

1 Vowort

Kommt noch, save save.

Contents

1 Vowort	1
2 Good to Know	5
2.1 Mit Reihen Arbeiten	5
2.2 Geometrische Reihe	5
2.3 Linearfaktorzerlegung	5
2.4 Polynomdivision	5
2.5 Partialbruchzerlegung	5
3 Differenzierung in C	5
3.1 Cauchy Riemann	5
3.2 Folgerungen	6
3.3 Analytische Funktionen:	6
3.3.1 Power Series	6
3.3.2 Analytische Funktionen	6
3.3.3 Folgerung: analytische Funktionen sind glatt	7
3.3.4 Potenzreihen definieren analytische Funktionen in ihrem Konvergenzradius	7
3.3.5 Die Nullstellen analytischer Funktionen sind isoliert.	7
3.4 Analytische Fortsetzung	7
3.4.1 Eindeutigkeit analytischer Funktionen	7
3.4.2 Kurve (Contour)	8
3.4.3 Einfach zusammenhängender Raum	8
3.5 Riemann Mapping Theorem	8
3.6 Complex Logarithmus	8
3.6.1 Äste (Branches) des Logarithmus	8
3.6.2 Der Hauptast	8
3.6.3 Riemannsche Fläche des Logarithmus	9
3.6.4 Schlussfolgerung	9
4 Weg Integrale	9
4.1 Länge einer simplen Kurve	10
4.2 Vorzeichenwechsel = Pfadrichtung	10
4.3 Jordan Kurven theorem	10
4.3.1 Richtung	10
4.4 Cauchys Integral Theorem	10
4.5 Stammfunktionen	10
4.6 Cauchys Integral Formel	11
4.6.1 Notation & Normierung	11
4.6.2 Cauchys Integral Formel	11
4.6.3 Automatisch glatt	11

4.7	Holomorphe Funktionen sind Analytisch	11
4.8	Ganze Funktionen	12
4.9	Little Picard Theorem	12
4.10	Kritische Punkte von Holomorphen Funktionen	12
4.10.1	Maximum Modulus Principle	12
4.10.2	Kritische Punkte in f sind saddle Punkte von u und v	12
5	Meromorphe Funktionen und Residuen Satz	12
5.1	Meromorphe Funktionen	12
5.1.1	Collorare	12
5.2	Laurent Reihe und mehr zu Polen	13
5.2.1	Laurent Reihe	13
5.2.2	Beispiel(e):	13
5.2.3	Vorgehen Laurent Reihe finden	14
5.3	Residuen Satz	14
5.3.1	Residuuum finden	14
5.4	Isolierte Singularitaeten von Complex Funktionen	15
5.4.1	Isolierte Singularitaeten	15
6	Hilbert Raeume	15
6.0.1	Recap Vektorraumen	15
6.1	Inneres Produkt	16
6.1.1	Reeler Zahlenkoerper	16
6.1.2	Complexer Zahlenkoerper	17
6.1.3	Norm	17
6.2	Hilbert Raum	17
6.2.1	Beispiele	17
6.3	Chauchy Schwarz Ungleichung	17
6.4	Parallelogramm Gesetz	17
6.5	Orthogonales Komplement	17
6.6	Gramm- Schmitt	18
6.7	Hilbert Basis	18
6.8	Stetigkeit in beiden Argumenten yields:	18
6.9	Beispiel ℓ^2 -Raum	19
7	Operatoren auf Hilberraumen	19
7.1	Operatoren auf Hilbertraeumen	19
7.1.1	Lineare und beschränkte Operatoren	19
7.1.2	Das Duale eines Hilbertraums	20
7.1.3	Riesz–Fréchet Darstellungssatz	20
7.1.4	Kompakte Operatoren	20
7.1.5	Was bedeutet "relativ kompakt"?	21
7.1.6	Adjungierte und selbstadjungierte Operatoren	22
7.1.7	Unbeschränkte Operatoren	22
7.1.8	Warum unbeschränkte Operatoren nur auf dichten Teilmengen definiert sind	23
7.1.9	Abgeschlossene (Closed) Operatoren	25
7.1.10	Abschließbarer Operator:	25

7.1.11 Zusammenfassung	26
8 Spektraltheorie auf Hilberträumen	27
8.1 Eigenwerte und Eigenvektoren	27
8.2 Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren	27
8.2.1 Das Spektrum eines Operators	28
8.2.2 Resolvent und Spektrum	28
8.3 Spektralradius	29
8.3.1 Weyl-Kriterium	29
8.3.2 Zusammenhang mit der Physik	30
8.3.3 Zusammenfassung	30
9 Quantenmechanik und Spektraltheorie	31
9.0.1 Das Spektraltheorem in der Quantenmechanik	31
9.0.2 Postulat 1 – Zustände	31
9.0.3 Postulat 2 – Observablen und Messungen	32
9.0.4 Postulat 3 – Zeitentwicklung	33
9.0.5 Rechen- und Klausurhinweise	34
10 Lebesgue Integral	34
10.1 Das Lebesgue-Maß – Intuitive Einführung	34
10.1.1 Von der Jordan- zur Lebesgue-Messung	35
10.1.2 Das äußere Lebesgue-Maß	35
10.1.3 Wichtige Eigenschaften des äußeren Lebesgue-Maßes	35
10.1.4 Vergleich mit Jordan-Maß	36
10.1.5 Nullmengen und ”fast überall”	36
10.1.6 Der Übergang zur Integration	37
10.2 Praktisches Beispiel	37
10.2.1 Cantormenge:	38
10.3 Lebesgue messbare Mengen und Maßräume	38
10.3.1 Lebesgue-messbare Mengen (Carathéodory-Kriterium)	38
10.3.2 Beispiele und Eigenschaften messbarer Mengen	39
10.3.3 Maßräume	40
10.3.4 Produktmaße	40
10.3.5 Satz: $\mathbb{R}^d$ mit dem Lebesgue-Maß ist ein Maßraum	41
10.4 Das Lebesgue-Integral	41
10.4.1 Einfache Funktionen	41
10.4.2 Measurable Functions	41
10.4.3 Das Lebesgue-Integral	42
10.4.4 Eigenschaften des Lebesgue-Integrals	42
10.5 Die L^p -Räume	44
11 Fourier	44
11.0.1 Orthogonale Systeme und trigonometrische Basis	44
11.0.2 Fourier-Koeffizienten	44
11.0.3 Fourier-Serie	45
11.0.4 Punktweise Konvergenz der Fourier Reihe	45

11.0.5	Ableitung einer Fourierreihe	45
11.1	Eigenschaften $\mathcal{F}$ - Reihe	45
11.2	$-i\frac{d}{dx}$ Operator	46
11.3	Summen ueber Fourierfrequenzen	46
11.4	Schwarzraum	46
11.5	Der Schwarzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	46
11.5.1	Motivation und Einordnung	46
11.5.2	Multiindex-Notation	46
11.5.3	Definition des Schwarzraums	46
11.5.4	Seminormen und Topologie	46
11.5.5	Zentrale Eigenschaften	46
11.5.6	Typische Beispiele	47
11.5.7	Fouriertransformation auf dem Schwarzraum	47
11.5.8	Der Schwarzraum und Distributionen	47
11.5.9	Illustrationen	48
11.6	Fourier Transformation	48
11.7	Die Fourier-Transformation	48
11.7.1	Grundidee	48
11.7.2	Konvention und Definition	48
11.7.3	Existenzbereich	49
11.7.4	Zentrale Eigenschaften	49
11.7.5	Inversion und Symmetrien	50
11.7.6	Fourier-Transformation auf L^2	51
11.7.7	Klassische Beispielrechnungen	51
12	Distributionen	51
12.1	Distributionen	51
12.1.1	Motivation	51
12.1.2	Testfunktionen	51
12.1.3	Definition von Distributionen	52
12.1.4	Distributionen als verallgemeinerte Funktionen	52
12.1.5	Wichtige Beispiele	52
12.1.6	Ableitung von Distributionen	53
12.1.7	Multiplikation mit glatten Funktionen	53
12.1.8	Träger einer Distribution	53
12.2	Temperierte Distributionen	53
12.2.1	Schwarzraum als Testfunktionenraum	53
12.2.2	Definition temperierter Distributionen	53
12.2.3	Beispiele temperierter Distributionen	54
12.2.4	Fourier-Transformation auf Distributionen	54
12.2.5	Rechenregeln	54
12.3	wichtige Dinge:	54

13 Fundament(aal)loesung	55
13.0.1 Definition	55
13.0.2 Bedeutung	55
13.0.3 Lösung mittels Faltung	55
13.0.4 Fourier-Transformation und Fundamentallösungen	55
13.0.5 Beispiele	56
13.0.6 Eigenschaften von Fundamentallösungen	56
13.0.7 Zusammenhang mit Green-Funktionen	57
14 Differentialgleichungen	57
14.1 Wichtige Dinge:	57

2 Good to Know

2.1 Mit Reihen Arbeiten

Hier fehlt eine sektion zu den rechenregeln mit reihen., also cauchy produkt etc etc.

2.2 Geometrische Reihe

$$S_N = a \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

2.3 Linearfaktorzerlegung

2.4 Polynomdivision

2.5 Partialbruchzerlegung

3 Differenzierung in C

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Untermenge von $\mathbb{C}$. Dann heisst eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar in $z_0 \in U$, wenn wir die Funktion $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ kontinuierlich fortsetzbar in z_0 ist, also der Grenzwert existiert.

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Die Definition ist also wie im Reellen, dort koennen wir aber nur von links oder Rechts uns dem Wert naechern (Da $\mathbb{R}$, eine Linie) und in $\mathbb{C}$ koennen wir uns von einer arbitraeren Richtung naaechern (weil $\mathbb{C}$ eine Ebene) dadurch muess der Grenzwert und die Existenz des Grenzwertes unabheangig vom Weg sein.

3.1 Cauchy Riemann

Sei $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f = u(x, y) + iv(x, y)$ wobei $z \in \mathbb{C}, z = x + iy$, dann ist f complex diffbar, wenn $F = (u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ frechet diffbar ist, an der Stelle x_0, y_0 und die Partiellen Ableitungen von u und v , die Cauchy-Rieman bedingungen erfuellen.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

an der Stelle (x_0, y_0) .

Um zu pruefen ob F frechet diffbar ist, reicht es zu zeigen, dass die Partiellen Ableitungen von u und v existieren und stetig sind.

Die Cauchy Riemann Gleichungen sind gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

3.2 Folgerungen

Sei f eine arbitraete complexe Funktion:

$$f(z, \bar{z}) = u(x, y) + i v(x, y) :$$

So schreiben wir fuer die Ableitung nach z und $\bar{z}$.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_x - i \partial_y), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i \partial_y)$$

mit:

$$dz = dx + i dy, \quad d\bar{z} = dx - i dy$$

Wenn eine Funktion holomorph ist, also die CR-Gleichungen (in einer gewissen Domäne) gelten, dann folgt:

$$f' = \partial_z f$$

3.3 Analytische Funktionen:

3.3.1 Power Series

Eine Potenzreihe $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ ist holomorph fuer alle z_0 im Konvergenzradius $|z_0| < R$.

Erinnere:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Innerhalb dieses Konvergenzradius gilt:

$$P'(z) = \sum_{k \geq 1} k a_k z^{k-1}$$

3.3.2 Analytische Funktionen

Eine analytische Funktion ist eine Funktion, die sich in einer offenen Subset von $\mathbb{C}$ darstellen laesst mit einer Potenzreihe: $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k(z_0)(z - z_0)^k$, dabei ist z_0 der Punkt um den wir den Konvergenzradius der Power Seires kennen.

Mathematisch Formelle Defintion:

Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heisst anaylitsche Funktion in der der offenen Domaeine, wenn gilt:

$$\forall z_0 \in U \quad \exists a_k(z_0) \text{ und } \delta(z_0) > 0, \text{ sodass } \forall z \in B_{\delta(z_0)}(z_0) \subset U, f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k(z_0)(z - z_0)^k$$

Das impliziert natuerlich auch, dass $P(z)$ einen nicht-null Konvergenzradius hat

3.3.3 Folgerung: analytische Funktionen sind glatt

Eine analytische Funktion ist unendlich diffbar in ihrer Definitionsdomäne U und es gilt:

$$\forall z_0 \in U, f^{(k)}(z_0) = k! a_k(z_0)$$

3.3.4 Potenzreihen definieren analytische Funktionen in ihrem Konvergenzradius

Die Potenzreihe $P(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ mit dem Konvergenzradius R definiert eine analytische Funktion innerhalb $B_R(0)$. *Das meint, dass es du der Folge a_k nur eine analytische Funktion geben kann, und auch anders rum, dass jede analytische Funktion nur eine Reihendarstellung in $B_R(0)$ hat.*

3.3.5 Die Nullstellen analytischer Funktionen sind isoliert.

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer zusammenhängenden offenen Domäne U . Dann ist entweder: $f(U) = 0$ oder die Nullstellen von f sind isoliert, d.h.:

$$f(z_0) = 0, z_0 \in U \quad \exists \delta, \text{ sodass } f(z) \neq 0, z \in B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U$$

3.4 Analytische Fortsetzung

Sei f eine Funktion $U \rightarrow \mathbb{C}$ und analytisch in U . Wenn es eine Funktion $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}$, gibt, die analytisch in $\tilde{U}$ ist und gilt:

$$\tilde{f}|_{U \cap \tilde{U} \neq \emptyset} = f|_{U \cap \tilde{U} \neq \emptyset}$$

Dann nennen wir $\tilde{f}$ die analytische Fortsetzung von f .

Wir sagen also, es gibt eine Funktion dessen Domäne sich mit der Domain einer anderen analytischen Funktion überlappt, wenn die Funktion in diesem Überlapp, die selben Funktionswerte hat (also deren Bilder übereinstimmen), dann sind die Funktionen analytische Fortsetzungen einander.

3.4.1 Eindeutigkeit analytischer Funktionen

Wenn f und g zwei analytische Funktionen sind auf einer offen und zusammenhängenden Domain U , und $f = g$ auf einer Domain $M \subset U$, welches einen limit point in U hat, dann gilt, dass $f = g$ auf der ganzen Domain U . *Also was wir davor schon sagten, aber hier eindeutiger, dass es eine eindeutige Gleichheit dieser analytischen Fortsetzungen gibt*

Warum braucht man diesen Häufungspunkt: Wenn wir keinen Häufungspunkt verlangen, dann könnten die Funktionswerte in M zufällig aufeinander treffen. Zum Beispiel:

$$f(z) = 0, \quad g(z) = \sin(\pi z)$$

Auf der Menge $M = \mathbb{Z}$ stimmen diese überein, aber auch nur weil M keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ hat. Deswegen müssen wir diesen Limit $a \in M$ fordern, damit die Funktionen wirklich gleich sind. Formaler Beweis geht mit $h = f - g$ ist auch eine analytische Funktion, die in ganz M Null sein muss. Auch im Häufungspunkt.

3.4.2 Kurve (Countour)

Ein Kurve in $\mathbb{C}$ ist eine stetige Funktion

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \gamma(t) = u(t) + i v(t)$$

Das Bild einer solchen Kurve schreiben wir oft einfach mit C .

Eine Kurve heisst glatt, wenn $\gamma \in C^\infty$. Und Die Kurve heisst einfache Kurve, wenn diese auf $[0, 1]$ injektiv ist, also keinen Selbstschnitt besitzt, (ausser maximal an den Endpunkten)

3.4.3 Einfach zusammenhaengerender Raum

Eine Domain $U \subset \mathbb{C}$ heisst einfach zusammenhaenger Raum, wenn fuer alle zwei Punkte $z, w \in U$, zwei stetige Kurven gefunden werden koennen, die diese Punkte verbinden und stetig ineinander verformbar sind.

Eine Menge mit Loch, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist z.b. nicht einfach zusammenhaengend, weil ein Pfad "ueber" der Null nicht stetig in einen Pfad "unter" der Null ueberfuert werden kann.

Hier bitte noch Bemerkung von Gurau im Skript Seite 171 Beachten, die ich hier zufall bin zu uebresetzen.

3.5 Riemann Mapping Theorem

Prob absolut nicht wichtig, aber iwie scheitern es ein Mapping zu geben von einem Subset U in $\mathbb{C}$, welches nicht ganz $\mathbb{C}$ ist, auch die UnitDisk in $\mathbb{C}$. Keine Ahnung warum das important ist lol.

3.6 Complex Logarithmus

Die komplexe Exponentialfunktion $f(z) = e^z$ ist nicht injektiv, da gilt

$$e^{z+2\pi i k} = e^z \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Daher ist ihre Umkehrabbildung, der komplexe Logarithmus, mehrwertig: für $z = |z|e^{i\theta} \neq 0$ gilt

$$w_k = \ln |z| + i(\theta + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Für $z = 0$ existiert kein Logarithmus, da kein $w \in \mathbb{C}$ mit $e^w = 0$ existiert.

3.6.1 Äste (Branches) des Logarithmus

Ein Ast des Logarithmus ist eine stetige Funktion

$$L: U \rightarrow \mathbb{C},$$

definiert auf einer einfach zusammenhängenden Menge $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so dass $e^{L(z)} = z$ für alle $z \in U$ gilt. Ein solcher Ast kann maximal analytisch fortgesetzt werden auf eine Menge der Form $U = \mathbb{C} \setminus \text{Cut}$, wobei Cut eine einfache Kurve von 0 bis ∞ ist, der sogenannte Zweigschnitt (branch cut).

3.6.2 Der Hauptast

Der Hauptast des Logarithmus wird definiert mit

$$\text{Cut} = \mathbb{R}_{\leq 0}.$$

Für $z = |z|e^{i\theta}$ mit $\theta \in (-\pi, \pi)$ gilt:

$$\log(z) = \ln |z| + i\theta.$$

Man kann diesen Ast stückweise auf ganz $\mathbb{C}$ erweitern, indem man $\theta \in (-\pi, \pi]$ erlaubt.

3.6.3 Riemannsche Fläche des Logarithmus

Unterschiedliche Wahl der Zweigschnitte liefert verschiedene Äste des Logarithmus. Klebt man diese Äste entlang der Schnitte zusammen, erhält man die *Riemannsche Fläche* des Logarithmus, die topologisch wie ein unendlicher Korkenzieher aussieht.

Formal definiert man

$$\mathcal{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k, \quad I_k = \{e^z \mid z \in \sigma_k\},$$

wobei

$$\sigma_k = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi]\}.$$

Beim einmaligen Umlaufen des Ursprungs wechselt man von einem Blatt I_k zum nächsten I_{k+1} .

3.6.4 Schlussfolgerung

Die Abbildung

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{R}$$

ist eineindeutig, und ihr Umkehrabbildung

$$\ln: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

definiert einen einwertigen komplexen Logarithmus. So ersetzt man den mehrwertigen Logarithmus auf $\mathbb{C}$ durch einen einwertigen Logarithmus auf der Riemannschen Fläche $\mathcal{R}$.

Hier kommen hoffentlich noch irgendwann die schönen Zeichnungen, die der Obertutor auch an die Tafel gepinselt hat.

4 Weg Integrale

Da holomorphe Funktionen stetig sind, kann man diese entlang einer glatten simplen Kurve integrieren.

Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine glatte Kurve und C sei ihr Bild, dann definieren wir.

$$\int_C dz f(z) = \int_0^1 dt \dot{\gamma}(t) f(\gamma(t))$$

dabei ist $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$

Dieses Integral ist unabhängig von weiteren re-parametrisierungen.

$$\int_{C_1(0)} dz z^n$$

Mit der Parametrisierung $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ ergibt:

$$\int_0^{2\pi} dt i e^{it} e^{int}$$

4.1 Laenge einer simplen Kurve

Gleich wie in $\mathbb{R}^2$.

$$l(C) = \int_0^1 dt |\dot{\gamma}(t)|$$

und es gilt folgende obere Schranke:

$$\left| \int_C dz f(z) \right| \leq l(C) \sup_{z \in C} |f(z)|$$

4.2 Vorzeichenwechsel = Pfadrichtung

Aendern wir die Richtung in der wir integrieren, so aendert sich das Vorzeichen des Integrals:

$$\int_C dz f(z) = - \int_{C^{-1}} dz f(z)$$

4.3 Jordan Kurven theorem

Eine einfach geschlossene Contour (curve) in $\mathbb{R}^2$ ist die Bildmenge einer stetigen Funktion

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ sodass } \gamma(0) = \gamma(1)$$

und der Einschraenkung, dass die Inverse von γ auf $[0, 1)$ injektiv ist.

Also ist γ eine stetiger loop, mit keinen eigenschnittpunkten.

Sei nun C eine einfache geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$. Dann besteht das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C$ aus genau zwei zusammenhaengenden Komponenten. Das "Innere" ist beschaenkt und einfach zusammenhaengend und das "aessere" ist unbeschaenkt nd. Die Kurve C ist der Rand der Mannigfaltigkeit beider Komponenten.

4.3.1 Richtung

Eine glatte geschlossene simple Kurve γ ist positiv Orientiert, wenn das "Innere" auf der linken Seite des tangetialene Vektors der Kurve liegt.

Wenn nirgends anders angegeben sind Integrale, entlang Kurwen, immer positiver Orientierung.

4.4 Cauchys Integral Hottake

(Ja ich fange wieder mit den Hottakes an...)

Sei f eine Holomorphe funktion auf einer offen und zusammenhaengendDomaine $U \subset \mathbb{C}$ und $C \subset U$ eine glatte geschlossene simple Kurve in U , dann gilt:

$$\int_C dz f(z) = 0$$

4.5 Stammfunktionen

Als direkte Folgerung zu Cauchys Integral theorem,m kann man sehen, dass Complexe Integrale von Holomorphen Funktionen entlang einer Kurve in einer simplen zusammenhaengenden Domaine, nur von en Endpunkten abhaengt.

Hier noch eine Zeichnung einfügen und die Erklärung von Gura, dass man ja immer einen beliebigen Weg zurück finden kann, sodass die Kurve geschlossen ist und damit nur wird, daraus folgt ja dann, dass nur die Endpunkte entscheidend sind, und nicht der gewählte Weg.

So kann man komplexe Stammfunktionen definieren: Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer einfach zusammenhängenden Domäne U und sei a ein beliebig aber fester Punkt in U , dann gilt:

$$F(z) = \int_a^z dw f(w), \quad z \in U$$

Dabei ist $\int_a^z$ jeder beliebige Pfad von a nach z , sofern er vollständig in U ist.

4.6 Cauchys Integral Formel

4.6.1 Notation & Normierung

Sei $C_R(z) = \partial B_R(z)$ ein Kreis, mit dem Radius R und dem Mittelpunkt z , diesen können wir Parametrisieren, als:

$$C : \gamma(\varphi) = z + R e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

. So können wir folgendes Integral schreiben als:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(z)} dw \frac{1}{w - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\varphi (iR e^{i\varphi}) \frac{1}{R e^{i\varphi}} = 1$$

4.6.2 Cauchys Integral Formel Formel

Sei f eine holomorphe Funktion auf einer offen und zusammenhängenden Domäne und sei $z_0 \in U$. Dann gilt für $B_R(z_0) \subset U$, für ein R und $\forall z \in B_R(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(z_0)} dw \frac{f(w)}{w - z}$$

Intuition:

Wir können $f(z)$ berechnen, nur der Information des Randes einer geschlossenen Kurve.

4.6.3 Automatisch glatt

$f(z)$ ist holomorph, also gilt $f'(z) = \frac{1}{2} \partial_x f - \frac{1}{2} \partial_y f$ und mit dem Feynman "Integrationstrick" kann man folgern:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R(z_0)} dw \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}$$

4.7 Holomorphe Funktionen sind Analytisch

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion in U . Mit U einfach offen zusammenhängend. Und sei $z_0 \in U$ und R , sodass $\overline{B_R(z_0)} \subset U$, Dann gilt für alle $z \in B_R(z_0)$, dass f eine konvergente Potenzreihe besitzt:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(z_0)} dw \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}$$

Also ist f analytisch in U

4.8 Ganze Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heisst ganz (entire), wenn sie holomorph (also analytisch) auf der ganzen Komplexen Ebene ist.

Die Taylor Reihe einer ganzen Funktion hat um jeden Punkt einen unendlichen Konvergenzradius.

4.9 Little Picard Theorem

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze aber nicht konstante Funktion. Dann wird f alle Werte bis auf maximal einen annehmen.

Also gilt entweder:

- $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, oder
- $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{z\}$

Daraus folgt, dass jede beschränkte ganze Funktion konstant sein muss.

4.10 Kritische Punkte von Holomorphen Funktionen

4.10.1 Maximum Modulus Principle

f hat kein Maximum in U . Aber das ist sicher nicht wirklich wichtig.

4.10.2 Kritische Punkte in f sind saddle Punkte von u und v

Die Gradienten der Real und Imaginarteile einer holomorphen Funktion sind orthogonal zueinander.

Daraus folgt dass jeder kritische Punkt einer holomorphen Funktion f saddle Punkte seiner Real und Imaginarteile sind.

Der Rest in diesem Kapitel ist eher so quatsch und oder nicht wichtig.

5 Meromorphe Funktionen und Residuen Satz

5.1 Meromorphe Funktionen

Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heisst meromorph in U , wenn jeder Punkt in U eine Umgebung hat, sodass entweder f oder $\frac{1}{f}$ (oder beides) holomorph darin sind.

Wenn f holomorph in z_0 ist und $f(z_0) \neq 0$, dann ist $\frac{1}{f(z_0)}$ auch holomorph und es gilt:

$$\left[\frac{1}{f} \right]' = - \frac{f'(z_0)}{f^2(z_0)}$$

5.1.1 Collorare

Wenn $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion in U ist, dann gilt $\forall z_0 \in U$:

Entweder:

f ist holomorph (und analytisch) in z_0 . Dann gilt in einer Umgebung von z_0 :

$$f(z) = (z - z_0)^p g(z)$$

mit $p \geq 0$ und $g(z)$ analytisch und nicht Null in z_0 (Wenn $p > 0$), dann ist z_0 eine Null mit Order p von f . **oder:** f ist nicht holomorph in z_0 , aber $\frac{1}{f}$ ist holomorph in z_0 . Dann gilt fuer eine Umgebung von z_0 , dass

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^n g(z)$$

, mit $n > 1$ und $g(z)$ ist analytisch und nicht Null in z_0

Es folgt, dass $g(z) \neq 0$ in einer Umgebung von z_0 , also kann man auch schreiben:

$$\frac{1}{g(z)} = (z - z_0)^n f(z)$$

Dies ist Complex diffbar in dieser Umgebung, hence holomorph in z_0 . In diesem Fall sprechen wir bei z_0 von einer **Polstelle** der Ordnung n von f .

5.2 Laurent Reihe und mehr zu Polen

Die Pole und die Nullstellen von Meromorphen Funktionen sind isoliert.

5.2.1 Laurent Reihe

Fuer jedes $z_0 \in U$ existiert eine natuerliche Zahl n , sodass $(z - z_0)^n f(z)$ holomorph und nicht Null in einer Umgebung von z_0 ist. Wenn man die koeffizienten nun sinnvoll waehlt, sieht man, dass $f(z)$ immer eine Laurent Reihendarstellung besitzt. *Einfach durch $(z - z_0)^n$ teilen*

$$f(z) = \sum_{k \geq -n} a_k (z - z_0)^k$$

Man beachte die negativen n , im der Summe.

Diese Reihe konvergiert fuer eine Disk (mit Loch in der Mitte), also $B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$

Laurent Reihen haben einen Haupt und Nebenteil:

$$\underbrace{\sum_{k \geq -n}^{-1} a_k (z - z_0)^k}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k \geq 0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{\text{Nebenteil}}$$

Beachte, der Hauptteil ist also der Teil mit (endlich vielen) negativen Exponenten, dieser Existiert trivialerweise nur, wenn z_0 eine Polstelle von f ist.

5.2.2 Beispiel(e):

Beispiel 1:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

Diese Funktion hat offensichtlich ihre Polstellen bei $z_0 = 1$, $z_0 = 2$

Die Laurent Reihe um die Polstelle $z_0 = 1$ sieht also so aus:

$$\frac{1}{z-1} + \frac{1}{-1+(z-1)} \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{z-1} + \sum_{n \geq 0} (z-1)^n$$

Wir wollten ja eine Darstellung um den Punkt 1, deswegen wurde hier so gemaut, dass wir in der Geometricshen Reihe, die Entwicklung um den Punkt 1 haben, was uebrig bleibt ist der Hauptteil der Laurent Reihe, also nur $\frac{1}{z-1}$ Wir finden nun die LaurentReihe um den Punkt $z_0 = 2$, also suchen eine geom. Reihe mit mittelpunkt 2.

$$\frac{1}{1 + (z - 2)} + \frac{1}{z - 2} = \frac{1}{z - 2} + \sum_{n \geq 0} (-1)^n (z - 2)^n$$

Wieder haben wir einen Hauptteil.

Entwickeln wir um einen Punkt, der keine Polstelle ist, in einem Radius $\rho > 1$. Nutzen wir also $z_0 = 3$ als Entwicklungspunkt.

$$\frac{1}{2 + (z - 3)} + \frac{1}{1 + (z - 3)} \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} + 1 \right) (z - 3)^n$$

Man erkennt, dass um den Punkt 3, nur der Nebenteil auftritt, weil es keine Polstelle im Radius der Entwicklung gibt.

Beispiel 2:

sin(z) und 1/(sin z)

5.2.3 Vorgehen Laurent Reihe finden

Hier tips und tricks zur laurent reihe, also null addieren und partialbrucherlegung und gemoetrische reihe alle geom Reihen, die wichtig sein koennten.

5.3 Residuen Satz

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Meromorphe Funktion und z_0 eine Polstelle mit der Ordnung n von f . Dann gibt es fuer einen Annulus um z_0 eine konvergente Laurent Reihen Darstellung:

$$f(z) = \sum_{k \geq -n} a_k (z - z_0)^k$$

Wir nennen den ersten Koeffizienten, der Laurent Reihe, also a_{-1} das Residuum von f an der Polstelle z_0 und notieren dies mit:

$$a_{-1} = \text{Res}(f, z_0)$$

Nun gilt fuer einen Radius R , sodass $B_R(z_0)$ keinen weiteren Pol besitzt:

$$\int_{C_R(z_0)} dz f(z) = 2\pi i \text{Res}(f, z_0)$$

Allgemeiner gilt:

$$\int_C dz f(z) = 2\pi i \sum_{z_0 \in U} \text{Res}(f, z_0)$$

Dabei ist C eine Kurve, die das Gebiet U einschliesst. Und z_0 sind alle Pole, in diesem Bereich U. Man muesste noch die Windungszahl k beachten (also wie oft man um den Pol mit C herumlauft, aber das behandeln wir nicht) Hier ein erkläerngsbild des annulus

5.3.1 Residuum finden

Wenn z_0 eine Polstelle mit Ordnung n von f ist, so laesst sich das Residuum finden mit:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_0)^n f(z))$$

5.4 Isolierte Singularitäten von Complex Funktionen

Sei f eine holomorphe Funktion im Annulus $\{z \in \mathbb{C}, \text{ sodass } r < |z - z_0| < R\}$. Dann hat f , in diesem Annulus eine eindeutige Laurent Reihen Darstellung mit:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(z_0)} dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad r < \rho < R$$

5.4.1 Isolierte Singularitäten

Wenn z_0 eine isolierte Singularität von f ist, dann existiert ein Bereich darum, $B_r(z_0)$, sodass f dort holomorph in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Eine solche isolierte Singularität kann folgendes sein:

- hebbar (removable)
- eine Polstelle
- wesentlich (essential)

hebbar:

Wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existiert, es also keine Hauptteile in der Laurentreihe gibt. Es also eine analytische Fortsetzung von f in $B_r(z_0)$ gibt.

Bespiel:

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

Man wuerde eine Polstelle, an $z = 0$ erwarten, aber der Grenzwert existiert $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$, damit gibt es eine analytische Fortsetzung und die Singularität ist hebbar.

Polstelle:

Wenn das $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ nicht existiert, **Aber** $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)}$ existiert. Also die Laurent Reihe der Funktion an dieser Stelle z_0 einen endlich grossen Hauptteil hat.

Wesentliche Singularität

Wenn weder $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ noch $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)}$ existiert, also der Hauptteil der Laurent Reihe unendlich ist.

Bespiel:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

Diese Funktion hat einen Hauptteil, mit unendlich vielen Summanden. (Einfach E funktion als Reihe darstellen und man sieht, dass immer z^n im Nenner chillt)

Ab hier kommt nur noch Mittag Leffler Dinge und Borel Summation, also alles was wir nicht in der VL gemacht haben, ich sehe auch noch keinen Nutzen tbh.

6 Hilbert Räume

6.0.1 Recap Vektorräumen

Ein Vektorraum V über einem Körper ist eine Menge, die mit zwei Operationen kommt:

- addition: $+: V \times V \rightarrow V, (x, y) \mapsto y + x$, sodass fuer $+$ gilt:
 - $+$ ist assoziatove
 - $+$ ist kommutative
 - Es gibt ein Nullelement: 0
 - Jedes $v \in V$ besitzt ein $-v \in V$, sodass $v + (-v) = 0$
- Skalare Multiplikation $\cdot: K \times V \rightarrow V, (\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v$, sodass
 - $\cdot$ ist kompatibel mit der Multiplikation $\times$ im Koerper K , $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \times \beta) \cdot v$
 - Ein Einselement sodass $1 \cdot v = v$
 - $\cdot$ ist distributiv mit denaddiation in K und V : $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

Norm im Vektorraum ist eine Funktion $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_+$, sodass

- $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0$, nur wenn $v = 0$
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|, \forall \alpha \in K \text{ und } \forall v \in V$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Weiter kann man noch beschraenkender werden und folgende Raume definieren:

- Metricsher Raum: Ein normierter Vektorraum mit der Distanzfunktion: $d(x, y) = \|x - y\|$
- Banach Raum: Ein Cauchy Kompletter normierter Vektorraum.

6.1 Inneres Produkt

Ein inneres Produkt auf einem Vektorraum V ist eine Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow K$ Dabei kommt es nun auf den Koerper an, welche Eigenschaften das Innere Produkt hat.

6.1.1 Reeler Zahlenkoerper

Hier muss das Innereprodukt eine positive, nicht degenerative, symmetrische Bilinear Form sein.

- $\langle v, v \rangle \geq 0$ und $\langle v, v \rangle = 0$ if and only if $v = 0$
- $\langle \alpha x + \beta y, u \rangle = \alpha \langle x, u \rangle + \beta \langle y, u \rangle$ und im zweiten Argument
- $\langle u, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle u, x \rangle + \beta \langle u, y \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Also linear in beiden Argumente, immer positiv, (es darf keine negativen Werte annehmen, und symmetrisch meint, dass ich die Eingaenge vertauschen kann, aber der Skalar, der rauskommt der gleich ist)

6.1.2 Complexer Zahlenkoerper

Hier brauchen wir eine positive, nicht degenerierende Hermitesche sesquilinearform.

- $\langle v, v \rangle \geq 0$ und $\langle v, v \rangle = 0$ if and only if $v = 0$
- $\langle \alpha x + \beta y, u \rangle = \alpha^* \langle x, u \rangle + \beta^* \langle y, u \rangle$ und im zweiten Argument
- $\langle u, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle u, x \rangle + \beta \langle u, y \rangle$
- $\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle$

Dabei notiert $*$, das komplex konjugierte.

6.1.3 Norm

Ein solches inneres Produkt induziert einen Normbegriff auf dem Raum:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

6.2 Hilbert Raum

Ein Hilbertraum ist ein Vektorraum mit einem inneren Produkt, der Cauchy komplett ist bezueglich der Distanzfunktion, die durch die Innere-Produkt-Norm kommt.

6.2.1 Beispiele

$\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind Hilberräume, als auch $\ell^2 = \{(x(n))_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n \geq 0} |x(n)|^2 < \infty\}$

6.3 Chauchy Schwarz Ungleichung

Fuer alle Vektoren $x, y \in V$ in einem InneremProduktRaum V gilt:

$$|\langle x, y \rangle| < \|x\| \|y\|$$

6.4 Parallelogramm Gesetz

Eine Norm $\|\cdot\|$ in einem normierten Vektorraum leitet sich auf einem inneren Produkt ab $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$ nur wenn fuer alle $x, y \in V$ gilt:

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

6.5 Orthogonales Komplement

Sei V ein Hilbertraum und W ein abgeschlossener Unterraum, welcher auch unendlich Dimensional sein kann. Dann definieren wir das Orthogonale Complement $W^\perp$, als die Menge an Vektoren, die orthogonal zu W stehen. Also:

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$$

Dann ist $W^\perp$ wieder ein geschlossener Unterraum von V und jedes $v \in V$ kann eindeutig zerlegt werden in:

$$v = x + y, \quad x \in W, y \in W^\perp$$

Wir koenen also auch schreiben:

$$V = W \oplus W^\perp, \quad W^\perp \neq \emptyset$$

6.6 Gramm- Schmitt

Der Spann einer Familien an Vektoren ist ein Vektorraum mit endlichen Linearkombinationen der vektoren aus dieser Familie.

Betrachten wir nun die Familie an Vektoren $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem Hilbertraum, mit keinem der Vektoren der Nullvektor $x_n \neq 0$. Aus dieser Familie, kann man sich nun ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bauen, welches den selben Spann hat, wie die urspruengliche Familie an Vektoren.

Wir beginnen mit dem ersten Basisvektor:

$$e_0 := \frac{x_0}{\|x_0\|}$$

Dann schaut man sich den naechsten Vektor an:

$$e_1 := \frac{x_1 - \langle e_0, x_1 \rangle e_0}{\|x_1 - \langle e_0, x_1 \rangle e_0\|}$$

Und dann geht man jeden Vektor x_n der ausgangsfammilie durch, und benutzt folgende Formel, fuer den jeweils naechsaten Basisvektoren eintrag e_{k+1} :

$$e_{k+1} := \frac{x_n - \sum_{j=0}^k \langle e_j, x_n \rangle e_j}{\|x_n - \sum_{j=0}^k \langle e_j, x_n \rangle e_j\|}$$

Dabei muss man aber darauf achten, dass $x_n \notin \text{Span}(\{e_k\})$, wenn sich das x_n bei dem man gerade ist schon durch die bisher erlangetn e_k kombinieren laesst, dann muss man einfach dieses n skippen und mit $n + 1$ weitermachen.

6.7 Hilbert Basis

Ein Hilbertraum heisst separabel (also hat eine abzaehlbare dichte Teilmenge) dann und nur dann, wenn es eine abzaehlbare orthonormale Hilbertbasis e_n gibt, sodass man jeden Vektor in V schreiben kann als:

$\forall v \in V : v = \sum_{k=0}^{\infty} \langle e_k, v \rangle e_k$ Also gerade eine Normale Basiszerlegung, aber halt nun im unendlichdimensionalen Fall.

Man kann sehen, dass jeder seperabler Hilbertraum isomorph zu ℓ^2 ist.

Eine solche Familie an Vektoren e_k ist nur dann eine Base von einem Hilbertraum, wenn gilt:

$$\forall n \langle e_n, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad v \notin \{e_k\}$$

Also es kommt bei der Projektion mit einem Vektor, niemals null heraus, ausser dieser ist selbst null.

6.8 Stetigkeit in beiden Argumenten yields:

Man kann sehen, dass fuer das Normquadrat gilt:

$$\|x\|^2 = \langle x, \sum_{n \geq 0} \langle e_n, x \rangle e_n \rangle = \sum_{n \geq 0} |\langle e_n, x \rangle|^2$$

6.9 Beispiel ℓ^2 -Raum

Betrachten wir wieder den ℓ^2 -Raum, also $\ell^2 = \{x(n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n \geq 0} |x(n)|^2 < \infty\}$. Die Hilbertbasis in diesem Raum ist:

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots), \quad e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

Also Sequenzen, die an ihrer n -Stelle den Eintrag 1 haben, und ansonstne 0. Man erkennt direkt:

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$$

7 Operatoren auf Hilbertraumen

7.1 Operatoren auf Hilberträumen

7.1.1 Lineare und beschränkte Operatoren

Ein Operator $A : V \rightarrow V$ auf einem Hilbertraum heißt **linear**, wenn gilt:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \quad \forall x, y \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Er heißt **beschränkt**, wenn ein $c \geq 0$ existiert, sodass

$$\|Av\| \leq c \|v\|, \quad \forall v \in V.$$

Dann ist A stetig. Die kleinste solche Konstante c ist die Operatornorm:

$$\|A\|_{op} = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|.$$

Die Operatornorm ist also die kleinste Konstante, die fuer alle $v \in V$ gilt, und um den der Operator A "maximal" streckt.

Betrachte den Operator;

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Und alle Vektoren $\|v\| = 1$, dann ist das groestmögliche Ergebniss $\|A(v)\| = 3$, und damit ist $\|A\|_{op} = 3$ und $c = 3$, weil c die kleinste Zahl ist, fuer die Bedingung fuer c fuer alle v gilt.

weiteres Beispiel:

Im Raum ℓ^2 definiert $A(x_1, x_2, \dots) = (2x_1, 2x_2, \dots)$ einen beschränkten Operator mit $\|A\|_{op} = 2$.

Ein Operator $B(x_1, x_2, \dots) = (nx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist dagegen unbeschränkt, da $\|Be_n\| = n \rightarrow \infty$.

Erinnerung ℓ^2 ist ein Folgenraum, also geht immer $n \rightarrow \infty$, und der Operator skallieret, dass n -te Folgenglied mit n , daher ist der Operator auch nicht beschraenkt, weil n selbst nicht beschraenkt ist. (es geht immer immer weiter)

7.1.2 Das Duale eines Hilbertraums

Das **kontinuierliche Dual** V' eines normierten Raumes V ist die Menge aller stetigen linearen Funktionale

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y),$$

mit $\|\varphi\|_{op} < \infty$. Also sei das kontinuierlich duale:

$$V' = \{\varphi \in V^* \mid \|\varphi\| < \infty\} \subset V^*$$

Beispiel:

Für $V = \ell^p$ ist das Dual $V' = \ell^q$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Das Funktional $\varphi_a(x) = \sum_n a_n x_n$ mit $(a_n) \in \ell^q$ ist stetig durch die Hölder-Ungleichung.

Der ℓ^p Raum ist der Raum aller Folgen, die mit der p Norm konvergieren, also:

$$\ell^p = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum |x_n|^p < \infty\}$$

Das Skalarprodukt im Folgenraum ist die Reihenbildung, also ist das kontinuierliche Dual zum Folgenraum ℓ^p , wieder ein Folgenraum ℓ^q , naemlich mit allen Folgen, mit denen x_n fuer jedes $x \in V$ konvergiert.

Deswegen muss auch:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

gelten.

Der ℓ^p -Raum misst, wie "schnell" eine unendliche Zahlenfolge gegen Null geht. Der Dualraum ℓ^q ist der natürliche Raum, der "genau richtig" mit ℓ^p gepaart werden kann, damit die unendliche Summe $\sum a_n x_n$ noch sinnvoll bleibt und stetig abhängt.

7.1.3 Riesz–Fréchet Darstellungssatz

Sei V ein Hilbertraum und $\varphi \in V'$ ein stetiges lineares Funktional. Dann existiert genau ein Vektor $v_\varphi \in V$ mit

$$\varphi(x) = \langle v_\varphi, x \rangle, \quad \forall x \in V,$$

und $\|\varphi\|_{op} = \|v_\varphi\|$.

Jedes stetige lineare Funktional auf einem Hilbertraum ist einfach "Skalarprodukt mit einem festen Vektor". Das macht V und V' isomorph.

Beispiel:

Im ℓ^2 -Raum gilt: $\varphi(x) = \sum_n a_n x_n$ entspricht $v_\varphi = (a_n)_n$.

7.1.4 Kompakte Operatoren

Ein Operator $T : V \rightarrow V$ heißt **kompakt**, wenn er beschränkt ist und das Bild jeder beschränkten Menge relativ kompakt ist, d.h. jede beschränkte Folge (x_n) hat eine Teilfolge, sodass (Tx_{n_k}) konvergiert. **Beispiele**

kompakter Operatoren:

- *Endlichdimensionale Operatoren:* Jeder Operator mit endlichdimensionalem Bild (z.B. Projektion auf eine Basisrichtung) ist kompakt.
- *Diagonaloperator mit $\lambda_n \rightarrow 0$:* $T(x) = \sum_n \lambda_n x_n e_n$, wobei $\lambda_n \rightarrow 0$, ist kompakt.

Nichtbeispiel:

Die Identität $I(x) = x$ ist **nicht kompakt**, da die Basisvektoren e_n keine konvergente Teilfolge besitzen.

7.1.5 Was bedeutet "relativ kompakt"?

Eine Teilmenge M eines normierten Raums V heißt **relativ kompakt**, wenn ihr **Abschluss** $\overline{M}$ kompakt ist.

Intuitiv:

Das bedeutet: Man kann aus *jeder* Folge (x_n) in M eine **konvergente Teilfolge** (x_{n_k}) auswählen, deren Grenzwert in V liegt (nicht unbedingt in M selbst, aber in $\overline{M}$).

Warum "relativ"?

"Relativ" heißt hier: nicht unbedingt *selbst kompakt*, aber so, dass der Abschluss kompakt ist. Das ist wichtig in unendlichdimensionalen Räumen, wo fast keine Mengen wirklich kompakt sind.

Beispiel zur Anschauung:

Im endlichdimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ gilt:

$$\text{kompakt} \Leftrightarrow \text{abgeschlossen und beschränkt}.$$

Also ist dort "relativ kompakt" dasselbe wie "beschränkt".

Aber in unendlichdimensionalen Räumen (wie ℓ^2 oder L^2) gilt das **nicht mehr!** Hier ist z. B. die Einheitskugel

$$B_1 = \{ x \in \ell^2 \mid \|x\| \leq 1 \}$$

nicht kompakt, denn man kann Folgen von Einheitsvektoren e_n finden, die keine konvergente Teilfolge besitzen:

$$\|e_n - e_m\| = \sqrt{2} \quad \text{für } n \neq m.$$

Es gibt also keine Teilfolge, die "näher zusammenrückt".

Anwendung bei Operatoren:

Ein Operator $T: V \rightarrow V$ heißt **kompakt**, wenn das Bild der Einheitskugel B_1 relativ kompakt ist:

$$T(B_1) \text{ hat kompakte Abschlussmenge.}$$

Das heißt: Aus jeder Folge (x_n) mit $\|x_n\| \leq 1$ kann man eine Teilfolge (x_{n_k}) wählen, so dass (Tx_{n_k}) konvergiert.

Anschaulich:

Ein kompakter Operator "drückt" das unendliche, weite Bild einer Folge so zusammen, dass keine Punkte mehr ins Unendliche "entweichen" können. Er verhält sich also wie ein Operator, der unendlich viele Dimensionen in einen "quasi-endlichen" Bereich faltet.

Beispiel:

Betrachte den Operator $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ mit

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots \right).$$

7.1.6 Adjungierte und selbstadjungierte Operatoren

Für einen beschränkten Operator A auf einem Hilbertraum V existiert stets ein eindeutiger Operator $A^\dagger$ mit:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^\dagger y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

$A^\dagger$ heißt **Adjungierter** von A . Ein Operator heißt **selbstadjungiert**, wenn $A = A^\dagger$.

Beispiel:

Im ℓ^2 -Raum mit $A(x_1, x_2, \dots) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$ gilt $A^\dagger = A$ genau dann, wenn alle λ_n reell sind. *Wendet man den Operator an, so sieht man, dass dieser die Vektoren nur skaliert und aus dem Complexen skalarprodukt darf man Dinge "rausziehen", wenn man diese dann (je nach argument) komplex konjugiert. Das juckt aber nicht, wenn die λ sowieso reell sind, weil dann Complex und Complexkonjugiert das gleiche sind, und der Operator A ist $A^\dagger$*

7.1.7 Unbeschränkte Operatoren**Warum unbeschränkte Operatoren?**

In endlichdimensionalen Räumen ist jeder lineare Operator automatisch stetig (also beschränkt). In unendlichdimensionalen Räumen ist das nicht mehr wahr! Es gibt viele wichtige lineare Operatoren, die *nicht beschränkt* sind — z. B. Ableitungsoperatoren oder Multiplikation mit wachsendem Faktor.

Definition:

Ein **unbeschränkter Operator** ist ein Paar $(A, D(A))$, wobei

$$D(A) \subset V$$

ein linearer Unterraum (der **Definitionsbereich**) ist, auf dem A definiert ist. Meist fordert man, dass $D(A)$ **dicht in V** ist — also jede Stelle im Raum durch Vektoren aus $D(A)$ angenähert werden kann.

$$A: D(A) \rightarrow V, \quad v \mapsto Av.$$

Das Besondere ist: $\|Av\|$ kann *beliebig groß* werden, auch wenn $\|v\|$ begrenzt bleibt. Daher nennt man A "unbeschränkt".

Beispiel (Multiplikationsoperator):

Sei $A: D(A) \subset \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definiert durch

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (1 \cdot x_1, 2 \cdot x_2, 3 \cdot x_3, \dots),$$

mit dem Definitionsbereich

$$D(A) = \left\{ x \in \ell^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

Dann gilt:

$$\|Ae_n\| = n \rightarrow \infty,$$

also ist A unbeschränkt. Aber: A ist **symmetrisch**, denn für $x, y \in D(A)$ gilt:

$$\langle Ax, y \rangle = \sum_{n \geq 1} n x_n \overline{y_n} = \langle x, Ay \rangle.$$

Man kann sogar zeigen, dass A **selbstadjungiert** ist, da $D(A) = D(A^\dagger)$ gilt und das Spektrum $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ liegt.

Intuition:

Dieser Operator skaliert die Koordinaten mit n das heißt, er "verstärkt" hohe Komponenten immer stärker. Für Vektoren, deren Einträge nicht schnell genug gegen 0 gehen, würde das Bild unendlich groß werden daher kann A nicht auf ganz ℓ^2 wirken, sondern nur auf einem dichten Teilbereich.

7.1.8 Warum unbeschränkte Operatoren nur auf dichten Teilmengen definiert sind

Ausgangspunkt:

Für jedes $x = (x_n)$ gilt formal:

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |nx_n|^2.$$

Das Problem:

Selbst wenn $x \in \ell^2$ ist, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

muss das *nicht* heißen, dass auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x_n|^2 < \infty$$

gilt.

Denn die Gewichte n^2 wachsen sehr schnell — sie können die Summe *zerstören*. Damit wäre Ax **nicht mehr in ℓ^2** .

Das Bild Ax würde also gar *nicht im selben Raum leben!*

Beispiel:

Nimm die Folge

$$x_n = \frac{1}{n}.$$

Dann gilt:

$$\sum |x_n|^2 = \sum \frac{1}{n^2} < \infty \quad \Rightarrow \quad x \in \ell^2.$$

Aber

$$Ax = (1, 1, 1, \dots),$$

und

$$\|Ax\|^2 = \sum 1 = \infty.$$

Also: Ax liegt *nicht* in ℓ^2 .

Konsequenz:

Damit A überhaupt wohldefiniert ist, muss man den Definitionsbereich einschränken auf diejenigen x , für die auch Ax in ℓ^2 bleibt.

Das führt zur natürlichen Wahl:

$$D(A) = \left\{ x \in \ell^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

Warum *dicht*?

Wir wollen trotzdem, dass A "so groß wie möglich" definiert ist, damit wir nichts "künstlich abschneiden". Darum wählen wir $D(A)$ so, dass es **dicht in** ℓ^2 ist — also jeder Vektor in ℓ^2 durch Folgen aus $D(A)$ angenähert werden kann.

Zum Beispiel:

$$x^{(N)} = (x_1, x_2, \dots, x_N, 0, 0, \dots) \in D(A),$$

denn die Summe $\sum n^2 |x_n|^2$ ist hier endlich. Und $x^{(N)} \rightarrow x$ in ℓ^2 für jedes x .

Also ist $D(A)$ dicht.

Intuitive Vorstellung:

- A multipliziert jede Komponente mit $n \rightarrow$ "verstärkt hohe Frequenzen". - Wenn x_n nicht schnell genug gegen 0 geht, "explodiert" Ax . - Also darf A nur auf solchen x wirken, die genügend schnell abfallen. - Diese "glatten" x bilden eine dichte Teilmenge — man kann aber jedes x in ℓ^2 beliebig gut durch solche glatten x approximieren.

Physikalische Analogie:

In der Quantenmechanik ist das ähnlich: Der Impulsoperator $\hat{p} = -i \frac{d}{dx}$ darf nicht auf allen L^2 -Funktionen wirken — nur auf denen, die differenzierbar genug sind (z.B. C_c^∞). Aber diese glatten Funktionen sind **dicht** in L^2 — also kann man mit ihnen alle anderen approximieren.

So bleibt der Operator "maximal definiert", aber trotzdem wohldefiniert.

Wichtiges:

- Unbeschränkte Operatoren können nicht überall wirken — sonst wären sie undefiniert.
- Sie werden deshalb nur auf solchen Vektoren definiert, für die Ax noch im Raum liegt.
- Dieser Definitionsbereich muss **dicht** gewählt sein, damit man Grenzwerte sinnvoll beschreiben kann.
- Nur so lassen sich Begriffe wie **Abgeschlossenheit** und **Selbstadjungiertheit** sauber formulieren.

7.1.9 Abgeschlossene (Closed) Operatoren

Ein Operator A heißt **abgeschlossen**, wenn er sich im Grenzübergang "gut verhält". Formal:

$$A \text{ ist abgeschlossen} \iff \begin{cases} x_n \in D(A), & x_n \rightarrow x, \\ Ax_n \rightarrow y \end{cases} \Rightarrow x \in D(A) \text{ und } Ax = y.$$

Anschauliche Bedeutung:

Das heißt: Wenn man eine Folge von Vektoren x_n nimmt,

- die im Definitionsbereich liegt,
- deren Bilder Ax_n konvergieren,

dann muss auch der Grenzwert x noch im Definitionsbereich liegen, und A muss dort "stetig im Grenzfalle" bleiben.

Wenn das nicht gilt, "reißt" der Operator im Grenzfalle auseinander — er ist dann **nicht geschlossen**.

Beispiel:

Der eben betrachtete Operator

$$A(x) = (nx_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

ist tatsächlich **abgeschlossen**: Wenn $x^{(k)} \in D(A)$ und $x^{(k)} \rightarrow x$, $Ax^{(k)} \rightarrow y$, dann gilt automatisch $x \in D(A)$ und $Ax = y$.

Man kann das direkt sehen, weil Konvergenz in ℓ^2 impliziert:

$$\sum_n |nx_n|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_n |nx_n^{(k)}|^2 < \infty.$$

Graph eines Operators:

Ein hilfreiches Bild ist der **Graph** eines Operators:

$$\text{Graph}(A) = \{ (x, Ax) \mid x \in D(A) \} \subset V \times V.$$

Ein Operator ist genau dann abgeschlossen, wenn dieser Graph eine **abgeschlossene Teilmenge** von $V \times V$ ist.

Beispielbild:

Wenn man $V \times V$ als "Raum von Eingaben und Ausgaben" denkt, dann ist der Graph eines abgeschlossenen Operators eine "glatte Fläche ohne Risse". Ein nicht-abgeschlossener Operator würde Lücken haben, weil manche Grenzwerte (x, y) zwar erreicht werden können, aber x nicht mehr im Definitionsbereich liegt.

7.1.10 Abschließbarer Operator:

Man nennt einen Operator **abschließbar**, wenn es eine Erweiterung $\bar{A}$ gibt, die abgeschlossen ist, und auf $D(A)$ mit A übereinstimmt. Man nennt $\bar{A}$ dann die **Abschluss-Erweiterung** von A .

Beispiel: Viele Differentialoperatoren auf C_c^∞ (glatte Funktionen mit kompaktem Träger) sind nicht abgeschlossen, aber *abschließbar*. Ihr Abschluss ist dann der "richtige" selbstadjungierte Operator, den man in der Quantenmechanik benutzt (z. B. der Laplace-Operator oder der Impulsoperator).

Intuition in der Physik:

In der Quantenmechanik sind wichtige Observablen (wie Energie oder Impuls) durch unbeschränkte, aber **selbstadjungierte** Operatoren beschrieben:

$$\hat{p} = -i \frac{d}{dx}, \quad \hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2}.$$

Diese Operatoren sind nur auf speziellen, "glatten" Funktionen definiert. Man muss ihren Definitionsbereich sorgfältig wählen, damit sie abgeschlossen und selbstadjungiert sind — denn nur dann haben sie ein **reelles Spektrum**, und nur dann machen physikalische Messwerte Sinn.

7.1.11 Zusammenfassung

- Beschränkte Operatoren sind genau die stetigen linearen Operatoren.
- Der Riesz–Fréchet-Satz identifiziert V' mit V selbst.
- Kompakte Operatoren verallgemeinern Matrizen ins Unendliche.
- Selbstadjungierte Operatoren haben reelle Eigenwerte und orthogonale Eigenvektoren.

8 Spektraltheorie auf Hilberträumen

8.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Ein Paar (λ, v) heißt **Eigenwert** und **Eigenvektor** eines Operators A auf einem Hilbertraum V , wenn

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0, \quad \|v\| = 1.$$

Die Menge aller Eigenwerte heißt **Punktspektrum** oder **diskretes Spektrum** von A .

Eigenschaften bei selbstadjungierten Operatoren:

- Alle Eigenwerte λ sind **reell**.
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind **orthogonal**.

Es gilt:

- Sei (λ, v) ein Eigenpaar: $\lambda \langle v, v \rangle = \langle Av, v \rangle = \langle v, Av \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$
- Seien $(\lambda_1, v_1), (\lambda_2, v_2)$ zwei Eigenpaare: $0 = \langle Av_1, v_2 \rangle - \langle v_1, Av_2 \rangle = (\bar{\lambda}_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle$

Beispiel:

Betrachte A auf ℓ^2 definiert durch

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$$

. Dann sind e_n die Eigenvektoren und $\lambda_n = n$ die Eigenwerte. $\Rightarrow A$ ist diagonal im ℓ^2 -Standardbasis, aber unbeschränkt.

$$\langle Ae_n, e_m \rangle = n\delta_{nm} = \langle e_n, Ae_m \rangle,$$

d.h. A ist symmetrisch (und tatsächlich selbstadjungiert).

8.2 Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren

Für einen kompakten selbstadjungierten Operator T existieren Eigenwerte $\lambda_n \in \mathbb{R}$ und orthonormale Eigenzustände $\{|f_n\rangle\}$, sodass

$$T|f_n\rangle = \lambda_n|f_n\rangle, \quad \lambda_n \rightarrow 0.$$

Damit lässt sich T schreiben als:

$$T = \sum_n \lambda_n |f_n\rangle \langle f_n|.$$

Für jeden Zustand $|v\rangle \in V$ gilt:

$$T|v\rangle = \sum_n \lambda_n |f_n\rangle \langle f_n|v\rangle = \sum_n \lambda_n \langle f_n|v\rangle |f_n\rangle.$$

Der Operator T ist also eine gewichtete Summe von Projektoren auf seine Eigenzustände.

Anschauliche Erklärung:

Kompakte Operatoren verhalten sich wie "unendliche Matrizen", die auf Diagonalform gebracht werden können. Ihre Eigenwerte "verschwinden gegen Null" ähnlich wie kleine Schwingungsmoden in der Physik, deren Energie abnimmt.

Beispielidee:

Betrachte $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ mit $T(x) = (\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$. Dann gilt $Te_n = \frac{1}{n}e_n \Rightarrow \lambda_n = \frac{1}{n}, \lambda_n \rightarrow 0$. T ist kompakt, da $\lambda_n \rightarrow 0$, und selbstadjungiert, da alle $\lambda_n \in \mathbb{R}$. $\|T\|_{op}$:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \left(\sum_n \frac{|x_n|^2}{n^2} \right)^{1/2} = 1.$$

8.2.1 Das Spektrum eines Operators

Für einen Operator $A : D(A) \rightarrow V$ (evtl. unbeschränkt) heißt eine komplexe Zahl z **resolvent**, wenn

$$A - zI : D(A) \rightarrow V$$

invers ist und der Inverse $(A - zI)^{-1}$ beschränkt ist. Die Menge der nicht-resolventen Punkte heißt **Spektrum** $\sigma(A)$.

8.2.2 Resolvent und Spektrum

Für einen Operator $A : D(A) \rightarrow V$ definieren wir das **Resolvent**:

$$R(z; A) = (A - zI)^{-1},$$

sofern dieser Inverse existiert und beschränkt ist.

Interpretation:

Das Resolvent beschreibt, wie stark man auf die Gleichung

$$(A - zI)|x\rangle = |y\rangle$$

reagieren muss, um $|x\rangle$ zu finden. Wenn $R(z; A)$ groß oder unbeschränkt wird, bedeutet das, dass kleine Änderungen in $|y\rangle$ riesige Änderungen in $|x\rangle$ bewirken.

Spektrum:

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A),$$

also all jene z , für die $(A - zI)$ nicht invertierbar ist oder der Inverse unbeschränkt wird.

Beispiele:

- **Diskretes Spektrum:** $A|f_n\rangle = \lambda_n|f_n\rangle$ mit isolierten λ_n (z. B. Diagonalmatrix oder kompakter Operator).
- **Kontinuierliches Spektrum:** kein Eigenwert, aber $(A - \lambda I)^{-1}$ unbeschränkt (z. B. Shift-Operator, freie Teilchen).
- **Residuales Spektrum:** $(A - \lambda I)$ injektiv, aber Bild nicht dicht (tritt nicht bei selbstadjungierten Operatoren auf).

Beispiel:

Im Raum ℓ^2 sei $A(x) = \sum_n n x_n e_n$. Dann ist $\sigma(A) = \mathbb{R}_{\geq 1}$ (Eigenwerte n). Wenn man stattdessen $T(x) = \sum_n \frac{1}{n} x_n e_n$ nimmt, dann $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}$.

8.3 Spektralradius

Für einen beschränkten Operator A gilt:

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \|A\|_{op}\}.$$

Man nennt $R(A) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ den **Spektralradius**.

Beispiel:

Für T mit $Te_n = \frac{1}{n}e_n$ gilt $R(T) = \frac{1}{1} = 1 = \|T\|$. Für $Ae_n = ne_n$ gilt $R(A) = \infty$ (da A unbeschränkt).

8.3.1 Weyl-Kriterium

Satz (Weyl-Kriterium). Ein Punkt $\lambda \in \mathbb{R}$ gehört genau dann zum Spektrum $\sigma(A)$ eines (dicht definierten) selbstadjungierten Operators A , wenn es eine Folge $(v_n) \subset D(A)$ mit $\|v_n\| = 1$ gibt, sodass

$$\|(A - \lambda I)v_n\| \rightarrow 0.$$

Falls (v_n) keine konvergente Teilfolge besitzt, gehört λ zum **wesentlichen (kontinuierlichen) Spektrum**.

Beispielidee:

Betrachte wieder $Te_n = \frac{1}{n}e_n$. Nimm $v_n = e_n$. Dann gilt:

$$\|(T - 0)v_n\| = \|Te_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

aber (e_n) hat keine konvergente Teilfolge. $\Rightarrow 0 \in \sigma_{ess}(T)$.

Rechenungs:

Berechne für $Ae_n = ne_n$ und $\lambda = 3$, was mit $\|(A - \lambda I)e_n\|$ passiert. Für $n = 3$ ist das 0 (Eigenwert), für andere n wächst es. So kann man numerisch das Spektrum "abtasten".

8.3.2 Zusammenhang mit der Physik

In der Quantenmechanik entspricht das Spektrum eines selbstadjungierten Operators dem möglichen Messwert eines Observablen. Beispielsweise:

- $A = -i \frac{d}{dx}$ auf $L^2(\mathbb{R})$ hat **kontinuierliches Spektrum** $\mathbb{R}$ (Impulsoperator).
- $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ auf $L^2([0, 1])$ mit Randbedingungen hat **diskretes Spektrum** $\{\pi^2 n^2\}$ (Energie eines Teilchens in einer Box).

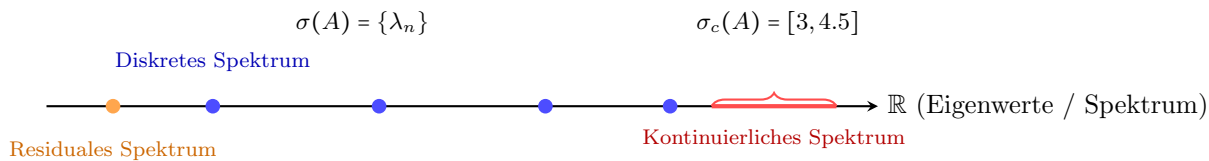
Rechenidee:

Führe eine direkte Eigenwertberechnung für den Laplace-Operator $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ mit $f(0) = f(1) = 0$ durch: Finde $f'' + \lambda f = 0 \Rightarrow f(x) = \sin(n\pi x)$, $\lambda_n = n^2 \pi^2$.

8.3.3 Zusammenfassung

- Kompakte selbstadjungierte Operatoren besitzen eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren.
- Das Spektrum ist stets abgeschlossen.
- Das wesentliche Spektrum beschreibt "kontinuierliche" Werte, die keine echten Eigenwerte sind.
- Selbstadjungierte Operatoren haben immer reelles Spektrum.
- Das Weyl-Kriterium erlaubt es, das Spektrum durch Testfolgen zu bestimmen.

Spektrum eines Operators



9 Quantenmechanik und Spektraltheorie

Motivation:

In der Quantenmechanik wird der Zustand eines physikalischen Systems als Vektor $|\psi\rangle$ in einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ beschrieben. Die physikalischen Größen ("Observablen") werden durch **selbstadjungierte Operatoren** auf diesem Raum dargestellt. Die Spektraltheorie liefert die mathematische Grundlage, um solche Operatoren zu verstehen.

9.0.1 Das Spektraltheorem in der Quantenmechanik

Für kompakte selbstadjungierte Operatoren gilt:

$$A = \sum_i \lambda_i |a_i\rangle \langle a_i|.$$

Für *nicht kompakte* (meist unbeschränkte) Operatoren, wie sie in der Quantenmechanik vorkommen (z. B. Impuls, Ort, Hamilton-Operator), ergibt sich die allgemeinere Form:

$$A = \sum_i a_i |a_i\rangle \langle a_i| + \int_{\sigma_{\text{ess}}(A)} a |a\rangle \langle a| da.$$

Dabei gilt:

- $|a_i\rangle$ sind echte Eigenvektoren (diskretes Spektrum),
- $|a\rangle$ sind **verallgemeinerte Eigenvektoren** (kontinuierliches Spektrum),
- die $|a\rangle$ gehören meist nicht mehr zum Hilbertraum (z. B. δ -Funktionen), sondern leben in einem größeren Raum von Distributionen.

Physikalische Bedeutung:

- Diskrete Eigenwerte $\Rightarrow$ *gebundene Zustände* (z. B. Elektron im Wasserstoffatom),
- Kontinuierliches Spektrum $\Rightarrow$ *freie Zustände* (z. B. freies Teilchen),
- Die Spektralzerlegung erlaubt die "Zerlegung" des Zustands $|\psi\rangle$ in Beiträge zu jedem möglichen Messwert.

Beispiel:

Für den Impulsoperator $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ gilt

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle, \quad \langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}.$$

Die $|p\rangle$ sind keine quadratintegrablen Zustände, sondern verallgemeinerte Eigenzustände mit kontinuierlichem Spektrum $p \in \mathbb{R}$.

9.0.2 Postulat 1 – Zustände

Isoliertes System:

Ein physikalischer Zustand ist ein normierter Vektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ mit $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

Dichtematrix-Darstellung:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad \rho = \rho^\dagger, \quad \text{Tr } \rho = 1.$$

Für gemischte Zustände gilt:

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|, \quad p_k \geq 0, \quad \sum_k p_k = 1.$$

Zusammengesetzte Systeme:

Wenn zwei Systeme mit Hilberträumen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ kombiniert werden:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2.$$

Ein Zustand $|\psi\rangle$ heißt **entangled** (verschränkt), wenn er sich *nicht* als einfaches Produkt $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ schreiben lässt.

9.0.3 Postulat 2 – Observablen und Messungen

Observablen:

Physikalische Größen entsprechen **selbstadjungierten Operatoren** $A = A^\dagger$. Unbeschränkte Operatoren (z. B. Ort, Impuls, Hamiltonian) werden auf einem dichten Definitionsbereich definiert.

Erwartungswert:

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | A | \psi \rangle, \quad \langle A \rangle_\rho = \text{Tr}(A\rho).$$

Messwerte:

Nur Werte $a \in \sigma(A)$ (das Spektrum von A) können als Messergebnisse auftreten.

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \sum_i a_i |\langle a_i | \psi \rangle|^2 + \int_{\sigma_{\text{ess}}(A)} a |\langle a | \psi \rangle|^2 da.$$

Dabei:

- $|\langle a_i | \psi \rangle|^2$ ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung den Eigenwert a_i zu erhalten.
- $|\langle a | \psi \rangle|^2$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für das kontinuierliche Spektrum.

Normierung:

$$1 = \sum_i |\langle a_i | \psi \rangle|^2 + \int_{\sigma_{\text{ess}}(A)} |\langle a | \psi \rangle|^2 da.$$

Projektive Messung:

Nach einer Messung mit Ergebnis a ist der neue Zustand

$$|\psi'\rangle = \frac{P_a |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_a | \psi \rangle}},$$

wobei $P_a = |a\rangle\langle a|$ (bzw. $P_a = \sum_{i, a_i=a} |a_i\rangle\langle a_i|$) der Projektor auf den gemessenen Eigenraum ist.

Bei kontinuierlichem Spektrum ersetzt man P_a durch das Integral über ein kleines Intervall $[a, a + \delta a]$.

Heisenbergsche Unschärferelation:

Für zwei Observablen A und B gilt:

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} | \langle [A, B] \rangle |^2.$$

Für Ort und Impuls $[X, P] = i\hbar$ folgt:

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Diese Beziehung ergibt sich direkt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung im Hilbertraum.

9.0.4 Postulat 3 – Zeitentwicklung**Hamiltonoperator:**

Die Dynamik des Systems wird durch den selbstadjungierten Operator $H(t)$ bestimmt. Für zeitunabhängige H gilt:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_t\rangle = H |\psi_t\rangle.$$

Lösung:

$$|\psi_t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} |\psi_{t_0}\rangle.$$

Zeitentwicklung des Dichteoperators:

$$\rho_t = U(t, t_0) \rho_{t_0} U^\dagger(t, t_0), \quad i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [H, \rho].$$

Heisenberg-Bild:

Statt dass der Zustand sich entwickelt, entwickelt sich die Observable:

$$A_H(t) = U^\dagger(t, t_0) A_S U(t, t_0), \quad i\hbar \frac{dA_H}{dt} = [A_H, H].$$

Beide Bilder sind äquivalent, liefern also dieselben Erwartungswerte.

Zusatzwissen: Dyson-Serie

Für zeitabhängige Hamiltonians $H(t)$ gilt die formale Lösung:

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(t') dt' \right),$$

mit $\mathcal{T}$ als Zeitordnungsoperator. Entwickelt man das, erhält man die **Dyson-Serie**:

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H(t_n) \cdots H(t_1).$$

9.0.5 Rechen- und Klausurhinweise

- **Erwartungswert berechnen:**

$$\langle A \rangle_\psi = \int \psi^*(x) (A\psi)(x) dx.$$

Beispiel: $A = -i\hbar \frac{d}{dx}$, $\Rightarrow \langle p \rangle = \int \psi^*(x) (-i\hbar) \frac{d\psi}{dx} dx$.

- **Varianz und Unschärfe:**

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2.$$

Heisenberg-Ungleichung prüfen durch Kommutator.

- **Zeitentwicklung:** Bei konstantem H : $|\psi_t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\psi_0\rangle$. Für gemischte Zustände: $\rho_t = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \rho_0 e^{\frac{i}{\hbar} H t}$.
- **Messung:** Nach Messung des Eigenwerts a : $|\psi'\rangle = \frac{P_a |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_a | \psi \rangle}}$. Erwartungswert mit Projektor P_a berechnen.
- **Physikalische Interpretation:**
 - Zustände $\leftrightarrow$ Wellenfunktionen.
 - Observablen $\leftrightarrow$ selbstadjungierte Operatoren.
 - Messwerte $\leftrightarrow$ Spektrum dieser Operatoren.
 - Zeitentwicklung $\leftrightarrow$ unitäre Operatorgruppe.

Merke:

- Nur **selbstadjungierte Operatoren** haben reelle Spektren $\Rightarrow$ physikalisch messbare Größen.
- Das **Spektrum** eines Operators bestimmt alle möglichen Messergebnisse.
- Der **Projektionsoperator** auf einen Eigenraum beschreibt die Messung.
- Die **Unschärferelation** folgt direkt aus der Nichtkommutativität von Observablen.
- Zeitentwicklung = unitäre Bewegung im Hilbertraum.

10 Lebesgue Integral

10.1 Das Lebesgue-Maß – Intuitive Einführung

Motivation:

Das Lebesgue-Integral wurde entwickelt, um die Schwächen des Riemann-Integrals zu beheben:

- Das Riemann-Integral funktioniert nur für Funktionen mit endlich vielen Unstetigkeiten.
- Viele Mengen (z. B. die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$) sind *nicht Jordan-messbar*, daher nicht Riemann-integrierbar.
- Es ist schwer, Grenzwerte und Integrale zu vertauschen (fehlende Stetigkeit bzgl. Grenzprozessen).

Das Lebesgue-Integral basiert daher nicht auf der Unterteilung des *Definitionsintervalls*, sondern auf der Unterteilung des *Wertebereichs der Funktion*. Dazu brauchen wir eine verfeinerte Vorstellung von "Länge" oder "Volumen" — das sogenannte **Lebesgue-Maß**.

10.1.1 Von der Jordan- zur Lebesgue-Messung

Jordan-Maß (Wiederholung):

Eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ ist **Jordan-messbar**, wenn ihr Rand ∂X Maß 0 hat. Das Jordan-Maß $\mu(X)$ beruht auf endlichen Vereinigungen von Intervallen (sog. *elementare Mengen*). Problem: Nur wenige Mengen erfüllen diese Bedingung. Beispiel:

$$\mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

hat Rand $[0, 1]$ und somit Jordan-Maß 1, obwohl $\mathbb{Q}$ "dünn" ist.

10.1.2 Das äußere Lebesgue-Maß

Definition (Outer Lebesgue Measure):

Für eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ definiert man:

$$m^*(X) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i| \mid X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \right\}.$$

Das bedeutet:

- Man überdeckt X mit abzählbar vielen offenen Intervallen (a_i, b_i) .
- Addiere ihre Längen $\sum_i |b_i - a_i|$.
- Nimm das *Infimum* über alle solchen Überdeckungen.

Das Ergebnis kann endlich oder unendlich sein.

Allgemein in $\mathbb{R}^d$:

Für $X \subset \mathbb{R}^d$ nimmt man offene Quader (Produkte von Intervallen):

$$B_i = (a_1^i, b_1^i) \times \cdots \times (a_d^i, b_d^i),$$

und setzt:

$$m^*(X) = \inf \left\{ \sum_i \text{Vol}(B_i) \mid X \subset \bigcup_i B_i \right\}, \quad \text{Vol}(B_i) = \prod_{k=1}^d |b_k^i - a_k^i|.$$

10.1.3 Wichtige Eigenschaften des äußeren Lebesgue-Maßes

- $m^*(\emptyset) = 0$.
- (Monotonie) Wenn $Y \subset X$, dann $m^*(Y) \leq m^*(X)$.
- (σ -Subadditivität)

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(X_i).$$

- (Additivität für disjunkte kompakte Mengen)

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(X_i), \quad \text{wenn } X_i \text{ kompakt und disjunkt.}$$

Beispiele:

- $m^*([a, b]) = b - a$ (jede Überdeckung hat mindestens diese Länge).
- Für disjunkte offene Intervalle $I_i = (a_i, b_i)$ gilt:

$$m^*\left(\bigcup_i I_i\right) = \sum_i (b_i - a_i).$$

- Jede **abzählbare Menge** (z. B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$) hat Maß 0:

$$m^*(S) = 0.$$

Denn man kann jedes Element s_i mit einem winzigen Intervall $(s_i - \varepsilon/2^i, s_i + \varepsilon/2^i)$ überdecken, und die Gesamtlänge $\sum_i \varepsilon/2^i = \varepsilon$ beliebig klein machen.

Das gilt, weil im Lebesgue Maß, alle Punkte Nullmengen sind, wegen der Additivität, bezüglich abzählbarer Mengen, also kann ich alle Punkte aus abzählbaren Mengen einzeln messen und quasi abzählbar unendlich nullen aufaddieren.

10.1.4 Vergleich mit Jordan-Maß

Das Lebesgue-Maß ist eine Verallgemeinerung des Jordan-Maßes:

$$m^*(X) \leq \mu^*(X),$$

denn das Lebesgue-Maß erlaubt countable (nicht nur endliche) Überdeckungen. Für kompakte Mengen stimmen beide Maße überein:

$$m^*(X) = \mu^*(X) \quad \text{für kompakte } X.$$

Warum ist das wichtig?

Das Lebesgue-Maß erkennt feine Strukturen: - $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ hat Lebesgue-Maß 0, obwohl es Jordan-Maß 1 hat. - Man kann also endlich viele und unendlich viele "dünne" Mengen unterscheiden.

10.1.5 Nullmengen und "fast überall"

Definition:

Eine Menge X heißt **Nullmenge**, wenn $m^*(X) = 0$. Eine Aussage $P(x)$ gilt **fast überall** (f.ü.), wenn sie nur auf einer Nullmenge falsch ist.

Beispiel:

Die rationalen Zahlen in $[0, 1]$ bilden eine Nullmenge. Also gilt jede Eigenschaft, die nur für irrationale x erfüllt ist, "fast überall".

10.1.6 Der Übergang zur Integration

Das Lebesgue-Maß erlaubt nun, Integrale zu definieren, die das Riemann-Integral verallgemeinern: - Man integriert über Mengen, die nur "fast überall" definiert sind. - Funktionen dürfen auf Nullmengen beliebig springen. - Grenzwerte und Integrale dürfen vertauscht werden (Monotonie- und Dominierte Konvergenz-Sätze).

Wichtiger Satz (Lebesgue-Vitali):

Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann **Riemann-integrierbar**, wenn sie **fast überall stetig** ist.

Beispiel:

Die Indikatorfunktion der rationalen Zahlen in $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

ist nirgends stetig $\Rightarrow$ nicht Riemann-integrierbar. Aber Lebesgue-integrierbar, mit

$$\int_0^1 f(x) dx = 0,$$

weil $\mathbb{Q}$ eine Nullmenge ist.

Zusammenfassung:

- Lebesgue erlaubt Integration über "komplizierte" Mengen.
- Maßtheorie basiert auf dem äußeren Maß m^* .
- Nullmengen sind Mengen ohne "Volumen" (z. B. $\mathbb{Q}$).
- "Fast überall" bedeutet "bis auf eine Nullmenge".
- Riemann und Lebesgue stimmen auf einfachen Fällen überein, aber Lebesgue kann viel mehr.

10.2 Praktisches Beispiel

Man kann nicht schreiben:

$$m^*(\mathbb{R}) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \underbrace{m^*(\{x\})}_{=0} = 0$$

geht so nicht, weil:

$$m^*(\mathbb{R}) \neq \bigcup_{x \in \mathbb{R}} m^*(\{x\})$$

Weil es nur für endliche bzw. abzählbare geht.

Es gilt aber:

$$m^*(\mathbb{R}) = m^*((-\infty, \infty)) = \infty + \infty = \infty$$

und wir definieren:

$$0 \cdot \infty := \infty \cdot 0 := 0$$

10.2.1 Cantormenge:

Wir definieren uns die Cantormenge C:

Wir konstruieren zunachst:

$$\begin{aligned} C_0 &= [0, 1] \\ C_1 &= C_0 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ C_2 &= C_1 \setminus \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \setminus \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \\ &\vdots \\ C &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \end{aligned}$$

Also ganz viele isolierte Punkte.

Moechte man das nun messen passiert:

$$m^*(C) = m^*\left(\bigcup_{x \in C} \{x\}\right) = \sum_{x \in C} \underbrace{m^*(\{x\})}_{=0} = 0$$

Das stimmt aber auch wieder nicht, weil C nicht abzählbar ist.

Sondern wir muessen in n Schnitten A_n , die rausgeschnitten werden denken, dann besteht C aus 2^{n-1} Schnitten mit der Groesse: $\frac{1}{3^n}$

$$m^*(A_n) = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2} \frac{2^n}{3^n}$$

Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} m^*(C) &= m^*\left([0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ m^*([0, 1]) - m^*\left(\bigcup_n A_n\right) &= 1 - \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} - 1\right) = 0 \end{aligned}$$

10.3 Lebesgue messbare Mengen und Maßräume

10.3.1 Lebesgue-messbare Mengen (Carathéodory-Kriterium)

Motivation:

Nicht alle Mengen sind sauber messbar, selbst wenn man ihnen mit m^* eine äußere Größe zuordnet. Man möchte diejenigen Mengen herausfiltern, für die das Maß *kompatibel* mit dem Rest des Raums ist.

Definition (Carathéodory-Kriterium):

Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^d$ heißt **Lebesgue messbar**, wenn für jede Menge $Y \subset \mathbb{R}^d$ gilt:

$$m^*(Y) = m^*(Y \cap X) + m^*(Y \cap X^c), \quad X^c = \mathbb{R}^d \setminus X.$$

Das heißt: X teilt jede andere Menge Y so, dass das Maß additiv bleibt.

Intuition:

Wenn X messbar ist, dann kann man das Maß einer beliebigen Menge Y als Summe des Maßes ihrer Teile innerhalb und außerhalb von X schreiben. X verhält sich also maßtheoretisch sauber — es schneidet den Raum nicht chaotisch auf.

Notation:

Die Menge aller Lebesgue-messbaren Mengen bezeichnet man mit $\mathcal{M}$.

10.3.2 Beispiele und Eigenschaften messbarer Mengen**Beispiele:**

- Jede Menge mit $m^*(X) = 0$ ist messbar (und hat Maß $m(X) = 0$).
- Alle offenen, geschlossenen und halboffenen Intervalle sind messbar.
- Jede abzählbare Menge (z.B. $\mathbb{Q}$) ist messbar mit Maß 0.

Stabilitätseigenschaften:

Für messbare Mengen X_i gilt:

- X^c ist messbar.
- $X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2$, $X_1 \setminus X_2$ sind messbar.
- Jede abzählbare Vereinigung $\bigcup_i X_i$ und jeder abzählbare Schnitt $\bigcap_i X_i$ messbarer Mengen ist messbar.
- Für disjunkte messbare Mengen X_i gilt:

$$m\left(\bigcup_i X_i\right) = \sum_i m(X_i).$$

Approximation durch offene und abgeschlossene Mengen:

X ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ offene und abgeschlossene Mengen G, F existieren mit

$$F \subset X \subset G, \quad m^*(G \setminus X) < \varepsilon, \quad m^*(X \setminus F) < \varepsilon.$$

Interpretation: Man kann jede messbare Menge beliebig gut von außen durch offene Mengen und von innen durch abgeschlossene Mengen approximieren.

10.3.3 Maßräume

Definition:

Ein **Maßraum** ist ein Paar $(V, \mathcal{M}, \nu)$, bestehend aus:

1. einer Menge V ,
2. einer σ -Algebra $\mathcal{M}$ (d.h. abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen, Schnitten und Komplementen),
3. einer Maßfunktion $\nu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$, die **σ -additiv** ist:

$$\text{Für disjunkte } A_i \in \mathcal{M} : \quad \nu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \nu(A_i).$$

Beispiele:

- $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}, m)$ mit $m =$ Lebesgue-Maß.
- **Zählmaß:** $\lambda(X) = |X|$ für endliche Mengen, $\lambda(X) = \infty$ sonst.
- **Dirac-Maß:** $\delta_x(A) = 1$ falls $x \in A$, sonst 0.

σ -Finitheit:

Ein Maß ν heißt **σ -finit**, wenn sich V als abzählbare Vereinigung von Mengen endlichen Maßes schreiben lässt. Das ist eine nützliche technische Bedingung, z.B. für Produktmaße.

10.3.4 Produktmaße

Definition:

Sind $(X_1, \mathcal{M}_1, \nu_1)$ und $(X_2, \mathcal{M}_2, \nu_2)$ Maßräume, so ist das **Produktmaß** $\nu_1 \times \nu_2$ auf $X_1 \times X_2$ definiert durch:

$$(\nu_1 \times \nu_2)(A_1 \times A_2) = \nu_1(A_1) \nu_2(A_2).$$

Das Produktmaß ist eindeutig, wenn beide Räume σ -finit sind.

Fubini-Tonelli-Formel:

Für messbare $E \subset X_1 \times X_2$ gilt:

$$\nu_1 \times \nu_2(E) = \int_{X_2} \nu_1(E_y) d\nu_2(y) = \int_{X_1} \nu_2(E_x) d\nu_1(x),$$

wobei

$$E_y = \{x \mid (x, y) \in E\}, \quad E_x = \{y \mid (x, y) \in E\}.$$

Beispiel:

Auf $[0, 1]^2$ mit Lebesgue-Maß $m \times m$:

- Die Diagonale $\Delta = \{(x, x)\}$ ist messbar und hat Maß 0.
- Man kann sie mit kleinen Quadraten um die Diagonale überdecken; deren Gesamtfläche geht gegen 0.

10.3.5 Satz: $\mathbb{R}^d$ mit dem Lebesgue-Maß ist ein Maßraum

Theorem:

Für $V = \mathbb{R}^d$ und das äußere Lebesgue-Maß m^* gilt:

$$\mathcal{M} = \{X \subset \mathbb{R}^d \mid X \text{ erfüllt das Carathéodory-Kriterium}\}$$

ist eine σ -Algebra, und $m = m^*|_{\mathcal{M}}$ ist σ -additiv. Damit ist $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}, m)$ ein Maßraum.

10.4 Das Lebesgue-Integral

10.4.1 Einfache Funktionen

Measurable Simple Functions

Eine *simple function* ist eine Funktion $s : V \rightarrow \mathbb{R}$, die nur endlich viele Werte annimmt.

Eine **nicht-negative messbare einfache Funktion** besitzt eine Darstellung

$$s(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}(x),$$

wobei gilt:

- $A_i \subset V$ sind messbare, paarweise disjunkte Mengen,
- $\bigcup_{i=1}^n A_i = V$,
- $a_i \geq 0$.

Eine einfache Funktion heißt *step function*, wenn die A_i ein Intervallpartition von $[a, b]$ bilden.

10.4.2 Measurable Functions

Eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt *messbar*, wenn

$$\{x \in V : f(x) > a\}$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$ messbar ist.

Insbesondere ist dann auch

$$\{x : f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) > a - \frac{1}{n}\}$$

messbar.

Approximation durch einfache Funktionen

Sei $f : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ eine messbare Funktion. Dann existiert eine wachsende Folge einfacher Funktionen s_n mit Werten in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$, sodass

$$s_n(x) \nearrow f(x) \quad \text{punktweise für alle } x.$$

10.4.3 Das Lebesgue–Integral

Integral einer einfachen Funktion

Für eine nicht-negative einfache Funktion

$$s(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}(x)$$

auf einem messbaren $X \subset V$ definiert man

$$\int_X s(x) d\nu = \sum_{i=1}^n a_i \nu(X \cap A_i).$$

Lebesgue–Integral einer nicht-negativen Funktion

Für eine nicht-negative messbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ setzt man

$$\int_X f(x) d\nu = \sup \left\{ \int_X s(x) d\nu \mid 0 \leq s \leq f, s \text{ einfach} \right\}.$$

Das Integral kann unendlich sein.

Explizite Approximation.

Mit der in Theorem 10.4.2 definierten Folge s_n gilt

$$\int_X f d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n d\nu.$$

10.4.4 Eigenschaften des Lebesgue–Integrals

Seien X eine messbare Menge und ν ein Maß. Dann gelten:

1. **Monotonie:** Wenn $0 \leq f \leq g$, dann

$$\int_X f d\nu \leq \int_X g d\nu.$$

2. **Linearität für Skalarfaktoren:** Für $c \geq 0$,

$$\int_X cf d\nu = c \int_X f d\nu.$$

3. **Nullmengen:** Wenn $\nu(X) = 0$, dann ist $\int_X f d\nu = 0$.

Wenn $f = g$ fast überall, dann

$$\int_X f d\nu = \int_X g d\nu.$$

4. **Zählbare Additivität in der Menge:** Für $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ disjunkt messbar gilt:

$$\int_A f d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\nu.$$

5. **Standardabschätzung:** Ist f integrierbar, so auch $|f|$, und

$$\left| \int_X f \, d\nu \right| \leq \int_X |f| \, d\nu.$$

6. **Beppo-Levi / Monotone Convergence Theorem (MCT):** Für $0 \leq f_n \nearrow f$:

$$\int_X f_n \, d\nu \nearrow \int_X f \, d\nu.$$

7. **Linearität:** Sind f, g integrierbar, so auch $f + g$ und

$$\int_X (f + g) \, d\nu = \int_X f \, d\nu + \int_X g \, d\nu.$$

8. **Fatou's Lemma:** Für $f_n \geq 0$,

$$\int_X \liminf_n f_n \, d\nu \leq \liminf_n \int_X f_n \, d\nu.$$

9. **Dominierte Konvergenz (DCT):** Konvergiert $f_n \rightarrow f$ punktweise und existiert $g \in L^1$ mit $|f_n| \leq g$, dann ist $f \in L^1$ und

$$\int_X f_n \, d\nu \rightarrow \int_X f \, d\nu.$$

10. **Fubini-Tonelli Theorem:** Seien (X_1, ν_1) und (X_2, ν_2) -finite. Für messbares $f : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:
Falls $\int |f| < \infty$ (Fubini):

$$\int_{X_1 \times X_2} f \, d(\nu_1 \times \nu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f \, d\nu_2 \right) d\nu_1 = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f \, d\nu_1 \right) d\nu_2.$$

Falls $f \geq 0$ (Tonelli):

$$\int |f| = \int \int |f|.$$

11. **Change of Variables:** Ist $T : X_1 \rightarrow X_2$ messbar und injektiv, dann ist $\nu \circ T^{-1}$ ein Maß und

$$\int_{T(A)} f \, d(\nu \circ T^{-1}) = \int_A f \circ T \, d\nu.$$

12. **Differentiation Under the Integral Sign:** Für $f : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{dx} \int_{\Omega} f(x, \omega) \, d\omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} f(x, \omega) \, d\omega$$

falls:

- $f(x, \omega)$ für alle x integrierbar ist,
- $\partial_x f$ existiert für a.a. ω ,
- $|\partial_x f(x, \omega)| \leq \theta(\omega)$ mit $\theta \in L^1$.

10.5 Die L^p -Räume

L^p -Norm

Für eine messbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir für $1 \leq p < \infty$:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

L^p -Räume sind Banachräume

Die Räume $L^p(X)$ sind vollständig (Banach). Für $p < \infty$ sind sie separabel.

L^2 ist ein Hilbertraum

Mit

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} dx$$

ist $L^2(X)$ ein separabler Hilbertraum.

Dichte der glatten Funktionen

Der Raum $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ der glatten Funktionen mit kompaktem Träger ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$ für $1 \leq p < \infty$.

11 Fourier

11.0.1 Orthogonale Systeme und trigonometrische Basis

Orthogonalität.

Ein System $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem Hilbertraum H heißt *orthogonal*, falls

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0 \quad \text{für } n \neq m.$$

Es heißt *orthonormal*, falls zusätzlich $\|\varphi_n\| = 1$ gilt.

Trigonometrisches System.

Auf $[-\pi, \pi]$ mit innerem Produkt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

bilden die Funktionen

$$1, \quad \cos(nx), \quad \sin(nx), \quad n \geq 1,$$

ein orthogonales System.

Genauso bildet:

$$e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{ikx \frac{2\pi}{T}} \quad k \in \mathbb{Z}$$

eine Hilberbasis von $L^2([0, T], \mathbb{C})$

11.0.2 Fourier-Koeffizienten

Für eine Funktion $f \in L^1([-\pi, \pi])$ definiert man:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \end{aligned}$$

11.0.3 Fourier-Serie

Die Fourier-Serie von f ist

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Und:

Die Fourier einer complex-valued P -periodeischen Funktion $s(x)$ im intervall $[0, T]$, kann geschrieben werden mit:

$$s(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi x \frac{n}{T}}$$

$$c_n = \frac{1}{P} \int_0^P s(x) e^{-i2\pi \frac{n}{T} x}$$

11.0.4 Punktweise Konvergenz der Fourier Reihe

Die Fourier-Reihe einer complex-valued Funktion $h(x)$, welche stetig auf dem Intervall $[0, T]$ ist und stetig diffbar auf $(0, T)$, konvergiert punktweise in $(0, T)$ zur Funktion h . Also:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle e_k, h \rangle e_k(x) = h(x) \quad \forall x \in (0, T)$$

11.0.5 Ableitung einer Fourierreihe

Sei $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ in C^2 auf dem Intervall und $f(0) = f(T)$, $f'(0) = f'(T)$, dann:

$$\frac{df}{dx}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle e_k, f \rangle \frac{de_k}{dx}(x)$$

11.1 Eigenschaften $\mathcal{F}$ - Reihe

Sei eine Funktion f gegeben, mit der Fourierreihe:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e_k(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{ikx \frac{2\pi}{T}}$$

Ausserdem sei: $\mathcal{F}(f)(n) = \hat{f}(n)$

- $F(af + bg) = aF(f) + bF(g)$
- $\|f\|^2 = \int_0^T dt |f(t)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2$
- $F(\partial_t u) = ikF(u)(k)$
- $\overline{\mathcal{F}(f)(k)} = \mathcal{F}(\bar{f})(-k)$
- $\mathcal{F}(f e^{ik_0 x \frac{2\pi}{T}}) = \mathcal{F}(f)(k - k_0)$

11.2 $-i\frac{d}{dx}$ Operator

11.3 Summen ueber Fourierfrequenzen

Wird ausgelassen, weil evtl. nicht relevant.

11.4 Schwarzraum

11.5 Der Schwarzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

11.5.1 Motivation und Einordnung

Der Schwarzraum dient als *idealer Definitionsbereich* für die Fouriertransformation. Er besteht aus glatten Funktionen, die zusammen mit allen ihren Ableitungen *schneller als jede Potenz* gegen Null gehen.

Er liegt streng zwischen:

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d) \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

11.5.2 Multiindex-Notation

Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ setzen wir:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}, \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

11.5.3 Definition des Schwarzraums

Schwarzraum] Der *Schwarzraum* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist die Menge aller Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, für die gilt:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d.$$

Interpretation.

Alle Ableitungen von f gehen schneller als jede Potenz von $|x|^{-1}$ gegen Null.

11.5.4 Seminormen und Topologie

[Schwarz-Seminormen] Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ definiert man:

$$p_{\alpha, \beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|.$$

Diese Familie von Seminormen macht $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ zu einem *lokalkonvexen topologischen Vektorraum*.

11.5.5 Zentrale Eigenschaften

Der Schwarzraum besitzt folgende Eigenschaften:

1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist ein Vektorraum.
2. Ableitungen wirken stabil:

$$f \in \mathcal{S} \Rightarrow \partial^\alpha f \in \mathcal{S}.$$

3. Multiplikation mit Polynomen ist stabil:

$$f \in \mathcal{S}, p \text{ Polynom} \Rightarrow pf \in \mathcal{S}.$$

4. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ für alle $1 \leq p \leq \infty$.

5. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$ für $1 \leq p < \infty$.

11.5.6 Typische Beispiele

Gaussfunktion.

$$f(x) = e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Polynom mal Gauss.

$$p(x)e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \forall \text{ Polynome } p.$$

Nicht enthalten.

$$\frac{1}{1+|x|} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad (\text{zu langsames Abklingen}).$$

11.5.7 Fouriertransformation auf dem Schwarzraum

Fouriertransformation Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ definieren wir:

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

Invarianz des Schwarzraums Die Fouriertransformation ist ein Bijektion:

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Vertauschungsrelationen.

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}f(\xi), \quad \mathcal{F}(x^\alpha f) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \mathcal{F}f.$$

11.5.8 Der Schwarzraum und Distributionen

Temperierte Distributionen

Der Dualraum

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) = \{\text{stetige lineare Funktionale auf } \mathcal{S}\}$$

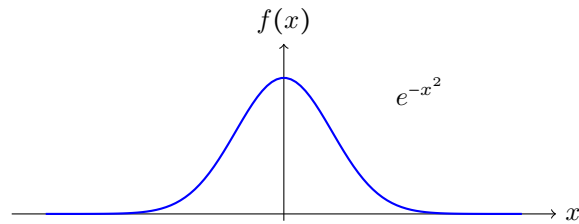
heißt der Raum der *temperierten Distributionen*.

Beispiele.

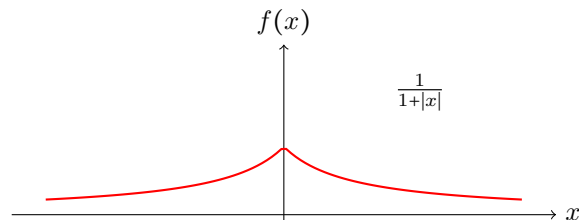
$$\delta, \quad \partial^\alpha \delta, \quad p(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

11.5.9 Illustrationen

Schnelles Abklingen (schematisch).



Vergleich: langsames Abklingen.



11.6 Fourier Transformation

11.7 Die Fourier-Transformation

11.7.1 Grundidee

Die Fourier-Transformation zerlegt eine Funktion in ihre *Frequenzanteile*. Sie ist das kontinuierliche Analogon zur Fourier-Reihe und arbeitet auf ganz $\mathbb{R}^d$ statt auf periodischen Intervallen.

Anschaulich:

$$\text{Ort } x \quad \longleftrightarrow \quad \text{Frequenz } \xi$$

11.7.2 Konvention und Definition

Konvention.

Wir verwenden die Konvention:

- Die Fourier-Transformation ist *ohne Vorfaktor*,
- der gesamte Normierungsfaktor liegt in der Inversen.

Fourier-Transformation

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ definieren wir:

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}f(k) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix \cdot k} dx^d.$$

Inverse Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} g(k) e^{ix \cdot k} dk^d.$$

11.7.3 Existenzbereich

Natürliche Definitionsbereiche.

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$: optimaler Raum
- $L^1(\mathbb{R}^d)$: punktweise definiert
- $L^2(\mathbb{R}^d)$: im Sinne von Plancherel
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$: Distributionen

11.7.4 Zentrale Eigenschaften

Linearität

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}f + b\mathcal{F}g.$$

Stetigkeit

Die Fourier-Transformation ist ein stetiger Operator

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Ableitungsregel

Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ gilt:

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(k) = (ik)^\alpha \mathcal{F}f(k).$$

Beispiel.

$$\mathcal{F}(\partial_x f(x)) = ik\mathcal{F}(f(x))$$

Multiplikation mit Polynom

$$\mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi) = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \mathcal{F}f(\xi).$$

Verschiebung

$$\mathcal{F}(f(x-a))(k) = e^{-ia \cdot k} \mathcal{F}f(k).$$

Beispiel. EX3

Eine Ortsverschiebung erzeugt eine Phasenmodulation im Frequenzraum.

Modulation

$$\mathcal{F}(e^{ia \cdot x} f(x))(k) = \mathcal{F}f(k-a).$$

Beispiel.

Eine Frequenzverschiebung entspricht einer Multiplikation im Ortsraum.

Skalierung

Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{\lambda^d} \mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

Beispiel.

Zusammendrücken im Ortsraum $\Rightarrow$ Streckung im Frequenzraum.

Faltungssatz

Für $f, g \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f * g) &= \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g. \\ \mathcal{F}(fg) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{F}f * \mathcal{F}g.\end{aligned}$$

Beispiel.

Differentialgleichungen werden zu algebraischen Gleichungen und Multiplikation im Frequenzraum wird zur Faltung im Ortsraum.

11.7.5 Inversion und Symmetrien

Inversionsformel Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = f.$$

Spiegelung

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x) = (2\pi)^d f(-x).$$

11.7.6 Fourier-Transformation auf L^2

Plancherel

Für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \|\mathcal{F}f\|_{L^2}^2.$$

Parseval

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle.$$

11.7.7 Klassische Beispielrechnungen

Gaussfunktion.

$$f(x) = e^{-|x|^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}f(\xi) = \pi^{d/2} e^{-|\xi|^2/4}.$$

Exponentialfunktion.

$$f(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}f(\xi) \sim \frac{1}{a^2 + \xi^2}.$$

Delta-Distribution.

$$\mathcal{F}\delta = 1, \quad \mathcal{F}1 = (2\pi)^d \delta.$$

12 Distributionen

12.1 Distributionen

12.1.1 Motivation

Viele mathematisch und physikalisch relevante Objekte sind keine Funktionen, z.B. die Dirac-Delta oder Ableitungen unstetiger Funktionen. Distributionen verallgemeinern den Funktionsbegriff so, dass Ableiten, Fouriertransformation und partielle Differentialgleichungen immer sinnvoll bleiben.

12.1.2 Testfunktionen

Testfunktionen

Der Raum der Testfunktionen ist

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \varphi \text{ kompakt}\}.$$

12.1.3 Definition von Distributionen

Eine *Distribution* ist ein stetiges lineares Funktional

$$T : C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Der Raum aller Distributionen wird mit

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

bezeichnet.

Wirkungsweise.

Man schreibt

$$\langle T, \varphi \rangle \quad \text{oder} \quad T(\varphi)$$

für die Wirkung von T auf die Testfunktion φ .

12.1.4 Distributionen als verallgemeinerte Funktionen

Reguläre Distributionen.

Jede lokal integrierbare Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ definiert eine Distribution durch

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx.$$

Damit gilt:

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d).$$

12.1.5 Wichtige Beispiele

Dirac-Distribution.

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Ableitungen der Delta-Distribution.

$$\langle \partial^\alpha \delta, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0).$$

Heaviside-Funktion.

Für

$$H(x) = \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$$

gilt distributionell:

$$H' = \delta.$$

12.1.6 Ableitung von Distributionen

Distributionelle Ableitung

Für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ und Multiindex α definiert man:

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Wichtig.

Distributionen sind *beliebig oft differenzierbar*.

12.1.7 Multiplikation mit glatten Funktionen

Sei $T \in \mathcal{D}'$ und $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dann ist

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle$$

wohldefiniert.

Achtung.

Die Multiplikation zweier Distributionen ist im Allgemeinen *nicht* definiert.

12.1.8 Träger einer Distribution

Träger

Der Träger einer Distribution T ist das Komplement der größten offenen Menge, auf der T verschwindet:

$$T = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup \{U \text{ offen} \mid \langle T, \varphi \rangle = 0 \ \forall \varphi \in C_c^\infty(U)\}.$$

Beispiel.

$$\delta = \{0\}.$$

12.2 Temperierte Distributionen

12.2.1 Schwarzraum als Testfunktionenraum

Der Schwarzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ besteht aus allen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta.$$

12.2.2 Definition temperierter Distributionen

Temperierte Distributionen

Der Dualraum des Schwarzraums

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) = (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))'$$

heißt der Raum der *temperierten Distributionen*.

Einbettungen.

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d).$$

12.2.3 Beispiele temperierter Distributionen

- Polynome
- Dirac-Distribution und ihre Ableitungen
- Funktionen mit polynomielltem Wachstum

12.2.4 Fourier-Transformation auf Distributionen

Fourier-Transformation

Für $T \in \mathcal{S}'$ definiert man:

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle.$$

Wichtig.

Die Fourier-Transformation ist ein Isomorphismus:

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'.$$

12.2.5 Rechenregeln

Ableitung.

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}T.$$

Multiplikation mit Polynom.

$$\mathcal{F}(x^\alpha T) = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \mathcal{F}T.$$

Verschiebung.

$$\mathcal{F}(T(x-a)) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}T.$$

Delta-Distribution.

$$\mathcal{F}\delta = 1, \quad \mathcal{F}1 = (2\pi)^d \delta.$$

12.3 wichtige Dinge:

- $\int_{\mathbb{R}} e^{ikx} dx = 2\pi \delta(k)$

13 Fundament(aal)loesung

13.0.1 Definition

[Fundamentallösung

Sei L ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Eine Distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ heißt *Fundamentallösung von L* , falls

$$LE = \delta$$

im distributionellen Sinn gilt.

13.0.2 Bedeutung

Die Fundamentallösung ist die Antwort des Systems auf eine punktförmige Quelle. Ist eine Fundamentallösung bekannt, lassen sich Lösungen von

$$Lu = f$$

für geeignete rechte Seiten f mittels Faltung konstruieren.

13.0.3 Lösung mittels Faltung

Lösung durch Faltung

Sei E eine Fundamentallösung von L und f eine geeignete Funktion oder Distribution. Dann ist

$$u = E \star f$$

eine (distributionelle) Lösung von

$$Lu = f.$$

13.0.4 Fourier-Transformation und Fundamentallösungen

Zentrale Strategie.

Ist L ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, so gilt im Frequenzraum:

$$\mathcal{F}(Lu)(\xi) = P(\xi) \mathcal{F}u(\xi),$$

wobei $P(\xi)$ das Symbol von L ist.

Die Gleichung

$$LE = \delta$$

wird nach Fourier-Transformation zu:

$$P(\xi) \widehat{E}(\xi) = 1.$$

Formale Lösung.

$$\widehat{E}(\xi) = \frac{1}{P(\xi)}.$$

Die Fundamentallösung erhält man durch inverse Fourier-Transformation.

13.0.5 Beispiele

1. Laplace-Operator

$$\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2$$

Symbol:

$$P(\xi) = -|\xi|^2.$$

Fundamentallösung E von Δ erfüllt:

$$\Delta E = \delta.$$

- Für $d \geq 3$:

$$E(x) = c_d |x|^{2-d}.$$

- Für $d = 2$:

$$E(x) = c \log |x|.$$

2. Helmholtz-Operator

$$L = -\Delta + k^2$$

Symbol:

$$P(\xi) = |\xi|^2 + k^2.$$

Im Frequenzraum:

$$\widehat{E}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2 + k^2}.$$

3. Wärmeleitung (Heat Operator)

$$L = \partial_t - \Delta_x$$

Fundamentallösung:

$$E(t, x) = \begin{cases} (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

13.0.6 Eigenschaften von Fundamentallösungen

- Fundamentallösungen sind i.A. Distributionen, keine klassischen Funktionen.
- Sie sind nicht eindeutig (Addition homogener Lösungen möglich).
- Sie sind translationsinvariant:

$$E(x - y) \Rightarrow LE = \delta_y.$$

- Singularität liegt im Ursprung.

13.0.7 Zusammenhang mit Green-Funktionen

Green-Funktion.

Auf beschränkten Gebieten mit Randbedingungen ersetzt die Green-Funktion die Fundamentallösung:

$$LG(x, y) = \delta_y(x) \quad \text{mit Randbedingungen.}$$

14 Differentialgleichungen

14.1 Wichtige Dinge:

- $\mathcal{F}(\delta) = 1$
- $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{ik+a}\right) = H(x)$ Heaviside Distribution