators (ein späteres Kapitel) sind, im Gegensatz zu den Matricelementen selbst, basisunabhängig und damit unter Ähnlichkeit invariant.

$\triangle$

Definition 15.3 (Spur).

Die **Spur** einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente, $\text{Tr}(A) := \sum_i A_{ii}$. Sie ist zyklisch, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, und invariant unter Basiswechsel: $\text{Tr}(S^{-1} A S) = \text{Tr}(A)$. $\triangle$

ORIGINAL: DEFINITION
6.2

In einfachen Worten: Auf den ersten Blick ist die **Spur** eine ziemlich willkürliche Rechenvorschrift – warum sollte ausgerechnet die Summe der Diagonaleinträge etwas Sinnvolles bedeuten? Die Überraschung ist gerade die Invarianz unter Basiswechsel: Obwohl sich *alle* einzelnen Matrixeinträge beim Basiswechsel ändern können (teils drastisch), bleibt ihre ganz bestimmte Kombination – die Diagonalsumme – immer exakt gleich. Genau das macht die Spur zu einer „echten“, koordinatensystem-unabhängigen Eigenschaft des zugrunde liegenden Operators, nicht nur ein Artefakt der gewählten Basis.

Beispiel 15.4 (die Spur als physikalische Invariante).

Da die Spur basisunabhängig ist, ist sie ein legitimer „physikalischer“ Wert, unabhängig von der willkürlichen Wahl eines Koordinatensystems: Die Spur des Trägheitstensors ist proportional zur Summe der Hauptträgheitsmomente, und die Spur einer quantenmechanischen Dichtematrix ist stets 1 (Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit) – in *jeder* Basis. $\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 15

Übung 15.5. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix S für den Übergang von $\{e_1, e_2\}$ zu $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\} = \{e_1 + e_2, e_1 - e_2\}$ in $\mathbb{R}^2$.

Übung 15.6. Zeigen Sie $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ direkt aus der Definition der Spur und des Matrixprodukts.

Übung 15.7 (etwas schwerer). Zeigen Sie mit der zyklischen Eigenschaft der Spur, dass $\text{Tr}(S^{-1}AS) = \text{Tr}(A)$ für jede invertierbare Matrix S .

§ 16 GAUSS-ELIMINATION

Von nun an schreiben wir alle Matrixindizes tiefgestellt. Die **Gauß-Elimination** ist ein Algorithmus, der eine Matrix durch drei Arten elementarer Zeilenoperationen – allesamt selbst als Matrixmultiplikation von links darstellbar – auf eine Standardform bringt.

In einfachen Worten, bevor die Details kommen: Die drei „elementaren Zeilenoperationen“ gleich unten sind exakt dieselben drei erlaubten Schritte, die du vermutlich schon aus der Schule kennst, wenn du ein Gleichungssystem „von Hand“ löst – zwei Gleichungen vertauschen, eine Gleichung mit einer Zahl ungleich null durchmultiplizieren, oder ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addieren. Neu ist hier nur die Beobachtung, dass sich jeder dieser drei Handgriffe als Multiplikation mit einer ganz bestimmten (invertierbaren!) Matrix von links ausdrücken lässt – das macht den ganzen Algorithmus systematisch durchführbar und beweisbar korrekt, statt nur „intuitiv richtig“.

Bemerkung 16.1 (elementare Zeilenoperationen).

Für $A \in \mathcal{M}_{M \times N}(F)$ entsprechen den drei elementaren Zeilenoperationen die folgenden invertierbaren Matrizen (von links multipliziert):

Vertauschen zweier Zeilen i, j : Multiplikation mit einer Permutationsmatrix S .

Skalieren einer Zeile, $a_{i\bullet} \rightarrow \alpha a_{i\bullet}$ ($\alpha \neq 0$): Multiplikation mit D_α^i , $(D_\alpha^i)_{kl} = \delta_{kl} + (\alpha - 1)\delta_{ik}\delta_{il}$.

Linearkombinieren zweier Zeilen, $a_{i\bullet} \rightarrow a_{i\bullet} + \alpha a_{j\bullet}$: Multiplikation mit $L_\alpha^{i,j}$, $(L_\alpha^{i,j})_{kl} = \delta_{kl} + \alpha\delta_{ik}\delta_{jl}$.

Jede Folge solcher Operationen liefert also $B = FA$ für eine invertierbare Matrix F . $\triangle$

Konstruktion 16.2 (Gauß-Elimination).

Man arbeitet sich spaltenweise vor: Ist die aktuelle Spalte k (unterhalb der bisher bearbeiteten Zeilen) nicht identisch Null, bringt man durch Zeilenvertauschung ein Element ungleich Null auf die Position (k, k) (den **Pivot**) und eliminiert mit Zeilenkombinationen alle Einträge *darunter*. Am Ende dieses Verfahrens erhält man die **Zeilenstufenform**: alle Nullzeilen stehen unten, und jeder Pivot steht rechts vom Pivot der Zeile darüber. Skaliert man alle Pivots auf 1 und eliminiert auch alle Einträge *über* den Pivots, erhält man die **reduzierte Zeilenstufenform** (RREF) – diese ist eindeutig. Spalten mit einem Pivot heißen **dominant**, die übrigen **nicht dominant**. $\triangle$

ORIGINAL:
CONSTRUCTION 6.1

In einfachen Worten, das Rezept noch einmal ganz ohne Fachbegriffe: Man arbeitet sich von links nach rechts durch die Spalten und versucht, in jeder Spalte möglichst weit oben eine „brauchbare“ Zahl (den Pivot) zu finden, mit der man dann *alle* anderen Einträge in dieser Spalte auf null wegchnet – wie beim Aufräumen einer Treppe, bei der man von der untersten Stufe beginnt und dafür sorgt, dass jede höhere Stufe eine Spalte weiter rechts ihre eigene, freistehende Zahl hat. Die **Zeilenstufenform** ist genau dieses treppenförmige Bild (daher der Name), und die **reduzierte** Version räumt zusätzlich noch alles *über* den Treppenstufen weg, sodass am Ende eine maximal aufgeräumte, eindeutige Endform übrigbleibt – ähnlich wie ein vollständig gekürzter Bruch, bei dem es auch nur noch eine einzige, kanonische Darstellung gibt.

Beispiel 16.3 (Gauß-Elimination).

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 11 & 5 & 35 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die dominanten Spalten sind die erste und zweite; die RREF liest sich spaltenweise als $(f_1 \ f_2 \ -2f_1+f_2 \ -3f_1+4f_2)$, mit f_1, f_2 der Standardbasis in F^2 . $\triangle$

Satz 16.4 (Eindeutigkeit der RREF).

Die reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix A ist eindeutig.

ORIGINAL: THEOREM 6.2

Beweisskizze. Die dominanten Spalten einer RREF sind genau die Standardbasisvektoren $f_1, \dots, f_k$ in dieser Reihenfolge; jede nicht dominante Spalte ist eine feste Linearkombination der dominanten Spalten links von ihr. Ist $B' = FB$ eine weitere RREF derselben Matrix (für invertierbares F), so müssen die dominanten Spalten von B' ebenfalls $f_1, \dots, f_k$ in dieser Reihenfolge reproduzieren, was $Ff_1 = f_1, \dots, Ff_k = f_k$ erzwingt; damit stimmen dann

auch alle nicht dominanten Spalten (als dieselben Linearkombinationen) überein, also $B' = B$. $\square$

In Worten: Egal in welcher Reihenfolge du beim Aufräumen vorgehst (welche Zeilen du zuerst vertauschst, in welcher Reihenfolge du Vielfache abziehst) – am Ende landest du *immer* bei genau derselben reduzierten Zeilenstufenform. Das ist eine beruhigende Garantie: Die RREF ist eine echte Eigenschaft der ursprünglichen Matrix, kein Zufallsprodukt des gewählten Rechenwegs.

Beispiel 16.5 (Gauß-Elimination in der Physik).

Die Kirchhoffschen Regeln für ein elektrisches Netzwerk liefern ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Zweigströme; die Gauß-Elimination des zugehörigen Gleichungssystems ist die systematische (und computertaugliche) Version dessen, was man beim „Zusammenfassen von Maschengleichungen“ von Hand tut. $\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 16

Übung 16.6. Zeigen Sie, dass $D_\alpha^i D_{1/\alpha}^i = I$ und $L_\alpha^{i;j} L_{-\alpha}^{i;j} = I$ gilt (die elementaren Operationen sind invertierbar).

Übung 16.7. Bringen Sie $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ auf reduzierte Zeilenstufenform.

Übung 16.8 (*etwas schwerer*). Wie viele dominante Spalten kann eine 3×5 -Matrix höchstens haben? Was bedeutet das für die Dimension ihres Bildes?

§ 16.1 BASEN VON KERN UND BILD EINER MATRIX

Bemerkung 16.9 (Basen aus der RREF ablesen).

Ist $B = FA$ die RREF von A (mit F invertierbar), so liefert das:

Bild. Die *dominanten Spalten* von A (nicht von B !) bilden eine Basis von $\text{Im}(A)$ – denn die entsprechenden Spalten $Ff_1, \dots, Ff_l$ von A sind linear unabhängig (da F invertierbar ist) und spannen den Spaltenraum auf.

Kern. Jede *nicht dominante Spalte* j von B liefert eine Relation $Ae_j = \sum_{i < j} \alpha_{ij} Ae_i$, also einen Kernvektor $v_j := e_j - \sum_{i < j} \alpha_{ij} e_i$. Diese Vektoren (einer pro nicht dominanter Spalte) sind linear unabhängig und bilden nach dem Rangsatz eine Basis von $\ker(A)$. $\triangle$

In einfachen Worten, mit der Maschinen-Vorstellung von Kern und Bild aus § 12 wieder aufgegriffen: Die **dominanten Spalten** markieren genau die „wirklich neuen“ Richtungen der Ausgabe – deshalb liefern die entsprechenden *Original*-Spalten von A (nicht der aufgeräumten RREF!) direkt eine Basis für alles, was die Maschine ausspucken kann. Die **nicht dominanten Spalten** markieren dagegen genau die Richtungen, die „überflüssig“ sind – jede von ihnen lässt sich als Kombination der dominanten Spalten davor ausdrücken, und

aus jeder solchen Redundanz bastelt man sich einen Vektor, der von der Maschine komplett verschluckt wird (also im Kern liegt).

Beweisskizze der Unabhängigkeit der Kernvektoren. Ist $\sum_{j \in J} \gamma_j v_j = \sum_{j \in J} \gamma_j (e_j - \sum_{i < j} \alpha_{ij} e_i) = 0$ (mit J der Menge der nicht dominanten Indizes), so tritt der größte Index $j_{\max} \in J$ nur im Term $\gamma_{j_{\max}} e_{j_{\max}}$ auf (alle anderen Terme betreffen nur e_i mit $i < j_{\max}$), also $\gamma_{j_{\max}} = 0$ (die e_i sind unabhängig); Iteration liefert $\gamma_j = 0$ für alle $j \in J$. $\square$

Beispiel 16.10 (Kern und Bild – konkret).

Für die Matrix A aus Beispiel 16.3 mit RREF $B = (f_1 \ f_2 \ -2f_1+f_2 \ -3f_1+4f_2)$ sind Spalten 1, 2 dominant, Spalten 3, 4 nicht dominant. Eine Basis von $\text{Im}(A)$ ist also $\{Ae_1, Ae_2\} = \{(1, 1, 3)^\top, (3, 1, 11)^\top\}$ (die ersten beiden Spalten von A selbst!), und eine Basis von $\ker(A)$ ist

$$\{e_3 + 2e_1 - e_2, e_4 + 3e_1 - 4e_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\triangle$

1	0	-2	-3
0	1	1	4
0	0	0	0

dominante Spalte nicht dominant

Abbildung 5.1: Die RREF aus Beispiel 16.3: die dominanten Spalten (indigo) liefern via Bemerkung 16.9 eine Basis von $\text{Im}(A)$, die übrigen eine Basis von $\ker(A)$.

ÜBUNGEN ZU § 16.1

Übung 16.11. Verifizieren Sie $A(e_3 + 2e_1 - e_2) = 0$ für die Matrix A aus Beispiel 16.3 durch direktes Nachrechnen.

Übung 16.12. Bestimmen Sie eine Basis von Kern und Bild von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Übung 16.13 (etwas schwerer). Zeigen Sie: Die Anzahl der dominanten Spalten einer Matrix A ist gleich $\dim(\text{Im } A)$, und die Anzahl der nicht dominanten Spalten ist gleich $\dim(\ker A)$. Warum ist das nur eine Umformulierung des Rangsatzes?

§ 16.2 LÖSEN LINEARER GLEICHUNGSSYSTEME

Bemerkung 16.14 (die drei Fälle).

Ein lineares Gleichungssystem $Ax = y$ mit $A \in \mathcal{M}_{M \times N}(F)$ fällt in genau einen von drei Fällen:

Unlösbar. $y \notin \text{Im}(A)$: keine Lösung.

Eindeutig lösbar. $y \in \text{Im}(A)$ und $\ker(A) = 0$: genau eine Lösung.

Unterbestimmt. $y \in \text{Im}(A)$ und $\ker(A) \neq 0$: unendlich viele Lösungen; die Lösungsmenge $\{x \mid Ax = y\}$ ist der affine Raum $x_0 + \ker(A)$ über $\ker(A)$ (Beispiel 13.3(iii)!) für eine beliebige Partikulärlösung x_0 .

Man bringt die **erweiterte Matrix** $[A \mid y]$ auf RREF $[B \mid Y]$: ist die letzte Spalte Y dominant, liegt eine widersprüchliche Gleichung $0 = 1$ vor (Fall 1); sonst liest man die Lösung(en) direkt aus B und Y ab wie in Bemerkung 16.9, mit Y an die Stelle der rechten Seite. $\triangle$

In einfachen Worten: Diese drei Fälle sind genau die drei Möglichkeiten, wie ein Ziel y relativ zu allem liegen kann, was die Maschine A überhaupt erreichen kann (ihrem Bild). **Unlösbar** heißt: das Ziel liegt schlicht außerhalb der Reichweite der Maschine – egal welchen Input man versucht, man kommt nie bei y heraus. **Eindeutig lösbar** heißt: das Ziel liegt in Reichweite, und es gibt *nur einen einzigen* Input, der genau dorthin führt (kein anderer Input wird „verschluckt“, es gibt also nichts, was man zusätzlich addieren könnte, ohne das Ziel zu verfehlen). **Unterbestimmt** heißt: das Ziel liegt zwar in Reichweite, aber es gibt *mehrere* (sogar unendlich viele) Wege dorthin – man darf zu einer gefundenen Lösung noch einen beliebigen Kernvektor addieren, ohne das Ergebnis zu ändern, ganz wie bei der „Partikulärlösung plus homogene Lösung“ aus den affinen Räumen (§ 13).

Beispiel 16.15 (lineare Gleichungssysteme – die drei Fälle).

(i) **Unlösbar:** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – die letzte Zeile liest sich $0 = 1$.

(ii) **Unterbestimmt:** Für dieselbe Matrix mit rechter Seite 6 statt 7 in der letzten Gleichung erhält man RREF $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, also die allgemeine Lösung $x = (-2, 6, 0)^\top + t(-2, 5, 1)^\top, t \in \mathbb{R}$ – eine Gerade (ein affiner Raum über $\ker(A)$).

(iii) **Eindeutig lösbar:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 23 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, also $x = (-5, 10, 2)^\top$.

$\triangle$

Beispiel 16.16 (Kirchhoffsche Regeln als lineares Gleichungssystem).

Ein elektrisches Netzwerk mit M unabhängigen Maschengleichungen und N unbekannten Strömen führt auf genau ein solches System $Ax = y$: Ist das Netzwerk „konsistent verdrahtet“, liegt Fall 2 vor (eindeutige Ströme); ein unterbestimmtes System (Fall 3) signalisiert, dass eine Masche redundant gewählt wurde. $\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 16.2

Übung 16.17. Lösen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Gauß-Elimination.

Übung 16.18. Geben Sie ein Beispiel für ein 2×2 -System, das unterbestimmt ist (unendlich viele Lösungen besitzt).

Übung 16.19 (etwas schwerer). Zeigen Sie direkt (ohne RREF): Ist x_0 eine Lösung von $Ax = y$ und $v \in \ker(A)$, so ist $x_0 + v$ ebenfalls eine Lösung – und jede Lösung hat diese Form.

§ 16.3 BERECHNUNG DER INVERSEN**Bemerkung 16.20 (das Verfahren).**

Für quadratisches $A \in \mathcal{M}_{N \times N}(F)$ sucht man die Spalten C_i der Inversen als Lösungen von $AC_i = e_i$ – das sind N Gleichungssysteme gleichzeitig, zusammengefasst in der erweiterten Matrix $[A \mid I]$. Genau dann, wenn die RREF von A die Einheitsmatrix ist, sind alle N Systeme lösbar, und man erhält die RREF $[I \mid A^{-1}]$ von $[A \mid I]$. Insbesondere: A ist invertierbar $\Leftrightarrow \ker(A) = 0$. $\triangle$

ORIGINAL: TEXT ZU
§ 6.3.3

In einfachen Worten: Die Inverse A^{-1} zu finden heißt nichts anderes, als für *jeden* der N Standard-Basisvektoren e_i herauszufinden, welcher Input die Maschine A dorthin schickt – das sind N separate Gleichungssysteme $AC_i = e_i$, eines pro Basisvektor. Der Trick des Verfahrens ist, alle diese N Systeme *gleichzeitig* zu lösen, indem man sie alle nebeneinander in eine einzige, breite erweiterte Matrix $[A \mid I]$ packt und die Gauß-Elimination nur einmal durchführt – am Ende stehen alle N gesuchten Spalten C_i bereits fertig nebeneinander, nämlich genau dort, wo vorher die Einheitsmatrix stand.

Beispiel 16.21 (Berechnung einer Inversen).

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -2 & \frac{1}{3} \end{array} \right],$$

$$\text{also } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -2 & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & -2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ für } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \triangle$$

ÜBUNGEN ZU § 16.3

Übung 16.22. Berechnen Sie die Inverse von $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mit dem $[A \mid I]$ -Verfahren.

Übung 16.23. Verifizieren Sie das Ergebnis der vorigen Übung durch Nachrechnen von $AA^{-1} = I$.

Übung 16.24 (etwas schwerer). Zeigen Sie: Ist A obere Dreiecksform mit lauter Einsen auf der Diagonale, so ist A invertierbar, ohne dass Sie das Gauß-Verfahren explizit durchführen müssen. *Hinweis: Was ist $\ker(A)$?*

§ 17 DIE DETERMINANTE

Die **Determinante** einer $N \times N$ -Matrix ist ein einzelner Zahlenwert, der dennoch erstaunlich viel über die Matrix verrät: ob sie invertierbar ist, wie sich Volumina unter der zugehörigen Abbildung verändern, sogar (im letzten Abschnitt dieses Kapitels) wie viele aufspannende Bäume ein Graph besitzt. Dieser Abschnitt entspricht Original 6.4.

ORIGINAL: ORIGINAL 6.4

In einfachen Worten, bevor die (zugegeben etwas einschüchternde) Formel gleich unten kommt: Am Ende dieses Abschnitts wirst du die Determinante über zwei ganz unterschiedliche, aber gleichwertige Bilder verstehen können – als „Verzerrungsfaktor“, um welchen eine lineare Abbildung Flächen bzw. Volumina streckt oder staucht (siehe die Abbildung weiter unten), und als „Ja/Nein-Test“ dafür, ob eine Matrix überhaupt invertierbar ist. Die konkrete Rechenformel selbst muss man sich für den Anfang nicht komplett einprägen – viel wichtiger ist, ein Gefühl für diese beiden Bedeutungen zu bekommen.

Bemerkung 17.1 (Permutationen und Signatur).

Die **symmetrische Gruppe** S_N ist die Gruppe aller Bijektionen $\sigma: \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$ mit $|S_N| = N!$. Jede Permutation zerfällt eindeutig in disjunkte **Zykel**; eine **Transposition** ist ein Zykel der Länge 2. Jede Permutation lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben, und die Parität der Anzahl benötigter Transpositionen ist unabhängig von der gewählten Zerlegung – sie definiert die **Signatur** $\epsilon(\sigma) \in \{+1, -1\}$. Die Signatur ist multiplikativ: $\epsilon(\sigma\tau) = \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)$. $\triangle$

ORIGINAL: TEXT VOR
DEFINITION 6.3

In einfachen Worten: Eine **Permutation** ist einfach eine bestimmte Art, N durchnummerierte Objekte neu anzuordnen – wie beim Mischen eines Kartenstapels. Jede solche Neuordnung lässt sich erreichen, indem man wiederholt nur *zwei* Karten miteinander vertauscht (eine **Transposition**); die **Signatur** $\epsilon(\sigma)$ verrät dann nur, ob man dafür eine *gerade* oder eine *ungerade* Anzahl solcher Zweivertauschungen gebraucht hat (+1 bzw. -1) – und diese Eigenschaft ist wohldefiniert, weil man dieselbe Mischung nie mit einer geraden *und* einer ungeraden Anzahl Vertauschungen erreichen kann.

Definition 17.2 (Determinante).

Die **Determinante** einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{N \times N}(F)$ ist

ORIGINAL: DEFINITION
6.3

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_N} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^N a_{i\sigma(i)}.$$

Äquivalent ist $\det$ die eindeutige Funktion $\mathcal{M}_{N \times N}(F) \rightarrow F$ mit $\det(I) = 1$, die **linear in jeder Zeile** ist, unter **Vertauschung zweier Zeilen das Vorzeichen wechselt**, und 0 ist, sobald zwei Zeilen übereinstimmen. Dieselben Eigenschaften gelten für Spalten, da $\det(A) = \det(A^\top)$ mit $(A^\top)_{ij} := a_{ji}$. $\triangle$

Die erste Formel (die **Leibniz-Formel**) ist eine Summe über *alle* $N!$ Permutationen – für große N völlig unpraktikabel zum Ausrechnen von Hand, aber theoretisch wichtig, weil sie die Determinante direkt aus den Matrixeinträgen definiert. Viel nützlicher zum Verständnis ist die zweite, äquivalente Charakterisierung: Die Determinante ist die *einzige* Funktion, die (a) für die Einheitsmatrix den Wert 1 liefert, (b) linear ist, wenn man nur eine einzige Zeile verändert und alle anderen festhält, und (c) ihr Vorzeichen wechselt, sobald man zwei Zeilen vertauscht (und deshalb automatisch 0 wird, sobald zwei Zeilen gleich sind – eine Vertauschung, die nichts verändert, kann das Vorzeichen ja nicht wirklich gewechselt haben, außer der Wert war schon 0). Diese drei Eigenschaften reichen aus, um in der Praxis (etwa via Gauß-Elimination) jede Determinante auszurechnen, ohne je die volle Leibniz-Summe hinschreiben zu müssen.

Beispiel 17.3 (Determinanten – einfach bis abstrakt).

- (i) Ganz einfach: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$, und $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ist die bekannte Regel von Sarrus mit sechs Termen.
- (ii) Physik, direkt: Beim Wechsel von Koordinaten $x \rightarrow x'(x)$ in einem Mehrfachintegral transformiert sich das Volumenelement als $d^D x' = |\det J| d^D x$, mit $J_{ij} = \partial x'^i / \partial x^j$ der **Jacobi-Matrix** – die Determinante misst also, um welchen Faktor eine lineare Abbildung Volumina streckt.
- (iii) Abstrakter: Die **Slater-Determinante** $\Psi(x_1, \dots, x_N) = \det[\psi_i(x_j)]$ konstruiert aus N Einteilchen-Wellenfunktionen ψ_i automatisch eine total antisymmetrische N -Teilchen-Wellenfunktion – die Antisymmetrie der Determinante unter Zeilenvertauschung ist mathematisch genau das Pauli-Prinzip für Fermionen.

$\triangle$

Bemerkung 17.4.

Für eine Diagonal- oder (obere/untere) Dreiecksmatrix trägt nur die identische Permutation bei, also $\det(A) = \prod_{i=1}^N a_{ii}$. $\triangle$

In einfachen Worten: Bei einer Dreiecksmatrix (alles unterhalb oder alles oberhalb der

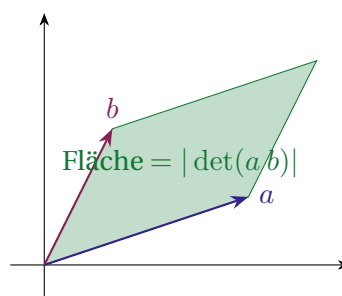


Abbildung 5.2: Die Determinante $\det(a \ b)$ zweier Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ ist (bis aufs Vorzeichen) die Fläche des von ihnen aufgespannten Parallelogramms.

Diagonale ist null) reicht schon ein Blick auf die Diagonale – alle anderen Permutationen in der Leibniz-Summe würden zwangsläufig irgendwann einen Nulleintrag treffen und tragen deshalb gar nichts bei. Das ist genau der Grund, warum man in der Praxis zunächst per Gauß-Elimination auf Dreiecksform bringt, bevor man die Determinante berechnet – danach ist es nur noch ein einziges Produkt.

Satz 17.5 (Determinante respektiert das Matrixprodukt).

Für $A, B \in \mathcal{M}_{N \times N}(F)$ gilt $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

ORIGINAL: PROPOSITION
6.1

Beweisskizze. Man entwickelt $\det(AB)$ spaltenweise nach der Multilinearität und erhält eine Summe über alle Indekskombinationen $j_1, \dots, j_N$; Terme mit zwei gleichen j 's verschwinden (zwei gleiche Spalten), und Ordnen der verbleibenden Terme (mit dem Vorzeichenwechsel bei Spaltenvertauschung) liefert genau $\det(A) \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(N)N} = \det(A) \det(B)$. $\square$

In einfachen Worten, mit dem Streckungsfaktor-Bild von oben: Schaltet man zwei lineare Abbildungen hintereinander (erst B anwenden, dann A), multiplizieren sich ihre Verzerrungsfaktoren einfach – verzerrt B Flächen um den Faktor 3 und A um den Faktor 5, verzerrt die Hintereinanderausführung insgesamt um den Faktor 15. Das ist genau das, was man von einem „Volumenfaktor“ naiv erwarten würde, und macht diesen Satz eigentlich selbstverständlich, sobald man das richtige Bild vor Augen hat.

Korollar 17.6 (die Determinante ist basisunabhängig).

Unter einem Basiswechsel $\tilde{A} = S^{-1}AS$ gilt $\det(\tilde{A}) = \det(S^{-1}) \det(A) \det(S) = \det(A)$.

ORIGINAL: COROLLARY
6.1

In einfachen Worten: Genau wie die Spur (Definition 15.3) ist auch die Determinante eine „echte“ Eigenschaft des zugrunde liegenden Operators, keine Eigenart der zufällig gewählten Basis – der Verzerrungsfaktor einer Abbildung hängt schließlich nicht davon ab, in welchem Koordinatensystem man gerade misst.

Beispiel 17.7.

Obwohl die einzelnen Matrixelemente sich unter einem Basiswechsel (scheinbar kompliziert)

ändern, bleibt die Determinante – ebenso wie die Spur (Definition 15.3) – unverändert. Beide sind Beispiele für **Invarianten** eines Operators, die unabhängig von der Wahl der beschreibenden Basis sind. $\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 17

Übung 17.8. Berechnen Sie $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Übung 17.9. Ist $\sigma = (1\ 3\ 2)$ (Zykelschreibweise) eine gerade oder ungerade Permutation?

Übung 17.10 (*etwas schwerer*). Zeigen Sie direkt aus der Leibniz-Formel, dass $\det(A) = 0$, sobald zwei Zeilen von A übereinstimmen.

§ 17.1 DIE DETERMINANTE UND DIE INVERSE EINER MATRIX

Lemma 17.11 (invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$).

Für $A \in \mathcal{M}_{N \times N}(F)$ gilt: A ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$.

ORIGINAL: LEMMA 6.1

Beweisskizze. Bis auf ein Vorzeichen bleibt die Determinante unter den elementaren Zeilenoperationen der Gauß-Elimination erhalten (Zeilenvertauschung und Skalierung ändern $\det$ nur um einen bekannten Faktor ± 1 bzw. α , Zeilenkombination gar nicht), sodass $\pm \det(A) = \det(B) = \prod_i b_{ii}$ für die Zeilenstufenform B von A . Nun ist A genau dann invertierbar, wenn alle Diagonaleinträge $b_{ii} \neq 0$ sind (Bemerkung 16.20), also genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$. $\square$

In einfachen Worten, mit dem Bild vom Anfang des Abschnitts: Eine Matrix mit $\det(A) = 0$ „quetscht“ den Raum in eine niedrigere Dimension platt – ein Volumen wird auf null zusammengedrückt (denk an eine Rotation *plus* eine Projektion auf eine Ebene: alles, was vorher ein echtes Volumen hatte, ist danach flach). Aus einer plattgedrückten Figur kann man aber nicht mehr eindeutig zurückrechnen, aus welcher ursprünglichen Figur sie entstanden ist – deshalb ist eine solche Abbildung nicht umkehrbar. Nur wenn $\det(A) \neq 0$ ist, bleibt tatsächlich ein echtes (wenn auch vielleicht verzerrtes) Volumen erhalten, und die Abbildung lässt sich rückgängig machen.

Lemma 17.12 ($\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ Spalten linear abhängig).

$\det(A) = 0$ genau dann, wenn die Spalten von A linear abhängig sind.

ORIGINAL: LEMMA 6.2

In Worten: Das ist dieselbe Aussage wie eben, nur anders formuliert – „plattgedrückt“ bedeutet ja gerade, dass die Spalten von A (die Bilder der Basisvektoren) nicht mehr in alle Richtungen zeigen, sondern in einem echt kleineren Unterraum zusammenfallen, also linear abhängig sind.

Satz 17.13 (Laplacescher Entwicklungssatz).

ORIGINAL: THEOREM 6.3

Für jede feste Zeile i gilt

$$\det(A) = \sum_{j=1}^N (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{i\hat{j}}),$$

wobei $A_{i\hat{j}}$ die Matrix ist, die durch Streichen von Zeile i und Spalte j aus A entsteht (der **Kofaktor**). Dieselbe Formel gilt spaltenweise.

Beweisskizze. Man klassifiziert die Permutationen in der Leibniz-Summe nach $\sigma(1) = j$; jeder resultierende Term ist (nach Multilinearität in der ersten Zeile) die Determinante einer Matrix, deren erste Zeile nur den Eintrag a_{1j} enthält, und die sich nach Spaltenvertauschung als $(-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1\hat{j}})$ entpuppt. $\square$

In einfachen Worten: Der **Laplacesche Entwicklungssatz** ist ein Rezept, um eine große Determinante schrittweise auf kleinere zurückzuführen – man wählt sich eine beliebige Zeile aus, streicht für jeden Eintrag dieser Zeile die zugehörige Zeile und Spalte weg (das ergibt den **Kofaktor**, eine um eins kleinere Matrix), und summiert die Kofaktor-Determinanten mit passenden Vorzeichen und Gewichten auf. Das ist genau die Methode, mit der man Determinanten von Hand für 3×3 - oder 4×4 -Matrizen ausrechnet, wenn die Regel von Sarrus nicht mehr reicht – man wählt dabei am besten eine Zeile (oder Spalte) mit möglichst vielen Nullen, um sich Arbeit zu sparen.

Korollar 17.14 (explizite Formel für die Inverse).

ORIGINAL: COROLLARY 6.2

Für $\det(A) \neq 0$ ist A invertierbar mit

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det(A)} (-1)^{i+j} \det(A_{j\hat{i}})$$

(man beachte die vertauschten Indizes am Kofaktor).

Beweisskizze. Die Behauptung $(AA^{-1})_{ik} = \delta_{ik}$ folgt aus dem Entwicklungssatz: für $j = k$ liefert die Summe $\sum_j a_{ij} (-1)^{k+j} \det(A_{k\hat{j}})$ genau $\det(A)$; für $j \neq k$ ist dieselbe Summe die Determinante einer Matrix, deren k -te Zeile durch eine Kopie der i -ten Zeile ersetzt wurde – also 0, da zwei Zeilen gleich sind. $\square$

In einfachen Worten: Diese Formel ist eine explizite, geschlossene Rechenvorschrift für die Inverse – praktisch, um zu *beweisen*, dass eine Inverse existiert und sich stetig aus den Einträgen von A berechnen lässt, aber (wie das folgende Beispiel bemerkt) für konkrete Zahlenrechnungen bei großem N ziemlich ineffizient, weil man dafür sehr viele kleinere Determinanten ausrechnen müsste. In der Praxis bleibt die Gauß-Elimination aus § 16.3 die Methode der Wahl.

Korollar 17.15 (Cramersche Regel).

Ist A invertierbar, so hat $Ax = y$ die eindeutige Lösung

ORIGINAL: COROLLARY
6.3

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

wobei A_i aus A entsteht, indem man die i -te Spalte durch y ersetzt.

In einfachen Worten: Die **Cramersche Regel** ist ein bequemer Notausgang, wenn man nur *eine einzelne* Komponente x_i der Lösung braucht, ohne das ganze Gleichungssystem lösen zu wollen – man ersetzt einfach die i -te Spalte von A probeweise durch die rechte Seite y und vergleicht die Determinante vorher/nachher. Für größere Systeme ist auch hier die Gauß-Elimination in der Praxis meist schneller, aber für 2×2 - oder 3×3 -Systeme (wie im folgenden Beispiel) ist die Cramersche Regel eine sehr schnelle Kopfrechnung.

Beispiel 17.16 (Determinante und Inverse in der Physik).

- (i) Ganz einfach: Ein 2×2 -Widerstandsnetzwerk führt oft auf ein 2×2 -Gleichungssystem, das sich mit der Cramerschen Regel in einer Zeile per Hand lösen lässt.
- (ii) Physik: Die Umkehrung einer Koordinatentransformation ist genau dann lokal möglich, wenn die Jacobi-Determinante nicht verschwindet – ein singulärer Punkt ($\det J = 0$) markiert, wo die Transformation ihre Umkehrbarkeit verliert (z. B. der Ursprung bei Polarkoordinaten).
- (iii) Abstrakter: Die Kofaktorformel für A^{-1} ist rechnerisch für große N ineffizient (sie benötigt N Determinanten der Größe $N-1$) – in der Praxis verwendet man stattdessen die Gauß-Elimination aus § 16.3. Die Kofaktorformel bleibt aber theoretisch wichtig, etwa um zu zeigen, dass A^{-1} stetig (sogar polynomial gebrochen-rational) von den Einträgen von A abhängt.

△

ÜBUNGEN ZU § 17.1

Übung 17.17. Berechnen Sie $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ durch Entwicklung nach der ersten Zeile.

Übung 17.18. Lösen Sie $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit der Cramerschen Regel.

Übung 17.19 (etwas schwerer). Zeigen Sie mit Korollar 17.14, dass $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

§ 17.2 BLOCKMATRIZEN

Satz 17.20 (Determinante und Inverse einer Blockmatrix).ORIGINAL: PROPOSITION
6.2

Für eine Blockmatrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ mit quadratischen Blöcken A, D gilt, falls $B = 0$ oder $C = 0$:

$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D)$. Ist A invertierbar, gilt allgemein

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B),$$

wobei $D - CA^{-1}B$ das **Schur-Komplement** von A heißt.

In einfachen Worten, bevor der Beweis kommt: Ist die Blockmatrix „block-dreieckig“ (also $B = 0$ oder $C = 0$, kein Übersprechen zwischen den beiden Teilräumen in der einen Richtung), verhält sie sich determinantenmäßig genau wie eine gewöhnliche Dreiecksmatrix – man multipliziert einfach die Determinanten der beiden Diagonalblöcke. Gibt es dagegen eine echte Kopplung in beide Richtungen ($B, C \neq 0$), muss man diese Kopplung erst „herausrechnen“: Das **Schur-Komplement** $D - CA^{-1}B$ ist genau das, was von D übrig bleibt, nachdem man den Effekt der Kopplung über A abgezogen hat – eine Art „effektive“ Version von D , die bereits berücksichtigt, was durch A hindurch mit B und C passiert.

Beweisskizze. Für $B = 0$ respektieren die Permutationen, die zur Determinante beitragen, notwendig die Blockstruktur (sie können die beiden Indexblöcke nicht mischen, da sonst ein Nulleintrag aus dem B -Block getroffen würde), sodass die Determinante in ein Produkt zweier Determinanten zerfällt. Für allgemeines B mit invertierbarem A nutzt man die Blockzerlegung

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

(direkt nachrechenbar) und wendet den bereits gezeigten Fall zusammen mit Satz 17.5 an (die zweite Matrix ist eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonale, also Determinante 1). $\square$

Beispiel 17.21 (Schur-Komplemente in der Physik).

Möchte man in einem gekoppelten System (etwa $D =$ „schnelle“ und $A =$ „langsame“ Freiheitsgrade mit Kopplung B, C) die schnellen Freiheitsgrade eliminieren, um eine effektive Beschreibung der langsamen zu erhalten, taucht genau das Schur-Komplement $D - CA^{-1}B$ auf – ein Verfahren, das in der Störungstheorie und bei der Reduktion gekoppelter Oszillatorsysteme („adiabatisches Eliminieren“) allgegenwärtig ist. $\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 17.2

Übung 17.22. Berechnen Sie $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ mithilfe der Blockformel für $B = 0$.

Übung 17.23. Bestimmen Sie das Schur-Komplement $D - CA^{-1}B$ für $A = (2)$, $B = (1 \ 0)$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D = I_2$.

Übung 17.24 (etwas schwerer). Zeigen Sie, dass die im Beweis benutzte Blockzerlegung tatsächlich korrekt ist, indem Sie das Matrixprodukt explizit ausrechnen.

§ 18 MINOREN EINER MATRIX

Definition 18.1 (Minor, Hauptminor).

Für $A \in \mathcal{M}_{M \times N}(F)$, eine Zeilenindexmenge I und eine Spaltenindexmenge J mit $|I| = |J|$ heißt $\det(A_{IJ})$ (die Determinante der aus den Zeilen I und Spalten J gebildeten quadratischen Untermatrix) ein **Minor** von A . Ist A quadratisch und $I = J$, heißt $\det(A_{II})$ ein **Hauptminor**. $\triangle$

ORIGINAL: TEXT VOR
PROPOSITION 6.3

In einfachen Worten: Ein **Minor** entsteht, indem man sich aus einer (nicht notwendig quadratischen) Matrix A eine *quadratische* Untertabelle herausucht – man wählt sich einfach gleich viele Zeilen wie Spalten aus (z. B. Zeilen $\{1, 3\}$ und Spalten $\{2, 4\}$) und bildet von genau diesem herausgeschnittenen Quadrat die Determinante. Ein **Hauptminor** ist der Spezialfall, bei dem man für eine quadratische Ausgangsmatrix dieselben Indizes für Zeilen und Spalten wählt (also ein Stück der Diagonale mitnimmt).

Satz 18.2 (Minoren und Rang).

Der **Rang** von A ist $\text{rank}(A) := \dim(\text{Im } A)$. Es gilt $\text{rank}(A) = r$ genau dann, wenn A einen von Null verschiedenen $r \times r$ -Minor besitzt, aber keinen größeren.

ORIGINAL: PROPOSITION
6.3

In einfachen Worten: Der **Rang** einer Matrix ist einfach die Dimension ihres Bildes – wie viele „wirklich unabhängige“ Richtungen die Maschine A tatsächlich erreichen kann (dieselbe Größe, die wir schon über die dominanten Spalten der RREF kennengelernt haben, § 16.1). Dieser Satz gibt eine dritte, äquivalente Methode, den Rang zu bestimmen: Man sucht das *größte* Quadrat innerhalb der Matrix, dessen Determinante nicht null ist – dessen Seitenlänge ist genau der Rang.

Beweisskizze. Sind $r+1$ Spalten von A linear abhängig, so ist jeder $(r+1) \times (r+1)$ -Minor, der nur diese Spalten benutzt, Null (Lemma 17.12). Umgekehrt liefert die RREF $A = FB$: sind die dominanten Spalten (eine Basis von $\text{Im } A$, Bemerkung 16.9) genau r an der Zahl, so ist der aus ihnen gebildete Minor – nach Multiplikation mit dem invertierbaren F – von Null verschieden. $\square$

Satz 18.3 (Cauchy-Binet-Formel).

ORIGINAL: THEOREM 6.4

Für $A \in \mathcal{M}_{M \times N}(F)$, $B \in \mathcal{M}_{N \times M}(F)$ mit $M \leq N$ gilt

$$\det(AB) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_M \leq N} \det(A_{j_1 \dots j_M}) \det(B_{j_1 \dots j_M}),$$

wobei $A_{j_1 \dots j_M}$ die $M \times M$ -Untermatrix von A mit den Spalten $j_1, \dots, j_M$ bezeichnet und $B_{j_1 \dots j_M}$ die $M \times M$ -Untermatrix von B mit den Zeilen $j_1, \dots, j_M$. Für $M = N$ reduziert sich dies auf $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ (Satz 17.5).

In einfachen Worten: Die **Cauchy-Binet-Formel** ist die Verallgemeinerung von „ $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ “ auf den Fall, dass A und B gar nicht quadratisch sind (also die einfache Multiplikativität nicht direkt anwendbar ist) – man summiert stattdessen über alle möglichen Weisen, aus A und B passende quadratische Untertabellen (Minoren) derselben Größe herauszupicken. Für quadratische Matrizen ($M = N$) gibt es nur eine einzige Möglichkeit, nämlich alles zu nehmen, und die Formel fällt exakt auf den vertrauten Satz zurück.

Beweisskizze. Der Beweis verläuft wörtlich wie der von Satz 17.5: Multilineare Entwicklung von $\det(AB)$ in den Spalten liefert eine Summe über alle Indextupel $j_1, \dots, j_M \in \{1, \dots, N\}$; Tupel mit Wiederholung tragen nicht bei (wiederholte Spalten), und Ordnen der übrigen Tupel nach ihren (nun paarweise verschiedenen) Werten liefert genau die behauptete Summe über aufsteigende Indexfolgen. $\square$

Bemerkung 18.4.

Insbesondere liefert die Cauchy-Binet-Formel auch eine Formel für Minoren eines Produkts: $\det[(AB)_{IJ}] = \sum_K \det(A_{IK}) \det(B_{KJ})$, wobei K über alle Teilmengen von $\{1, \dots, N\}$ mit $|K| = |I| = |J|$ läuft. Man kann die Determinante auch **diagonal entwickeln**: $\det(A) = \sum_{I \subset \{1, \dots, N\}} \det(A_{\hat{I}\hat{I}}) \prod_{i \in I} a_{ii}$, wobei $A_{\hat{I}\hat{I}}$ durch Streichen der Zeilen und Spalten in I entsteht. $\triangle$

Diese Bemerkung ist reines Zusatzmaterial für weiterführende Zwecke und kann beim ersten Lesen übersprungen werden – sie zeigt nur, dass sich dieselbe Cauchy-Binet-Idee („zerlege in kleinere Quadrate“) auch auf Minoren von Produkten und auf eine alternative, minorbasierte Entwicklung der Determinante entlang der Diagonale anwenden lässt.

Beispiel 18.5 (Rang und Minoren in der Physik).

In einem elektrischen Netzwerk mit N Knoten liefert das Kirchhoffsche Stromgesetz an jedem Knoten eine Gleichung – aber nur $N - 1$ davon sind unabhängig (die Summe aller N Gleichungen ist immer 0). Das ist genau die Aussage, dass die zugehörige Koeffizientenmatrix (wie wir gleich sehen werden: der Graph-Laplace) Rang $N - 1$ hat, nicht N . $\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 18

Übung 18.6. Bestimmen Sie den Rang von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ mithilfe eines geeigneten Minors.

Übung 18.7. Wie viele 2×2 -Minoren besitzt eine 3×3 -Matrix höchstens (einschließlich der Hauptminoren)?

Übung 18.8 (etwas schwerer). Zeigen Sie mit der Cauchy-Binet-Formel für $M = 1$: $\det(AB)$ für Zeilenvektor A und Spaltenvektor B ist einfach das Skalarprodukt der Einträge.

§ 18.1 DER MATRIX-BAUM-SATZ

Zum Abschluss dieses Kapitels verbinden wir Determinanten mit der Graphentheorie – und landen bei einem der schönsten Resultate der elementaren linearen Algebra, das seinen Ursprung tatsächlich in der Physik hat: Gustav Kirchhoff entdeckte es 1847 bei der Berechnung von Widerstandsnetzwerken.

In einfachen Worten, ganz ohne Fachbegriffe, bevor die Definitionen kommen: Ein **Graph** ist einfach ein Haufen Punkte („Knoten“), von denen manche durch Linien („Kanten“) verbunden sind – ein Verkehrsnetz, ein Netzwerk aus Freunden, oder eben ein Stromkreis. Ein **Baum** ist ein Graph, der zusammenhängt (man kommt von jedem Punkt zu jedem anderen), aber *keine* Schleifen enthält – wie ein Familienstammbaum oder ein Flusssystem, bei dem jeder Nebenfluss nur auf *einem* Weg zum Hauptfluss zurückführt, nie auf zwei verschiedenen. Ein **aufspannender Baum** eines Graphen ist eine „minimale Auswahl“ an Kanten, die trotzdem noch alle Knoten zusammenhält, ohne dass irgendwo eine überflüssige Schleife entsteht.

Definition 18.9 (Graph, Weg, Baum).

Ein **Graph** $G = (V, E)$ besteht aus einer endlichen Knotenmenge $V = \{1, \dots, N\}$ und einer Kantenmenge E (Paaren von Knoten, ohne Schleifen oder Mehrfachkanten). Ein **Weg** ist eine Folge von Kanten, in der aufeinanderfolgende Kanten einen Knoten teilen; ein Weg ist **einfach**, wenn alle Zwischenknoten verschieden sind, und ein **Zyklus** (Kreis), wenn Anfangs- und Endknoten übereinstimmen. Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn je zwei Knoten durch einen Weg verbunden sind, und ein **Baum**, wenn er zusammenhängend ist und keine Zyklen enthält. In einem Baum sind je zwei Knoten durch genau einen einfachen Weg verbunden. Wir bezeichnen mit $\kappa(G)$ die Anzahl der **aufspannenden Bäume** von G (Teilgraphen mit denselben Knoten, die Bäume sind). $\triangle$

ORIGINAL: DEFINITION 6.4, 6.5

Lemma 18.10 (Charakterisierung von Bäumen).

Ein Graph über N Knoten ist genau dann ein Baum, wenn er keinen Zyklus enthält und genau $N - 1$ Kanten hat.

ORIGINAL: LEMMA 6.4

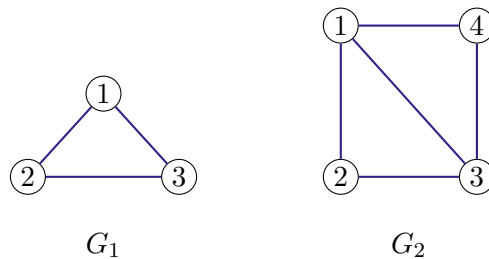


Abbildung 5.3: Zwei Beispielgraphen: G_1 das Dreieck ($N = 3$), G_2 mit vier Knoten und den Kanten $\{12, 13, 14, 23, 34\}$.

Beweisskizze. Löscht man in einem Baum eine Kante (i, j) , so zerfällt der Baum in genau zwei Zusammenhangskomponenten (die von i bzw. j aus ohne diese Kante erreichbaren Knoten) – jede Kantenlöschung erhöht also die Zahl der Komponenten um genau 1. Löscht man so nacheinander alle Kanten, endet man bei N isolierten Knoten, ausgehend von 1 Komponente; es müssen also genau $N - 1$ Löschungen (Kanten) gewesen sein. Für die Umkehrung: Ist ein Graph mit $N - 1$ Kanten und ohne Zyklen nicht zusammenhängend, so verletzt eine Abzählung von Kanten und Knoten in den einzelnen Komponenten die Voraussetzung; ein Widerspruchargument (über einen gierigen Baum-Konstruktionsalgorithmus) schließt diesen Fall aus. $\square$

In Worten: Ein Baum ist also nicht nur „zusammenhängend ohne Schleifen“, sondern auch „gerade genau richtig verkabelt“ – er hat exakt eine Kante weniger als Knoten, nicht mehr und nicht weniger. Jede zusätzliche Kante würde zwangsläufig eine Schleife erzeugen (da schon alles verbunden ist), und jede fehlende Kante würde den Zusammenhang zerstören.

Bemerkung 18.11 (vier Matrizen eines Graphen).

Zu einem Graphen G gehören mehrere natürliche Matrizen:

Adjazenzmatrix A : $A_{ij} = 1$, falls $(i, j) \in E$, sonst 0.

Inzidenzmatrix B ($N \times |E|$, nach Wahl einer Kantenorientierung): $B_{ie} = 1$, falls e in i endet, -1 , falls e in i beginnt, sonst 0.

Gradmatrix D : Diagonalmatrix mit $D_{ii} = d_i$, der Anzahl der zu i inzidenten Kanten.

Laplace-Matrix $L := D - A$.

In einfachen Worten, jede Matrix einzeln: Die **Adjazenzmatrix** A ist einfach eine Ja/Nein-Tabelle, welche Knotenpaare direkt verbunden sind. Die **Inzidenzmatrix** B protokolliert stattdessen, für jede einzelne Kante, wo sie beginnt (-1) und wo sie endet ($+1$) – eine Art Buchhaltung des „Kantenflusses“. Die **Gradmatrix** D zählt pro Knoten nur, wie viele Kanten an ihm hängen. Und die **Laplace-Matrix** $L = D - A$ kombiniert beides zu einer einzigen Matrix, die (wie das folgende Beispiel zeigt) genau die Kopplungsstärke zwischen benachbarten Knoten beschreibt – eine Konstruktion, die weit über die Graphentheorie hinaus in der Physik gekoppelter Systeme allgegenwärtig ist. Für G_1 (Dreieck) und G_2 (Abbildung, Kanten

lexikographisch geordnet):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \text{diag}(3, 2, 3, 2), L_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

△

Beispiel 18.12 (der Graph-Laplace in der Physik).

- (i) Physik, fundamental: Verbindet man N Massen durch identische Federn entlang der Kanten eines Graphen G , so ist L genau die Kopplungsmatrix der Bewegungsgleichung $\ddot{x} = -Lx$ – die Eigenwerte von L liefern die Normalmoden des gekoppelten Systems.
- (ii) Physik: In einem Widerstandsnetzwerk mit Einheitswiderständen auf jeder Kante ist L die Koeffizientenmatrix der Kirchhoffschen Knotengleichungen; das ist Kirchhoffs ursprüngliche Motivation aus dem Jahr 1847.

△

Lemma 18.13.

Für die Inzidenzmatrix B gilt $BB^\top = L$.

ORIGINAL: LEMMA 6.5

Beweisskizze. $(BB^\top)_{ij} = \sum_e B_{ie}B_{je}$. Für $i \neq j$ trägt nur die (höchstens eine) Kante zwischen i und j bei, mit Beitrag $1 \cdot (-1) = -1$ (das ist $-A_{ij}$); für $i = j$ trägt jede zu i inzidente Kante mit $(\pm 1)^2 = 1$ bei, macht d_i (das ist D_{ii}). Zusammen: $BB^\top = D - A = L$. □

Lemma 18.14 (Minoren der reduzierten Inzidenzmatrix).

Es sei ein Knoten (die **Wurzel**) fest gewählt und $\tilde{B}$ die Inzidenzmatrix ohne die zugehörige Zeile, sodass $\tilde{L} := \tilde{B}\tilde{B}^\top$ die Laplace-Matrix ohne die Wurzelzeile/-spalte ist. Für jede $(N-1)$ -elementige Kantenmenge I gilt

ORIGINAL: LEMMA 6.6

$$\det(\tilde{B}_I) = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } I \text{ ein aufspannender Baum ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisskizze. Enthält I einen Zyklus, so lässt sich dieser (nach passender Umorientierung) so durchlaufen, dass die entsprechenden Spalten von $\tilde{B}$ linear abhängig sind (ihre Summe verschwindet zeilenweise entlang des Zyklus), also $\det(\tilde{B}_I) = 0$. Ist I zyklensfrei mit $N-1$ Kanten, so ist I nach Lemma 18.10 ein Baum; durch wiederholte Entwicklung nach einer Spalte, die zu einem Blatt des Baumes gehört (mit nur einem von Null verschiedenen Eintrag), reduziert man induktiv auf einen kleineren Baum, bis $\det(\tilde{B}_I) = \pm 1$ übrig bleibt. □

In Worten, ohne die technischen Details: Dieses Lemma ist der eigentliche Kraftakt hinter dem gleich folgenden Hauptsatz – es sagt, dass eine bestimmte Determinante wie ein perfekter Ja/Nein-Detektor für Bäume funktioniert: Sie liefert exakt ± 1 , wenn die gewählten Kanten einen aufspannenden Baum bilden, und exakt 0 sonst (also bei jeder Auswahl mit einer Schleife). Genau diese binäre „Alles-oder-Nichts“-Eigenschaft macht die kommende Zählformel möglich.

Satz 18.15 (Matrix-Baum-Satz).

ORIGINAL: THEOREM 6.5

Für einen zusammenhängenden Graphen G mit reduzierter Laplace-Matrix $\tilde{L}$ (nach Streichen einer beliebigen Wurzelzeile/-spalte) gilt

$$\det(\tilde{L}) = \kappa(G),$$

die Anzahl der aufspannenden Bäume von G .

Beweis. Da $\tilde{L} = \tilde{B}\tilde{B}^\top$, liefert die Cauchy-Binet-Formel (Satz 18.3) $\det(\tilde{L}) = \sum_I \det(\tilde{B}_I)^2$, wobei die Summe über alle $(N-1)$ -elementigen Kantenmengen I läuft. Nach Lemma 18.14 trägt jeder Summand entweder 0 (kein Baum) oder 1 (ein Baum, da $(\pm 1)^2 = 1$) bei – die Summe zählt also genau die aufspannenden Bäume. $\square$

In einfachen Worten – und das ist wirklich einer der überraschendsten Sätze dieses Skripts: Man kann die Anzahl der aufspannenden Bäume eines Graphen, eine rein *kombinatorische* Größe („wie viele Möglichkeiten gibt es, ...“), einfach ausrechnen, indem man eine einzige Determinante bildet – ein Werkzeug aus der linearen Algebra, das auf den ersten Blick überhaupt nichts mit Bäume zählen zu tun hat. Der Trick dahinter ist die Cauchy-Binet-Formel: Sie zerlegt die Determinante in eine Summe über *alle* möglichen $(N-1)$ -elementigen Kantenauswahlen, und das vorige Lemma sorgt dafür, dass am Ende nur die tatsächlichen Bäume „mitzählen“ (mit Beitrag 1) und alles andere spurlos verschwindet (Beitrag 0).

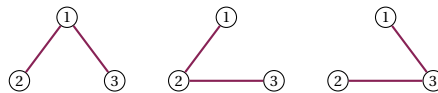


Abbildung 5.4: Die drei aufspannenden Bäume von G_1 – je einer für jede der drei möglichen weggelassenen Kanten.

Beispiel 18.16 (der Matrix-Baum-Satz – ausgerechnet).

Mit Wurzel 1 gestrichen:

$$\det(\tilde{L}_1) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3, \quad \det(\tilde{L}_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 8.$$

G_1 (das Dreieck) hat also 3 aufspannende Bäume – genau die drei Möglichkeiten, eine der drei Kanten wegzulassen (Abbildung oben). G_2 hat 8 aufspannende Bäume. $\triangle$

Beispiel 18.17 (Kirchhoffs Satz über effektive Widerstände).

Kirchhoffs ursprüngliches Resultat (aus dem der Matrix-Baum-Satz später verallgemeinert wurde) drückt den effektiven Widerstand zwischen zwei Knoten eines Widerstandsnetzwerks als *Verhältnis von Baumzahlen* aus: Der effektive Widerstand zwischen i und j ist proportional zur Anzahl der aufspannenden Bäume, die i und j trennen (wenn man die Kante (i, j) probeweise hinzufügt und die resultierenden Zwei-Baum-Wälder zählt), geteilt durch $\kappa(G)$ – eine rein kombinatorische Formel für eine ursprünglich analoge (kontinuierliche) physikalische Größe! $\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 18.1

Übung 18.18. Zeichnen Sie die drei aufspannenden Bäume von G_1 noch einmal selbst und listen Sie ihre Kantenmengen auf.

Übung 18.19. Berechnen Sie $\det(\tilde{L})$ für den Graphen mit $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und $E = \{12, 23, 34, 41\}$ (ein Viereck/Zyklus). Wie viele aufspannende Bäume hat ein N -Zyklus allgemein? *Hinweis: Ein Baum entsteht aus dem Zyklus durch Entfernen genau einer Kante.*

Übung 18.20 (etwas schwerer). Zeigen Sie, dass die Zeilensummen von L (und damit auch von $\tilde{L}$ nach Streichen) stets 0 sind, und folgern Sie, dass $\det(L) = 0$ für den vollen (nicht reduzierten) Laplace jedes Graphen gilt.

6 Funktionen, erste Begegnung

ORIGINAL: KAPITEL 7

Wir kennen bereits zwei Beschreibungen von Stetigkeit: über offene Mengen (Definition 4.7) und über Folgen (Satz 6.7). In der Praxis rechnet man meist mit einer dritten, der klassischen ϵ - δ -Definition – dieses Kapitel zeigt, dass alle drei dasselbe bedeuten, und zieht daraus die klassischen Sätze über reelle Funktionen. Es entspricht Kapitel 7 (*Functions, first contact*) des Originalskripts.

In einfachen Worten, bevor es losgeht: Dieses Kapitel ist in gewisser Weise eine große Belohnung für die ganze bisherige Arbeit – fast alles, was wir über Folgen, Kompaktheit und Vollständigkeit gelernt haben, wird hier zu handfesten, vertrauten Aussagen über Funktionen zusammengeführt: dass stetige Funktionen keine Sprünge machen (Zwischenwertsatz), dass sie ihr Maximum und Minimum tatsächlich *erreichen* (Satz vom Minimum und Maximum), und schließlich zur Ableitung, dem Handwerkszeug, mit dem man in der Physik eigentlich täglich arbeitet.

§ 19 STETIGKEIT

ORIGINAL: DEFINITION
7.1

Definition 19.1 (punktweise Stetigkeit).

Für metrische Räume X, Y heißt $f: X \rightarrow Y$ **punktweise stetig** in x , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \epsilon$. Eine Funktion ist **stetig fortsetzbar** in einen Punkt x außerhalb ihres Definitionsbereichs, wenn es eine in x stetige Fortsetzung $\bar{f} \supset f$ gibt. $\triangle$

In einfachen Worten, diese berühmte ϵ - δ -Definition noch einmal ganz langsam: Man gibt dir eine beliebig kleine „Zielgenauigkeit“ ϵ vor – wie nah der Funktionswert $f(x')$ am Wert $f(x)$ liegen soll. Stetigkeit bei x verspricht dir dann, dass du dafür *immer* eine passende „Eingabetoleranz“ δ findest: Bleibst du mit deinem Input x' innerhalb dieser Toleranz um x , landet der Output garantiert innerhalb der gewünschten Zielgenauigkeit um $f(x)$. Genau das ist die präzise Version von „kleine Änderungen der Eingabe führen nur zu kleinen Änderungen der Ausgabe“ – derselbe Gedanke wie beim „keine Sprünge“-Bild aus dem Topologie-Kapitel, jetzt nur mit expliziten Zahlen statt offenen Mengen ausgedrückt.

ORIGINAL: THEOREM
7.1, 7.2

Satz 19.2 (drei gleichwertige Stetigkeitsbegriffe).

Für $f: X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen sind äquivalent:

- (i) f ist stetig (das Urbild jeder offenen Menge ist offen, Definition 4.7);
- (ii) f ist folgenstetig (Satz 6.7);

(iii) f ist punktweise stetig in jedem Punkt (Definition 19.1).

Beweisskizze. „(i) $\Leftrightarrow$ (ii)“ ist genau Satz 6.7. Für „(i) $\Rightarrow$ (iii)“: Ist f stetig, so ist $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ offen und enthält x , also gibt es δ mit $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ – das ist genau die ϵ - δ -Bedingung. Für „(iii) $\Rightarrow$ (i)“: Ist f punktweise stetig, aber $f^{-1}(V)$ für ein offenes V nicht offen, so gibt es $x \in f^{-1}(V)$, sodass jede Kugel $B_\delta(x)$ Punkte außerhalb $f^{-1}(V)$ enthält; da V offen ist, gibt es ϵ mit $B_\epsilon(f(x)) \subset V$, und die ϵ - δ -Bedingung liefert für dieses ϵ ein δ , das aber gerade widerspricht, dass $B_\delta(x)$ Punkte außerhalb $f^{-1}(V)$ enthält. $\square$

In Worten, die gute Nachricht dieses Satzes: Wir haben in diesem Skript drei ganz unterschiedlich klingende Definitionen von Stetigkeit kennengelernt – über offene Mengen (sehr abstrakt), über Folgen („konvergente Folgen bleiben konvergent“) und jetzt über ϵ - δ (sehr konkret und rechnerisch). Dieser Satz zeigt, dass man sich *nie* entscheiden muss, welche davon „die richtige“ ist – sie beschreiben exakt dasselbe Phänomen, und man darf sich in jeder Situation einfach die bequemste aussuchen. In der Praxis rechnet man mit ϵ - δ , denkt aber oft in Folgen oder offenen Mengen, je nachdem, was gerade anschaulicher ist.

Bemerkung 19.3 (Stetigkeit erhält sich unter den üblichen Operationen).

Die Komposition stetiger Funktionen ist stetig (das Urbild einer offenen Menge unter $g \circ f$ ist das Urbild des Urbilds). Summen, Produkte und (dort wo definiert) Quotienten stetiger Funktionen $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig. Insbesondere ist jedes Polynom stetig, als endliche Summe von Produkten der stetigen Funktion $x \mapsto x$ mit sich selbst und mit Konstanten. $\triangle$

ORIGINAL: EXERCISE 7.1,
7.2

Beispiel 19.4 (Thomaes Funktion – stetig, wo man es nicht erwartet).

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

ORIGINAL: EXERCISE 7.3

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & x = p/q \text{ mit } p, q \text{ teilerfremd, } q > 0, \\ 1 & x = 0, \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist stetig an *jeder irrationalen* Stelle und unstetig an *jeder rationalen* Stelle – ein Punkt, an dem eine Funktion „fast überall“ stetig, aber auf einer dichten Menge (Satz 5.16) unstetig ist. Die Idee: An einer rationalen Stelle x gibt es beliebig nahe irrationale Punkte mit Funktionswert $0 \neq f(x)$; an einer irrationalen Stelle x gibt es zu jedem ϵ nur endlich viele Brüche p/q mit $q < 1/\epsilon$ in der Nähe von x , so dass man δ klein genug wählen kann, um sie alle auszuschließen. $\triangle$

Keine Sorge, wenn dieses Beispiel beim ersten Lesen den Kopf verdreht – das soll es auch! Thomaes Funktion ist ein bewusst konstruiertes „Kuriositätenkabinett“-Beispiel, das zeigt, wie subtil und mächtig die ϵ - δ -Definition wirklich ist: Stetigkeit ist keine Eigenschaft, die man sich immer nur „mit dem Auge“ am Funktionsgraphen ansehen kann (dieser Graph lässt sich gar nicht vernünftig zeichnen), sondern eine, die man notfalls buchstabengetreu nachrechnen muss.

Satz 19.5 (Potenzreihen sind stetig).

ORIGINAL: EXERCISE 7.4

Eine Potenzreihe $P(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ist stetig an jedem Punkt ihres Konvergenzkreises.

Beweisskizze. Für $|z|, |w| < \rho < r$ (mit r dem Konvergenzradius) gilt $|z^n - w^n| = |z - w| \left| \sum_{p=0}^{n-1} z^p w^{n-1-p} \right| \leq |z - w| n \rho^{n-1}$, und da die Potenzreihe $\sum_n a_n n \rho^{n-1}$ (mit demselben Konvergenzradius r , da $n^{1/n} \rightarrow 1$) konvergiert, wird $|P(z) - P(w)| \leq |z - w| \sum_n |a_n| n \rho^{n-1}$ beliebig klein für $z \rightarrow w$. $\square$

Bemerkung 19.6.

Insbesondere ist $\exp$ (Definition 8.25) auf ganz $\mathbb{C}$ stetig. Für $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zählt man f als stetig *auf dem abgeschlossenen Intervall*, wenn f auf (a, b) stetig ist und die einseitigen Grenzwerte an den Endpunkten mit den Funktionswerten übereinstimmen, $\lim_{x \searrow a} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \nearrow b} f(x) = f(b)$. $\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 19

Übung 19.7. Zeigen Sie direkt mit der ϵ - δ -Definition, dass $f(x) = 2x + 1$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

Übung 19.8. An welchen Stellen ist Thomaes Funktion (Beispiel 19.4) unstetig – und mit welchem „Sprung“?

Übung 19.9 (etwas schwerer). Zeigen Sie, dass $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, stetig ist, obwohl sie an $x = 0$ nicht differenzierbar ist. *Hinweis: Stetigkeit und Differenzierbarkeit sind verschiedene Eigenschaften.*

§ 20 DER ZWISCHENWERTSATZ

Stetige Funktionen „springen“ nicht: Wer bei -2°C beginnt und bei $+3^\circ\text{C}$ endet, muss irgendwann genau 0°C durchlaufen haben. Das ist die ganze Idee des Zwischenwertsatzes.

Satz 20.1 (Zwischenwertsatz).

ORIGINAL: THEOREM 7.3

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $f([a, b])$ ein Intervall, und jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird angenommen: für jedes u zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es $c \in [a, b]$ mit $f(c) = u$.

Beweis. Wir nehmen $f(a) < u < f(b)$ an (der andere Fall verläuft analog). Die Menge $S := \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq u\}$ ist nichtleer ($a \in S$) und durch b beschränkt, besitzt also ein Supremum c (Satz 3.31). Zu jedem ϵ gibt es wegen der Stetigkeit von f in c ein δ mit $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$. Da c Supremum von S ist, gibt es $x \in S \cap (c - \delta, c]$, also $f(x) \leq u$ und somit $f(c) < u + \epsilon$; andererseits liegt kein $x' \in (c, c + \delta)$ in S , also $u < f(x')$ und somit $u - \epsilon < f(c)$. Da ϵ beliebig war, folgt $f(c) = u$. Dass $f([a, b])$ ein Intervall ist, folgt, weil zwischen $f(a)$ und $f(c)$ (für jedes $c \in [a, b]$) ebenfalls jeder Wert angenommen wird. $\square$

In Worten: Der Beweis-Trick ist derselbe wie beim Monotonie-Konvergenz-Satz aus dem Folgen-Kapitel – man definiert sich eine Menge „alles, was noch unterhalb des Zielwerts u liegt“, nimmt davon das Supremum c , und zeigt dann mit der Stetigkeit von f , dass an genau dieser Stelle c der Zielwert u tatsächlich erreicht wird (nicht nur fast erreicht). Anschaulich bleibt die Kernidee aber ganz einfach: Eine stetige Funktion, die bei -2° beginnt und bei $+3^\circ$ endet, kann den Wert 0° nicht „überspringen“, ohne ihn irgendwann exakt durchlaufen zu haben.

Korollar 20.2 (streng monotone stetige Funktionen sind Bijektionen mit stetiger Umkehrfunktion).

Ist $f: I \rightarrow J := f(I)$ streng monoton und stetig auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so ist f eine Bijektion, J ist ein Intervall, und $f^{-1}: J \rightarrow I$ ist ebenfalls streng monoton und stetig.

ORIGINAL: COROLLARY 7.1

Beweisskizze. Strenge Monotonie liefert sofort Injektivität, und Surjektivität auf $J = f(I)$ gilt per Definition – also ist f bijektiv. Nach dem Zwischenwertsatz ist J ein Intervall, und f^{-1} ist wieder streng monoton (da $y_1 > y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, sonst widerspräche das der Monotonie von f). Für die Stetigkeit von f^{-1} : Die strenge Monotonie zusammen mit dem Zwischenwertsatz zeigt, dass das Bild jedes offenen Intervalls $(x_1, x_2) \subset I$ das offene Intervall $(f(x_1), f(x_2))$ enthält, also offen ist; damit ist f eine offene Abbildung, und f^{-1} ist stetig. $\square$

In einfachen Worten: Dieses Korollar bestätigt nur eine Erwartung, die man ohnehin schon aus dem Alltag hätte – ist eine Funktion streng monoton (immer nur steigend oder immer nur fallend) und stetig, „verbiegt“ sie ihren Definitionsbereich nur, ohne ihn zu falten oder zu zerreißen; deshalb lässt sich der Vorgang eindeutig umkehren, und die Umkehrung ist selbst wieder ganz brav (monoton und stetig), ohne dass man das extra nachweisen müsste.

Bemerkung 20.3 (Grenzwerte im Unendlichen).

Für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ schreibt man $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, wenn es zu jedem ϵ ein y gibt mit $x > y \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$, und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, wenn es zu jedem M ein δ gibt mit $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$ (entsprechend für Folgen, $\lim x_n = \infty$). $\triangle$

Beispiel 20.4 (der Zwischenwertsatz in der Physik).

- (i) Ganz einfach: Erwärmt sich ein Metallstab stetig von -2°C auf $+3^\circ\text{C}$, so gab es einen Zeitpunkt mit exakt 0°C – dem Gefrierpunkt.
- (ii) Physik/Numerik: Das **Bisektionsverfahren** zur Nullstellensuche nutzt den Zwischenwertsatz direkt aus: Hat f an den Intervallenden entgegengesetzte Vorzeichen, so halbiert man das Intervall wiederholt und behält stets die Hälfte mit Vorzeichenwechsel – eine explizite, konstruktive Version des Beweises oben (vergleichen Sie mit der Intervallschachtelung, Satz 7.24!).

$\triangle$

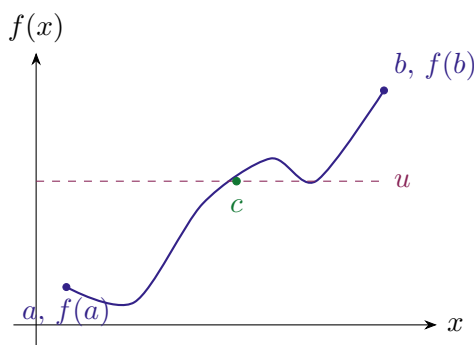


Abbildung 6.1: Zwischenwertsatz: jeder Wert u zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird an einer Stelle c tatsächlich angenommen.

ÜBUNGEN ZU § 20

Übung 20.5. Zeigen Sie mit dem Zwischenwertsatz, dass $f(x) = x^3 - x - 1$ eine Nullstelle in $[1, 2]$ besitzt.

Übung 20.6. Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, auf $[-1, 1]$ injektiv? Widerspricht das Korollar 20.2?

Übung 20.7 (etwas schwerer). Zeigen Sie: Jedes reelle Polynom ungeraden Grades besitzt mindestens eine reelle Nullstelle. *Hinweis: Was passiert mit $P(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$?*

§ 20.1 DIE EXPONENTIALFUNKTION UND KONVEXITÄT

Definition 20.8 (konvex, konkav).

Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall I heißt **konvex**, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ und $t \in [0, 1]$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

gilt – geometrisch: der Graph von f liegt unterhalb jeder Sekante. f heißt **konkav**, wenn $-f$ konvex ist. △

In einfachen Worten, mit der Abbildung gleich unten vor Augen: **Konvex** bedeutet einfach „schüsselförmig“ – verbindest du zwei beliebige Punkte auf dem Graphen mit einer geraden Linie (einer Sekante), liegt der gesamte Graph dazwischen *unterhalb* dieser Linie, nie darüber. Eine Parabel x^2 ist das klassische Beispiel. **Konkav** ist genau das Gegenteil – „kuppelförmig“, der Graph liegt *oberhalb* jeder Sekante – und man merkt sich den Unterschied am einfachsten daran, dass eine konkave Funktion einfach eine auf den Kopf gestellte konvexe Funktion ist ($-f$).

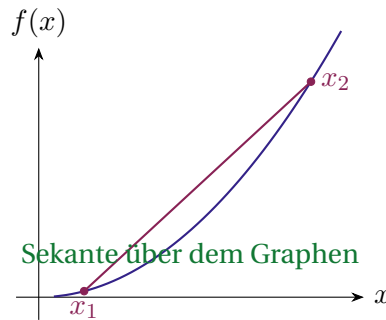


Abbildung 6.2: Konvexität (Definition 20.8): der Graph einer konvexen Funktion liegt unterhalb jeder Sekante zwischen zwei Punkten.

Satz 20.9 (exp ist eine Bijektion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$).

Die reelle Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Ihre Umkehrfunktion $\ln: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, der **natürliche Logarithmus**, ist ebenfalls streng monoton wachsend und stetig.

ORIGINAL: PROPOSITION 7.1

Beweisskizze. Aus der Reihe folgt $e^x \geq 1 + x$ für $x \geq 0$, insbesondere $e^x > 1$ für $x > 0$; mit $e^{x+y} = e^x e^y$ (Satz 8.26) folgt für $x > y$: $e^x - e^y = e^y(e^{x-y} - 1) > 0$, also strenge Monotonie. Stetigkeit ist Satz 19.5. Aus $e^x \geq 1 + x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$) und $e^{-x} = 1/e^x \rightarrow 0$ folgt mit dem Zwischenwertsatz (Satz 20.1), dass jeder Wert in $(0, \infty)$ angenommen wird – also ist $\exp$ surjektiv auf $\mathbb{R}_{>0}$, zusammen mit der Injektivität also bijektiv. Korollar 20.2 liefert den Rest. $\square$

In einfachen Worten: Dieser Beweis ist ein schönes Beispiel dafür, wie mehrere zuvor bewiesene Sätze plötzlich Hand in Hand arbeiten – die Reihen-Abschätzung liefert die Monotonie, der vorige Stetigkeitssatz die Stetigkeit, der Zwischenwertsatz die Surjektivität, und das Korollar von oben liefert am Ende sogar automatisch, dass die Umkehrfunktion (der Logarithmus) ebenfalls stetig und monoton ist – ganz ohne das gesondert nachrechnen zu müssen.

Satz 20.10 (drei klassische Konvexitätsaussagen).

ORIGINAL: TEXT VOR THEOREM 7.3

- (i) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $x \mapsto x^n$ konvex auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$.
- (ii) $\exp$ ist konvex auf $\mathbb{R}$.
- (iii) $\ln$ ist konkav auf $\mathbb{R}_{>0}$.

Beweisskizze. (i) Induktion über n ; der Induktionsschritt nutzt $[ta + (1-t)b]^{n+1} = [ta + (1-t)b]^n [ta + (1-t)b]$ und schätzt den ersten Faktor mit der Induktionsvoraussetzung ab.

(ii) Für $x, y > 0$ liefert (i), angewendet auf jeden Summanden der Exponentialreihe, $e^{tx+(1-t)y} \leq te^x + (1-t)e^y$; für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ verschiebt man beide Argumente um ein festes z mit $x+z, y+z > 0$ und nutzt $e^{tx+(1-t)y} = e^{-z} e^{t(x+z)+(1-t)(y+z)}$.

(iii) Allgemein gilt: die Umkehrfunktion einer streng monoton wachsenden konvexen Funktion ist konkav (aus $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ folgt durch Anwenden von f^{-1} auf beide Seiten, mit $y_i = f(x_i)$, die Ungleichung $tf^{-1}(y_1) + (1-t)f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(ty_1 + (1-t)y_2)$). Mit (ii) und $\ln = \exp^{-1}$ folgt die Konkavität von $\ln$. $\square$

Beispiel 20.11 (Konvexität in der Physik).

- (i) Physik: Die **Gibbssche Ungleichung** und verwandte Resultate der statistischen Physik (etwa die Bogoliubov-Ungleichung für freie Energien) beruhen direkt auf der Konvexität von $\exp$ bzw. der Konkavität von $\ln$, angewendet auf Erwartungswerte über Wahrscheinlichkeitsverteilungen (**Jensensche Ungleichung**).
- (ii) Abstrakter: Konvexität wird im nächsten Unterabschnitt (Satz 22.11) mit dem Vorzeichen der zweiten Ableitung in Verbindung gebracht – eine viel handlichere Charakterisierung, sobald man Ableitungen zur Verfügung hat.

△

ÜBUNGEN ZU § 20.1

Übung 20.12. Zeigen Sie $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \geq 0$ direkt aus der Reihendefinition von $\exp$.

Übung 20.13. Warum ist $x \mapsto x^2$ auf ganz $\mathbb{R}$ konvex, obwohl Satz 20.10(i) das nur für $x \geq 0$ zeigt? *Hinweis: Betrachten Sie die Fälle getrennt.*

Übung 20.14 (etwas schwerer). Zeigen Sie mit der Konkavität von $\ln$, dass $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\ln x + \ln y}{2}$ für $x, y > 0$, und folgern Sie die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

§ 21 DER SATZ VOM MINIMUM UND MAXIMUM

Satz 21.1 (Satz vom Minimum und Maximum).

ORIGINAL: THEOREM 7.4

Jede stetige Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem kompakten Definitionsbereich K nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an: es gibt $x_m, x_M \in K$ mit $f(x_m) = \inf f(K)$, $f(x_M) = \sup f(K)$.

Beweis. Das stetige Bild $f(K)$ der kompakten Menge K ist kompakt (Satz 4.14), nach Heine-Borel also abgeschlossen und beschränkt (Satz 7.34). Da $f(K)$ abgeschlossen ist, enthält es alle seine Häufungspunkte, insbesondere sein Supremum und sein Infimum (die stets Häufungs- oder isolierte Punkte von $f(K)$ sind) – also werden beide tatsächlich als Funktionswerte angenommen. $\square$

In einfachen Worten – und das ist die eigentliche Belohnung für die ganze Kompaktheits-Arbeit aus den vorigen Kapiteln: Auf einem *kompakten* Definitionsbereich („abgeschlossen

und beschränkt“, Heine-Borel) ist ein Supremum oder Infimum kein bloßes theoretisches Konstrukt, das vielleicht nie erreicht wird – es wird tatsächlich *angenommen*, an einer konkreten Stelle x_M bzw. x_m . Auf einem nicht-kompakten Bereich (etwa einem offenen Intervall) kann das schiefgehen: $f(x) = x$ auf $(0, 1)$ hat Supremum 1 und Infimum 0, aber nimmt keinen von beiden Werten je an – die „Ränder“ fehlen einfach.

Satz 21.2 (Fundamentalsatz der Algebra).

Jedes Polynom $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ mit komplexen Koeffizienten und $n \geq 1$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. ORIGINAL: THEOREM 7.5

Beweisskizze. Wir setzen $f(z) := |P(z)|$ (stetig auf $\mathbb{C}$) und zeigen zunächst, dass f ein globales Minimum besitzt. Für $|z|$ groß genug (größer als eine geeignete Schranke R , abhängig von den Koeffizienten a_i) dominiert der Term z^n alle übrigen, sodass $f(z) > R^n/2$ außerhalb $\overline{B_R(0)}$. Auf der abgeschlossenen Kugel $\overline{B_R(0)}$ (kompakt!) nimmt f nach Satz 21.1 ein Minimum bei einem Punkt z_m an; da $f(z_m) \leq f(0) = |a_0|$ klein ist im Vergleich zur Schranke außerhalb, ist z_m sogar ein globales Minimum auf ganz $\mathbb{C}$.

Wäre nun $P(z_m) \neq 0$, so entwickelt man P um z_m : $P(z) = P(z_m) + c_k(z - z_m)^k + \dots$ mit $c_k \neq 0$ dem ersten nichtverschwindenden höheren Koeffizienten. Wählt man a als eine k -te Wurzel von $-P(z_m)/c_k$ und wertet P entlang $z_m + ta$ für kleine $t > 0$ aus, so zeigt eine direkte Abschätzung $|P(z_m + ta)| < |P(z_m)|$ – im Widerspruch dazu, dass z_m das globale Minimum von $f = |P|$ ist. Also $P(z_m) = 0$. □

In einfachen Worten, die Beweisstrategie ganz ohne Formeln: Man betrachtet den Betrag $|P(z)|$ als eine „Landschaft“ über der komplexen Ebene und zeigt zunächst, dass diese Landschaft weit draußen (für große $|z|$) beliebig hoch ansteigt – der tiefste Punkt muss also irgendwo in einem endlich großen (kompakten!) Bereich liegen, und der Satz vom Minimum von eben garantiert, dass dieser tiefste Punkt z_m tatsächlich existiert. Der zweite, cleverere Schritt zeigt dann: Wäre dieser tiefste Punkt nicht schon bei Höhe 0, könnte man immer noch ein kleines Stückchen in eine geschickt gewählte Richtung weitergehen und die Landschaft dort noch weiter absenken – ein Widerspruch dazu, dass man ja schon am tiefsten Punkt stand. Es bleibt also nur die Möglichkeit, dass der tiefste Punkt bei Höhe 0 liegt, das heißt $P(z_m) = 0$.

Bemerkung 21.3.

Dieser Satz löst ein Versprechen aus § 3.6 ein: Dort hatten wir $\mathbb{C}$ als **algebraisch abgeschlossen** bezeichnet und den Beweis auf „ein späteres Kapitel“ verschoben (Bemerkung 3.47) – genau das haben wir jetzt nachgeholt. In $\mathbb{R}$ hat nicht jedes Polynom eine Nullstelle ($x^2 + 1$ zum Beispiel), aber in $\mathbb{C}$ hat *jedes* nichtkonstante Polynom eine, und durch wiederholte Polynomdivision sogar n Nullstellen, mit Vielfachheit gezählt. △

Satz 21.4 (in endlicher Dimension sind alle Normen äquivalent).

Auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V ($\mathbb{R}^N$ oder $\mathbb{C}^N$) gibt es zu je zwei Normen $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit $C_1\|x\|_b \leq \|x\|_a \leq C_2\|x\|_b$ für alle x . ORIGINAL: THEOREM 7.6

Beweisskizze. Es genügt, jede Norm mit $\|x\|_1 = \sum_i |x^i|$ zu vergleichen. Jede Norm $\|\cdot\|_a$ ist stetig bezüglich $\|\cdot\|_1$ (aus der Dreiecksungleichung und $\|x\|_a \leq \|x\|_1 \max_i \|e_i\|_a$). Die Einheitskugel $\{x \mid \|x\|_1 = 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt (Heine-Borel); nach Satz 21.1 nimmt $\|\cdot\|_a$ darauf ein Minimum C_1 und ein Maximum C_2 an, und Skalieren liefert die Behauptung für beliebiges $x \neq 0$. $\square$

In einfachen Worten: In endlicher Dimension ist es letztlich egal, mit welchem „Lineal“ (welcher Norm) man misst – alle Lineale sind sich einig darüber, was „groß“ und was „klein“ bedeutet, bis auf einen festen Umrechnungsfaktor (wie zwischen Zoll und Zentimeter). Insbesondere ändert sich dadurch nichts an der Frage, ob eine Folge konvergiert oder nicht – *welche* der äquivalenten Normen man dafür benutzt, ist reine Geschmackssache.

Satz 21.5 (lineare Operatoren in endlicher Dimension sind beschränkt).

ORIGINAL: THEOREM 7.7

Ist X endlichdimensional, so ist jeder lineare Operator $T: X \rightarrow Y$ (in einen beliebigen normierten Raum Y) beschränkt, das heißt $\|T\|_{\text{op}} < \infty$.

Beweisskizze. Mit einer Basis $\{e_k\}$ von X und $x = \sum_k \alpha_k e_k$ liefert die Dreiecksungleichung $\|Tx\|_Y \leq (\max_k \|Te_k\|_Y) \|x\|_1$; nach Satz 21.4 ist $\|\cdot\|_1$ äquivalent zu jeder anderen Norm auf X , also ist T beschränkt. $\square$

In einfachen Worten: Erinnere dich an die Operatornorm als „maximalen Verstärkungsfaktor“ einer Maschine (§ 12) – dieser Satz sagt, dass es in *endlicher* Dimension gar keine Maschine gibt, die unendlich stark verstärkt. Wie das Beispiel gleich zeigt, ist das ein reines Phänomen der endlichen Dimension: In unendlicher Dimension (etwa bei Orts- und Impulsoperator in der Quantenmechanik) gibt es sehr wohl unbeschränkte Operatoren.

Beispiel 21.6 (diese drei Sätze in der Physik).

- (i) Ganz einfach: Ein Teilchen in einem Potentialtopf mit kompaktem, erlaubtem Ortsbereich nimmt seine minimale und maximale potentielle Energie tatsächlich an – der Grundzustand „existiert wirklich“, statt nur ein nie erreichtes Infimum zu sein.
- (ii) Physik: Dass *jeder* lineare Operator auf einem endlichdimensionalen Hilbertraum beschränkt ist (Satz 21.5), erklärt, warum Unbeschränktheit von Operatoren (etwa Orts- und Impulsoperator in der Quantenmechanik) ein reines *Unendlichdimensionalitäts*-Phänomen ist – in jedem endlichdimensionalen Modellsystem (Spin, Qubits) sind alle Observablen automatisch beschränkt.
- (iii) Abstrakter: Die Äquivalenz aller Normen in endlicher Dimension (Satz 21.4) rechtfertigt, warum es in der Praxis (numerische Analysis, Fehlerabschätzungen) meist keine Rolle spielt, welche Norm man auf $\mathbb{R}^N$ verwendet, um „Konvergenz“ oder „kleine Störung“ zu definieren.

$\triangle$

ÜBUNGEN ZU § 21

Übung 21.7. Warum scheitert der Satz vom Minimum und Maximum für $f(x) = 1/x$ auf $(0, 1)$?

Übung 21.8. Bestimmen Sie explizit die Nullstelle(n) von $P(z) = z^2 + 1$ und verifizieren Sie den Fundamentalsatz der Algebra in diesem Fall.

Übung 21.9 (etwas schwerer). Zeigen Sie, dass Satz 21.4 für unendlichdimensionale Räume im Allgemeinen falsch ist. *Hinweis: Warum bricht der Kompaktheitsschritt im Beweis zusammen?*

§ 22 DIFFERENTIATION EINER VARIABLEN

Definition 22.1 (Ableitung).

Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow V$ heißt **differenzierbar** in x_0 , wenn der Grenzwert

ORIGINAL: DEFINITION
7.2

$$f'(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert (das heißt: die stetig fortgesetzte Funktion $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ist stetig bei x_0). f heißt **differenzierbar auf einem Intervall I** , wenn dies für jedes $x_0 \in I$ gilt, und **stetig differenzierbar** ($f \in C^1(\mathbb{R}, V)$), wenn zusätzlich f' stetig ist. $\triangle$

In einfachen Worten, vermutlich schon aus der Schule vertraut: Der Bruch $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ist die **Sekantensteigung** zwischen den Punkten $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ – die durchschnittliche Änderungsrate zwischen den beiden. Lässt man x immer näher an x_0 heranrücken, wird aus dieser Sekante immer mehr eine **Tangente**, und ihre Grenzsteigung ist genau die **Ableitung** $f'(x_0)$ – die *momentane* (statt nur durchschnittliche) Änderungsrate an genau diesem einen Punkt. Bei einer Bahnkurve $\vec{r}(t)$ ist das genau der Unterschied zwischen Durchschnittsgeschwindigkeit über ein Zeitintervall und der Momentangeschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt (siehe das Beispiel gleich unten).

Bemerkung 22.2.

Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit (aus $\|f(x) - f(x_0)\| \leq (\epsilon + \|f'(x_0)\|)|x - x_0|$ für x nahe x_0). Ist V endlichdimensional mit Basis $\{e_k\}$, so gilt $f = \sum_k f_k e_k \Rightarrow f' = \sum_k f'_k e_k$: man differenziert komponentenweise. $\triangle$

In einfachen Worten: Die erste Aussage ist eine sehr beruhigende Sicherheitsgarantie – eine Funktion, die eine wohldefinierte Momentanänderungsrate besitzt, kann unmöglich gleichzeitig irgendwo springen („unstetig sein“); die Existenz einer Tangente setzt voraus, dass sich der Graph in der Nähe schon einigermaßen brav verhält. Die zweite Aussage ist eine praktische Rechenerleichterung: Bei einer vektorwertigen Größe wie der Bahnkurve $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ muss man nicht die ganze Definition 22.1 auf einmal anwenden, sondern darf jede Koordinate stumpf einzeln ableiten.

Beispiel 22.3 (Ableitungen in der Physik).

Ganz grundlegend: Ist $\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ die Bahnkurve eines Teilchens, so ist $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$ die Geschwindigkeit und $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$ die Beschleunigung – genau der Fall $V = \mathbb{R}^3$ (Banachraum-wertige Ableitung) aus Definition 22.1. $\triangle$

Satz 22.4 (Mittelwertungleichung).

ORIGINAL: THEOREM 7.8 Ist $f: [x_1, x_2] \rightarrow V$ stetig auf $[x_1, x_2]$ und differenzierbar auf (x_1, x_2) , so gilt

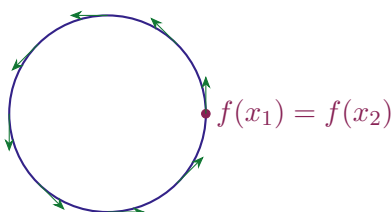
$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq |x_2 - x_1| \sup_{x \in (x_1, x_2)} \|f'(x)\|.$$

Beweisskizze. Für ein $\epsilon > 0$ betrachtet man $g_\epsilon(x) := \|f(x) - f(x_1)\| - (x - x_1)(\sup \|f'\| + \epsilon)$, mit $g_\epsilon(x_1) = 0$. Angenommen, die Behauptung wäre um mehr als ϵ verletzt, also $g_\epsilon(x_2) > 0$; sei x_0 das Supremum der Nullstellenmenge von g_ϵ in $[x_1, x_2]$. Da g_ϵ stetig ist, folgt $g_\epsilon(x_0) = 0$, und für x knapp oberhalb x_0 liefert die Definition von $f'(x_0)$ einen Widerspruch zur Wahl von x_0 als Supremum. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

In einfachen Worten: Diese Ungleichung ist die präzise Version einer ganz alltäglichen Erwartung – fährst du nie schneller als 100 km/h, kannst du dich in einer Stunde nicht weiter als 100 km von deinem Ausgangspunkt entfernt haben, egal wie du unterwegs beschleunigst oder bremst. Der Gesamtweg (bzw. hier: die Gesamtänderung $\|f(x_2) - f(x_1)\|$) kann die verstrichene Zeit mal die *maximale* Momentangeschwindigkeit $\sup \|f'\|$ nicht überschreiten.

Bemerkung 22.5.

Für $V = \mathbb{R}$ ist die Gleichheit $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(x)$ für ein $x \in (x_1, x_2)$ sogar exakt erreichbar – das ist der Mittelwertsatz, den wir gleich als Spezialfall $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ behandeln. Für allgemeine Banachraum-wertige f (etwa Kurven in $\mathbb{R}^3$) gilt nur die *Ungleichung*: Eine Kurve, die einen vollen Kreis durchläuft, kehrt zu ihrem Ausgangspunkt zurück ($f(x_2) = f(x_1)$), obwohl ihre Geschwindigkeit nirgends verschwindet! $\triangle$



Geschwindigkeit f' verschwindet nirgends

Abbildung 6.3: Eine geschlossene Kurve mit $f(x_1) = f(x_2)$, aber $f'(x) \neq 0$ für alle x : die Mittelwertungleichung gilt, keine Mittelwertgleichheit.

ÜBUNGEN ZU § 22

Übung 22.6. Zeigen Sie direkt mit der Definition, dass $f(x) = x^2$ bei $x_0 = 1$ differenzierbar ist mit $f'(1) = 2$.

Übung 22.7. Finden Sie eine Kurve $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(0) = f(2\pi)$, aber $f'(x) \neq 0$ für alle x (vgl. die Bemerkung oben).

Übung 22.8 (etwas schwerer). Zeigen Sie mit der Mittelwertungleichung: Ist $\|f'(x)\| \leq M$ für alle $x \in (x_1, x_2)$, so ist f Lipschitz-stetig mit Konstante M .

§ 22.1 DER FALL $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Satz 22.9 (Extremwertkriterium, Satz von Rolle, Mittelwertsatz).

Es sei $f: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[x_1, x_2]$ und differenzierbar auf (x_1, x_2) .

ORIGINAL: THEOREM 7.9

- (i) **Extremwertkriterium:** Hat f ein lokales Extremum bei $x_0 \in (x_1, x_2)$, so gilt $f'(x_0) = 0$.
- (ii) **Satz von Rolle:** Ist $f(x_1) = f(x_2)$, so gibt es $x \in (x_1, x_2)$ mit $f'(x) = 0$.
- (iii) **Mittelwertsatz:** Es gibt $x \in (x_1, x_2)$ mit $f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Beweis. (i) Bei einem lokalen Maximum bei x_0 gilt $\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ und $\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$; da f bei x_0 differenzierbar ist, müssen beide einseitigen Grenzwerte übereinstimmen, was nur für $f'(x_0) = 0$ möglich ist. Für ein Minimum argumentiert man analog.

(ii) Nach dem Satz vom Minimum und Maximum (Satz 21.1) nimmt f auf $[x_1, x_2]$ ein Maximum und ein Minimum an. Ist $f(x_1)$ zugleich Minimum und Maximum, ist f konstant und $f' \equiv 0$; sonst liegt mindestens eines der beiden Extrema im *offenen* Intervall (x_1, x_2) (da $f(x_1) = f(x_2)$ die Randwerte nicht die einzigen Extremwerte sein können), und (i) liefert dort $f' = 0$.

(iii) Wende (ii) auf $g(x) := f(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ an, welche $g(x_1) = g(x_2) = f(x_1)$ erfüllt. $\square$

In einfachen Worten, alle drei Aussagen nacheinander: Das **Extremwertkriterium** sagt nur, dass die Tangente an einem Berg- oder Talpunkt eines Graphen zwangsläufig *waagerecht* sein muss – gäbe es dort noch eine Steigung, könnte man ja noch ein Stückchen höher bzw. tiefer kommen, im Widerspruch dazu, dass man schon am Extremum ist. Der **Satz von Rolle** ist der Spezialfall, bei dem eine Funktion an beiden Enden eines Intervalls denselben Wert hat: Irgendwo dazwischen muss es dann (mindestens) einen Berg- oder Talpunkt geben, und an genau dieser Stelle ist die Tangente waagerecht. Der **Mittelwertsatz** schließlich verallgemeinert das auf beliebige Endwerte: Irgendwo im Intervall ist die *momentane* Steigung genau gleich der *durchschnittlichen* Steigung zwischen den beiden Endpunkten – anschaulich in der nächsten Abbildung als „Tangente parallel zur Sekante“ zu sehen.

Beispiel 22.10 (Extremwertkriterium und Mittelwertsatz in der Physik).

- (i) Ganz einfach: Gleichgewichtslagen eines Teilchens im Potential $V(x)$ sind genau die Punkte mit $F(x) = -V'(x) = 0$ – das Extremwertkriterium, angewendet auf die potentielle Energie.
- (ii) Physik: Der Mittelwertsatz besagt, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit einer Reise irgendwann tatsächlich als *momentane* Geschwindigkeit auftritt – Grundlage jedes „Blitzer“-Arguments („Sie waren im Mittel schneller als erlaubt, also zu irgendeinem Zeitpunkt auch momentan“).

△

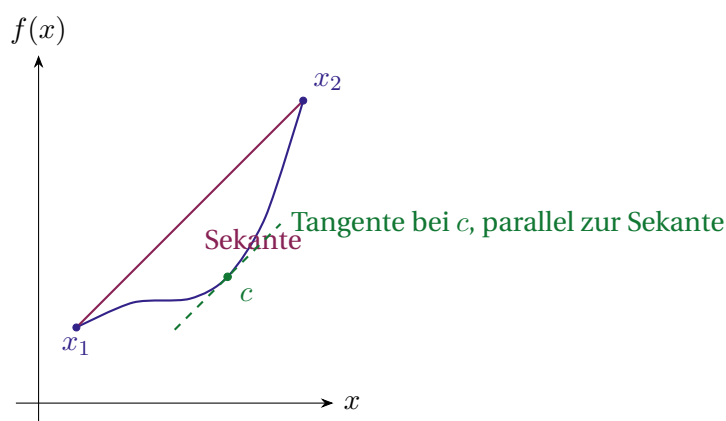


Abbildung 6.4: Mittelwertsatz: an einer Stelle $c \in (x_1, x_2)$ ist die Tangente parallel zur Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ – hier für $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + 1$, wo diese Stelle bei $c = 2$ liegt (in der Abbildung um 0,5 verschoben gezeichnet).

Satz 22.11 (Konvexitätskriterium).

Es sei $f: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[x_1, x_2]$ und differenzierbar auf (x_1, x_2) . Dann ist f monoton wachsend genau dann, wenn $f' \geq 0$. Ist f zusätzlich zweimal stetig differenzierbar, so ist f konvex genau dann, wenn $f'' \geq 0$ auf (x_1, x_2) .

Beweisskizze. Ist f monoton wachsend, folgt $f' \geq 0$ direkt aus der Definition der Ableitung als Grenzwert nichtnegativer Differenzenquotienten; die Umkehrung folgt aus dem Mittelwertsatz. Für die Konvexitätsaussage: Wäre $f''(x) < 0$ für ein x , so (nach Stetigkeit von f'') auch auf einem ganzen Teilintervall, auf dem f' dann streng fällt; der Mittelwertsatz liefert aber zwei Punkte $z_1 < z_2$ in diesem Teilintervall mit $f'(z_1) \leq f'(z_2)$, sobald man die (aus der Konvexität folgende) Sekanten-Ungleichung ausnutzt – Widerspruch. □

In einfachen Worten: Dieser Satz gibt uns endlich ein bequemes Rechenkriterium für zwei Eigenschaften, die wir bisher nur über ihre geometrische Definition kannten. Das Vorzeichen von f' verrät die Richtung, in die der Graph gerade läuft (steigend, wenn $f' \geq 0$); das

Vorzeichen von f'' – also die Änderungsrate *der Änderungsrate* – verrät, wie der Graph gekrümmt ist (schüsselförmig/konvex, wenn $f'' \geq 0$). Das folgende Beispiel zeigt, warum gerade dieses zweite Kriterium in der Physik so zentral ist.

Beispiel 22.12 (Konvexität und Stabilität).

Physik, fundamental: Ein Gleichgewicht bei x_0 (also $V'(x_0) = 0$) ist genau dann **stabil** (ein lokales Minimum der potentiellen Energie), wenn $V''(x_0) > 0$ – der Potentialtopf ist dort konvex. Ist stattdessen $V''(x_0) < 0$ (konkav), handelt es sich um ein instabiles Gleichgewicht (einen lokalen Maximalpunkt). Das ist genau der Ausgangspunkt der Kleinwinkelnäherung beim harmonischen Oszillator, $V(x) \approx V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2$. $\triangle$

Satz 22.13 (Eigenschaften der Ableitung).

ORIGINAL: THEOREM 7.11

- (i) **Produktregel** (Leibniz-Regel): $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
- (ii) **Kettenregel**: $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.
- (iii) Eine Potenzreihe $f = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$ mit Konvergenzradius $r > 0$ ist differenzierbar mit $f'(x) = \sum_{n \geq 1} n c_n x^{n-1}$ (wieder mit Konvergenzradius r).

Beweisskizze. (i) Man schreibt $f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = [f(x) - f(x_0)]g(x) + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]$, dividiert durch $x - x_0$ und lässt $x \rightarrow x_0$ gehen (unter Verwendung der Stetigkeit von g).

(ii) Direktes Nachrechnen der Grenzwertdefinition mit Substitution $y = g(x)$.

(iii) Dass $\sum_n n c_n x^{n-1}$ denselben Konvergenzradius r hat, folgt aus $n^{1/n} \rightarrow 1$ (Satz 7.18). Der Differenzenquotient von f lässt sich (durch Ausklammern von $x - x_0$ aus jedem Term $x^n - x_0^n$) als absolut konvergente Reihe schreiben, die termweise gegen $\sum_n n c_n x_0^{n-1}$ konvergiert. $\square$

In einfachen Worten: Die **Produktregel** und die **Kettenregel** sind exakt die beiden Ableitungsregeln, die man vermutlich schon auswendig aus der Schule kennt – hier werden sie zum ersten Mal richtig *bewiesen* statt nur postuliert. Aussage (iii) ist die praktisch wichtigste Konsequenz aus der ganzen Potenzreihen-Theorie des Reihen-Kapitels: Eine Potenzreihe darf man „gliedweise“ ableiten, also einfach jeden einzelnen Summanden $c_n x^n$ für sich nach der bekannten Schulregel $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$ ableiten und wieder aufsummieren – ganz so, als wäre die unendliche Summe ein endliches Polynom.

Satz 22.14 (Ableitungen elementarer Funktionen).

ORIGINAL: EXERCISE 7.7

- Konstante: $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$; umgekehrt, ist $f' \equiv 0$ auf einem Intervall, so ist f dort konstant (Mittelwertsatz).
- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$; $\exp' = \exp$; $\ln'(x) = 1/x$ (jeweils aus (iii) obigen Satzes bzw. der Kettenregel, angewendet auf $\exp(\ln x) = x$).

- Mit $x < \sin x < \tan x$ für $0 < x < \pi/2$ (Sandwich-Theorem) zeigt man $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

△

Beispiel 22.15 (Eulers Formel via Ableitung).ORIGINAL: EXERCISE 7.7,
LETZTER PUNKT

Definiert man $\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ über die Exponentialreihe, so liefert die Produktregel $\frac{d}{dx}(e^{-ix}[\cos x + i \sin x]) = e^{-ix}[-i \cos x - \sin x] + e^{-ix}[i(-\sin x) + i \cdot i \cos x] \cdot i = 0$ (nachrechnen!), also ist $e^{-ix}[\cos x + i \sin x]$ konstant; Auswerten bei $x = 0$ liefert den Wert 1, also $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ für alle x – die **Eulersche Formel**, hier über Differentiation statt über Reihenvergleich bewiesen. △

Satz 22.16 (Regel von de l'Hôpital).ORIGINAL: THEOREM
7.12

Sind f, g differenzierbar nahe c (mit $g' \neq 0$ nahe c) und gilt entweder $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ oder $\lim_{x \rightarrow c} |g(x)| = \infty$, so folgt aus $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ bereits $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

In einfachen Worten: Die **Regel von de l'Hôpital** ist der klassische Rettungsanker, wenn man versucht, einen Grenzwert der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ auszurechnen – ein Ausdruck, bei dem das direkte Einsetzen keine sinnvolle Zahl liefert. Der Trick: Man leitet einfach Zähler und Nenner *getrennt* ab und schaut, ob der Grenzwert des neuen Bruchs f'/g' existiert – wenn ja, ist das automatisch auch der gesuchte ursprüngliche Grenzwert. Das klassische Einstiegsbeispiel dafür ist $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (siehe die Übungen), wo direktes Einsetzen $\frac{0}{0}$ ergäbe.

Beweisskizze für den Fall $f(c) = g(c) = 0$. Für a nahe c wendet man den Satz von Rolle auf $h(y) := (f(y) - f(a))(g(c) - g(a)) - (f(c) - f(a))(g(y) - g(a))$ an und erhält ein y zwischen a und c mit $\frac{f'(y)}{g'(y)} = \frac{f(c) - f(a)}{g(c) - g(a)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ (da $f(c) = g(c) = 0$). Lässt man $a \rightarrow c$ gehen, geht auch $y \rightarrow c$, und die Voraussetzung liefert die Behauptung. □

Satz 22.17 (Satz von Taylor).ORIGINAL: THEOREM
7.13

Ist f auf $[a, x]$ stetig und $(k+1)$ -mal differenzierbar auf (a, x) , so gibt es ξ zwischen a und x mit

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + R_k(x),$$

$$R_k(x) = \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi).$$

Beweisskizze. Man definiert $F(t) := f(t) + (x-t)f'(t) + \dots + \frac{(x-t)^k}{k!}f^{(k)}(t)$; die meisten Terme heben sich beim Differenzieren teleskopartig weg, sodass $F'(t) = \frac{(x-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t)$. Wendet man den (verallgemeinerten) Mittelwertsatz auf F und $G(t) := (x-t)^{k+1}$ an, erhält man ein ξ mit $\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)}$, was nach Einsetzen $F(x) = f(x)$, $F(a) = f(a) + \dots + \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$ genau die Restglied-Formel liefert. □

In einfachen Worten – und das schließt den Kreis zu den abgeschnittenen Potenzreihen aus dem Reihen-Kapitel (§ 8.2): Der **Satz von Taylor** sagt, dass man jede hinreichend oft differenzierbare Funktion in der Nähe eines Punktes a durch ein Polynom (das **Taylor-Polynom**) annähern kann – je mehr Ableitungen man mitnimmt, desto besser die Näherung, wie die Abbildung gleich unten zeigt. Das Besondere hier: Man bekommt nicht nur die Näherung selbst, sondern auch eine *exakte Formel für den Fehler* $R_k(x)$, den man dabei macht – das ist der Grund, warum man in der Physik oft ganz beruhigt nach der ersten oder zweiten Ordnung abbricht (Kleinwinkelnäherung, nichtrelativistische Näherung, ...): Man weiß genau, wie groß der dabei vernachlässigte Fehler höchstens sein kann.

Beispiel 22.18 (Taylor-Entwicklungen in der Physik).

Die Taylor-Reihe ist *das* Standardwerkzeug der Physik zur Approximation: die Kleinwinkelnäherung $\sin x \approx x$, die nichtrelativistische Näherung der kinetischen Energie $\frac{1}{2}mv^2$ aus der relativistischen Energie, und jede Störungstheorie erster oder zweiter Ordnung sind Taylor-Entwicklungen mit abgeschnittenem Restglied R_k . $\triangle$

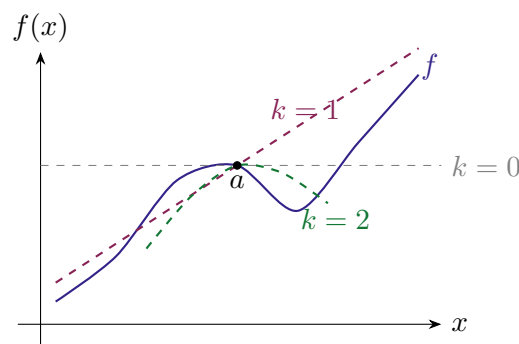


Abbildung 6.5: Taylor-Approximationen wachsender Ordnung k um den Punkt a (Satz 22.17): $k = 0$ (konstant) ist am ungenauesten, $k = 2$ (quadratisch) schmiegt sich in der Nähe von a bereits eng an f an.

ÜBUNGEN ZU § 22.1

Übung 22.19. Bestimmen Sie mit dem Extremwertkriterium die kritischen Punkte von $f(x) = x^3 - 3x$.

Übung 22.20. Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ mit der Regel von de l'Hôpital.

Übung 22.21. Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von $f(x) = e^x$ um $a = 0$ bis zur Ordnung $k = 3$.

Übung 22.22 (etwas schwerer). Zeigen Sie, dass $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ für $x \neq 0$, $f(0) = 0$, bei $x = 0$ differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist. *Hinweis: Berechnen Sie $f'(0)$ direkt aus der Definition (Sandwich-Theorem), und zeigen Sie, dass $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ für $x \rightarrow 0$ nicht konvergiert.*

ORIGINAL: EXERCISE 7.6

Damit endet Kapitel 6 (Funktionen, erste Begegnung) – und mit ihm der gesamte Stoff, der im

Originalskript unter „Teil I: HöMa I“ (Kapitel 1–7) behandelt wird.

Ein kurzer Moment zum Innehalten, falls du diesen ganzen Weg von vorne mitgegangen bist: Am Anfang stand die Kiste voller Dinge (§ 2), am Ende steht der Satz von Taylor – eine erstaunlich lange, aber lückenlose Kette, in der jeder einzelne Schritt auf allen vorigen aufbaute. Mengen wurden zu Zahlen, Zahlen zu Räumen, Räume zu Folgen, Folgen zu Reihen und Vektorräumen, Vektorräume zu Matrizen, und Matrizen schließlich zurück zu den Funktionen, mit denen die Physik tatsächlich täglich arbeitet. Dass sich das „zunächst kompliziert wirkende“ Zeug von damals (Zorns Lemma, das Auswahlaxiom, die ϵ - δ -Definition) inzwischen vertraut anfühlt, ist genau das Zeichen dafür, dass die Reise von „Zero“ zu „Hero“ geglückt ist.