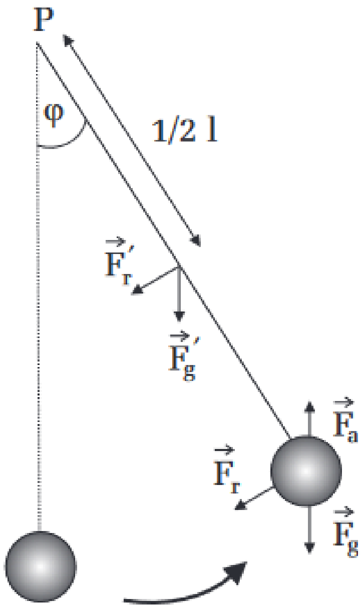
Versuch 14 - Mathematisches Pendel

PAP 1, [2] [1]

05.09.2024



Teilnehmender Student: **Jonathan Rodemers**

Gruppe des Teilnehmenden: 1

Kurs: Nachmittags

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1 Motivation

Die Untersuchung des mathematischen Pendels ist ein klassisches Experiment, das eine gute Einführung in die grundlegenden Prinzipien der Mechanik bietet. Indem man das Verhalten eines einfachen Pendels untersucht, kann man wesentliche Eigenschaften wie das Verhältnis zwischen der Länge des Pendels und seiner Schwingungsdauer ableiten. Darüber hinaus bietet dieses Experiment eine praktische Methode zur Messung der lokalen Gravitationsbeschleunigung, g. Das Experiment dient auch dazu wichtige Aspekte wie Reibung, Dämpfung und Luftwiderstand miteinzubeziehen, die ein tieferes Verständnis der Abweichungen der realen Welt von idealisierten theoretischen Modellen ermöglichen.

1.2 Messverfahren

Das Hauptziel dieses Experiments ist die Messung der Periodendauer T_0 der Schwingung eines einfachen Pendels mit großer Genauigkeit und daraus die lokale Gravitationsbeschleunigung g zu bestimmen. Das Pendel besteht aus einer Masse (angenähert als Punktmasse), die an einem festen Punkt an einer Schnur der Länge l befestigt ist. Die Masse wird aus ihrer Gleichgewichtslage verschoben und losgelassen, so dass sie hin und her schwingt.

Der Versuch besteht aus drei Hauptschritten:

1. Messung der Länge l des Pendels.
2. Messen der Zeit für eine bestimmte Anzahl von Schwingungen, um einen Durchschnittswert für die Periodendauer T_0 zu erhalten.
3. Erneute Betrachtung unter der Korrektur der Faktoren, wie Luftwiderstand, Dämpfung und Abweichungen aufgrund von Schwingungen mit großer Amplitude und daraus wieder g zu ermitteln

1.3 Grundlagen aus der Physik

Für das mathematische Pendel gelten mehrere wichtige physikalische Prinzipien, darunter die Newtonsche Mechanik und die Gesetze der harmonischen Bewegung. Um die notwendigen Beziehungen zu verstehen und abzuleiten, beginnen wir mit der Bewegungsgelichung für das Pendel.

1.3.1 Bewegungsgleichung

Für kleine Winkelverschiebungen kann das Pendel als einfacher harmonischer Oszillator behandelt werden. Die Bewegungsgleichung ist gegeben durch:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{1.1}$$

Wobei:

- θ der Winkel des Pendels aus der Vertikalen ist
- g die Gravitationsbeschleunigung ist

- l die Länge des Pendels ist

Diese Gleichung geht von der Näherung $\sin(\theta) \approx \theta$ aus, welche für kleine Winkel gilt. Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt eine periodische Bewegung mit einer Periode:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1.2}$$

Dies ist die ideale Periode eines einfachen Pendels ohne Dämpfung und andere Korrekturen. Durch Messung von T_0 und l, können wir g ausrechnen:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T_0^2} \tag{1.3}$$

1.3.2 Korrektur der Kleinwinkelnäherung

Für größere Amplituden gilt die Näherung $\sin(\theta) = \theta$ gilt nicht mehr, und die Periode hängt von der Amplitude der Schwingung ab θ_0. Die Periode für größere Winkel ist gegeben durch:

$$T_1 = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) \tag{1.4}$$

Diese Formel berücksichtigt den Anstieg der Periode aufgrund des nichtlinearen Verhaltens des Pendels bei größeren Winkeln.

1.3.3 Korrektur der Dämpfung

Die Dämpfung, vor allem durch den Luftwiderstand, bewirkt, dass die Amplitude der Schwingung mit der Zeit abnimmt. Dies kann durch ein exponentielles Abklingen der Amplitude modelliert werden:

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t} \tag{1.5}$$

Hier ist δ der Dämpfungskoeffizient. Das Vorhandensein von Dämpfung wirkt sich auf die Schwingungsdauer aus und führt zu einem leichten Anstieg der Dauer im Laufe der Zeit. Die korrigierte Periode unter Berücksichtigung der Dämpfung ist gegeben durch:

$$T_2 = T_1 \left(1 + \frac{\delta^2}{\omega_0^2}\right) \tag{1.6}$$

Wobei:

- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, die Winkelfrequenz des Pendels ist.
- δ der Dämpfungsfaktor ist

1.3.4 Mit Trägheitsmoment und realen Pendel

In Wirklichkeit ist das Pendel keine einfache Punktmasse, sondern besteht aus einer Massenverteilung (dem Pendelkörper und der Schnur). Damit brauchen wir das Konzept des Trägheitsmoments J, das in die Berechnung der Periode einbezogen werden muss. Die Periode eines physikalischen Pendels (mit verteilter Masse) hängt mit dem Trägheitsmoment J und des Richtmoments D zusammen:

$$T_D = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \tag{1.7}$$

Für ein Kugelpendel gilt:

$$J = m_K l^2 + \frac{2}{5} m_K r^2 + m_F l'^2 \tag{1.8}$$

Wobei:

- m_K ist die Masse der Kugel
- l ist die Länge des Pendels
- r ist der Radius der Kugel
- m_F ist die Masse des Fadens
- l' ist die Länge des Fadens

Für das Richtmoment D gilt:

$$D = m_K g l \left[1 - \left(\frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{m_F}{2m_K}\right)\right] \tag{1.9}$$

Betrachtet man alle Korrekturen, so erhält man die Gleichung:

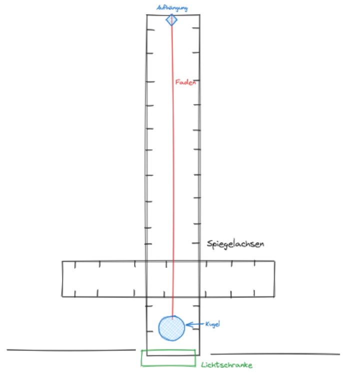
$$T_g = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1 + \frac{2r^2}{5l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{m_F}{6m_K} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} + \frac{\theta_0^2}{8}\right)} \tag{1.10}$$

Den Dämpfungsfaktor kann man über die Amplitudenabnahme und der Formel berechen:

$$a(t) = a_0 e^{-\delta t} \tag{1.11}$$

2. Durchführung

2.1 Versuchsaufbau



2.2 Messprotokol

Jonathan Rodemers
Theodora

05. 09. 24
13:30 Uhr – 16:30 Uhr

Messprotokoll Mathematisches Pendel

Gerätschaften:

- → mathematisches Pendel mit 2 Spiegelachsen
- → Stoppuhr
- → Messschieber

Messungen

Fadenlänge:

Pendellänge:

Durchmesser d. Kugel: 35,1 mm

Masse der Kugel:

Masse d. Faden:

Ungenauigkeit Stoppuhr: ± 0,2 s

Ungenauigkeit Messschieber: ± 0,1 mm

Ungenauigkeit Skala ± 0,2 cm

Tabelle 1:

Justierung	unterkante Kugel [cm]	oberkante Kugel [cm]	Aufhängung [cm]	Pendellänge [cm]
1	0,7	4,2	98	95,55
	0,9	4,4	98	95,55
2	0,3	3,8	97,5	95,45
	0,4	3,9	97,5	95,35
3	1,2	4,7	98,5	95,55
	1,4	4,9	98,5	95,35

$\bar{L} = 95{,}43\,\mathrm{cm}$ $\quad \Delta L = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{L}}}{\sqrt{6}}\right)^2 + (0{,}2\,\mathrm{cm})^2} = 0{,}20\,\mathrm{cm}$

$$\sigma_{\bar{L}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} (\bar{L} - L_i)^2}{6 \cdot 5}} = 0{,}04\,\mathrm{cm}$$

Tabelle 2: Messung von $n = 20$ Schwingungen.

Nummer	t [s]	T_0 [s]	$\bar{T}_0$ [s]	$\sigma_{\bar{T}_0}$
1	39,39	1,97	1,97	0,01
2	39,30	1,97		
3	39,24	1,96		
4	39,15	1,98		
5	39,00	1,95		

$\Delta t = 0{,}20$

$$\Delta T_0 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{T_0}}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{n}\right)^2} = 0{,}01$$

$$n = \frac{2\,\Delta 6\,L}{0{,}3\,T_0\,\Delta L} \approx 323$$

Dauer für n Schwingungen $t_1 = (651 \pm 0{,}2)\,s$

$T_1 = \frac{t_1}{n} = (1{,}972 \pm 0{,}001)\,s$

Nullpunkt bei: 12,4 ± 0,2 cm

Periodenzahl	Amplitude [cm]	Differenz (12,4 − Amplitude) [cm]
0	2,0	10,4
30	3,5	8,9
60	4,1	8,3
90	5,1	7,3
120	6,0	6,4
150	6,8	5,6
180	7,6	4,8
210	8,2	4,2
240	9,0	3,4
270	9,4	3,0
300	9,8	2,6
330	10,2	2,2
±3	±0,2	

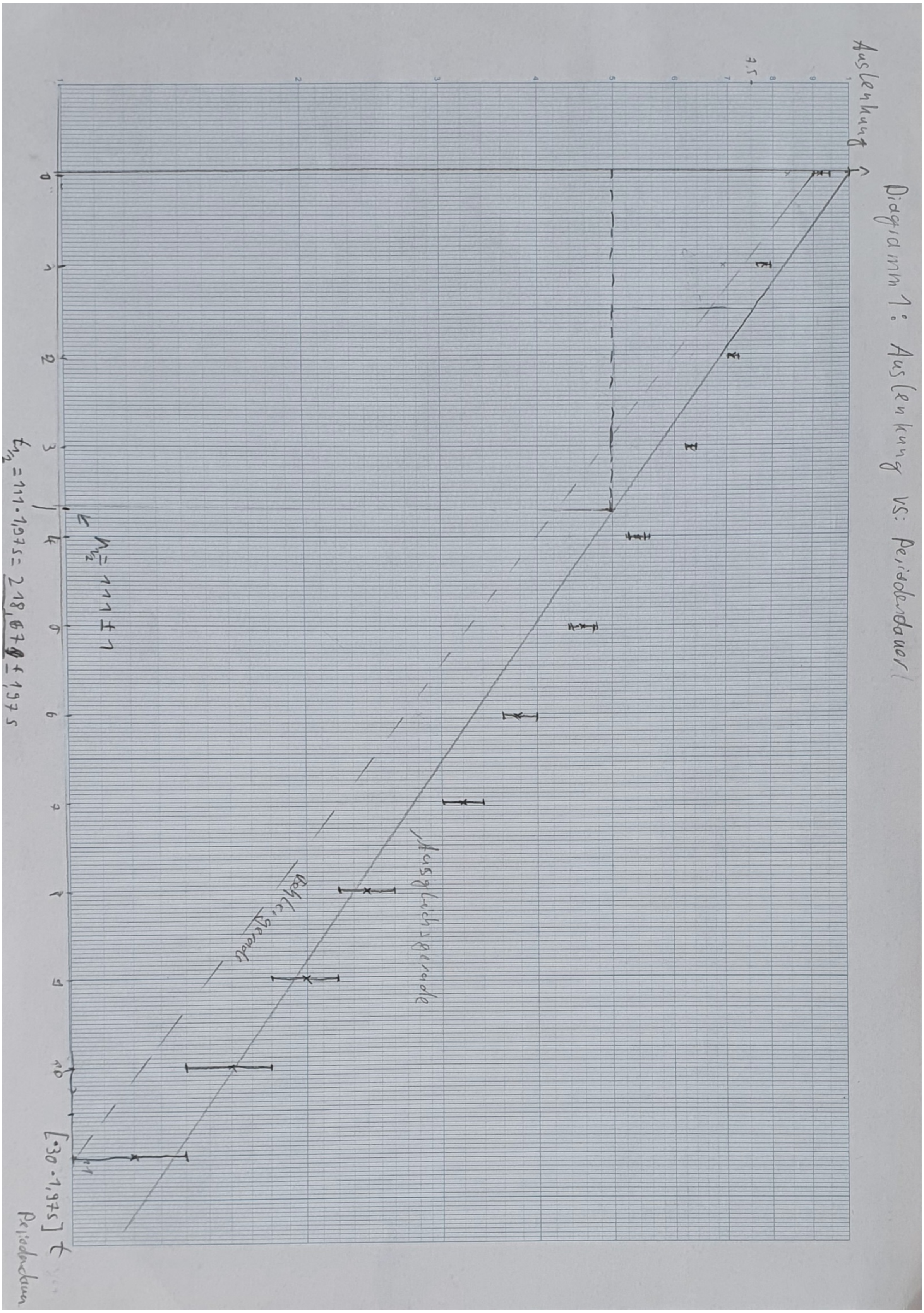


Diagramm 1: Auslenkung vs. Periodendauer
Auslenkung
Ausgleichsgerade
Fehlergerade
Periodendauer

3. Auswertung

3.1 Berechnen von g mittels Periodendauer

Nutzen wir die Formel 1.3 könne wir g mittels der Länge des Pedels und der Periodendauer errechnen. Dabei ist die Länge des Pendels:

$$L = (95,43 \pm 0,2)cm$$

und die Periodendauer:

$$T_0 = (1,97 \pm 0,01)s$$

Daraus folgt der Wert für g:

$$g_1 = (9,708 \pm 0,1)\frac{m}{s^2}$$

Dabei wurde der Fehler mit folgender Formel bestimmt:

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \Delta l\right)^2 + \left(\frac{-8\pi^2 l}{T_0^3} \cdot \Delta T_0\right)^2} \tag{3.1}$$

3.1.1 Dämpfungsfaktor δ bestimmen

Den Dämpfungsfaktor δ können wir wie in Versuch 13 über die Halbwertszeit bestimmen, es gilt:

$$\delta = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} \tag{3.2}$$

Wobei $t_{1/2}$ die Zeit ist, die das Pendel benötigt, um seine Amplitude zu halbieren. Diesen Wert können wir aus dem Diagram 1 ablesen.

$$t_{1/2} = (219 \pm 3)s$$

Damit errechnen wir den Dämpfungsfaktor von dem Pendel:

$$\delta = (3,17 \pm 0,04) \cdot 10^{-3}\frac{1}{s}$$

Dabei Betrachen wir den Fehler von T_0 und von $n_{1/2}$ und erhalten mit der Formel 3.2 folgende Fehlerrechnung:

$$\Delta\delta = \frac{ln(2)}{t_{1/2^2}} \cdot \Delta t_{1/2} \tag{3.3}$$

3.1.2 Einfluss der Dämpfung auf die Schwingungsdauer

Aus der Formel 1.10 können wir ablesen, dass es nur einen Summanten, nennen wir ihn ξ,

$$\xi = \frac{\delta^2}{w_0^2}$$

gibt, der von δ abhängt. Rechnen wir diesen Quotienten aus mithilfe von:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{3.4}$$

erhalten wir einen Wert für ξ von:

$$\xi = (0,0003 \pm 0,000004)\frac{1}{s^2}$$

Und weils Spass macht, können wir hier den Fehler mit folgender Formel ausrechnen:

$$\Delta\xi = \sqrt{\left(2\delta \cdot \frac{T_0^2}{4\pi^2} \cdot \Delta\delta\right)^2 + \left(2T_0 \cdot \frac{\delta^2}{4\pi^2} \cdot \Delta T_0\right)^2} \tag{3.5}$$

Man erkennt also dass er Einfluss durch die Dämpfung sehr gering ist.

3.2 Berechnung von g mit Korrekturtermen

3.2.1 Formel und Fehler

Dies gelingt mit der Formel:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T_0^2}\left(1 + \frac{2r^2}{5l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{m_F}{6m_K} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} + \frac{\varphi_0^2}{8}\right) \tag{3.6}$$

Dabei ist g von mehreren Variablen abhängig. Allerdings sind die Dichten nicht mit einem Fehler angegeben, weswegen sich die Fehlerrechnung auf folgendes beschränkt:

$$\begin{aligned}\Delta g^2 = &\left(\left(\frac{4\pi^2}{T_0^2}\left(1 + \frac{2r^2}{5l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{m_F}{6m_K} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} + \frac{\varphi_0^2}{8}\right) - \frac{16\pi^2 r^2}{5l^2 T_0^2}\right) \cdot \Delta l\right)^2 \\ &+ \left(\frac{-8\pi^2 l}{T_0^3}\left(1 + \frac{2r^2}{5l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{m_F}{6m_K} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} + \frac{\varphi_0^2}{8}\right) \cdot \Delta T_0\right)^2 \\ &+ \left(\frac{16\pi^2 lr}{5T_0^2 l^2} \cdot \Delta r\right)^2 + \left(\frac{-4\pi^2 l}{6T_0^2 m_K} \cdot \Delta m_F\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2 l m_F}{6T_0^2 m_K^2} \cdot \Delta m_K\right)^2 \\ &+ \left(\frac{8\pi l\delta}{T_0^2\omega_0^2} \cdot \Delta\delta\right)^2 + \left(\frac{-8\pi^2 l\delta^2}{T_0^2\omega_0^3}\right)^2 + \left(\frac{\pi^2 l\varphi_0}{T_0^2} \cdot \Delta\varphi_0\right)^2\end{aligned} \tag{3.7}$$

Um g nun errechnen zu können brauchen wir noch weitere Werte:

3.2.2 Berechnung der Masse der Kugel

Die Masse der Kugel lässt sich wie folgt bestimmen:

$$m_K = V_K \cdot \rho_K \tag{3.8}$$

dabei muss man den Fehler bei der Messung des Radius der Kugel beachten, es ergibt sich:

$$\Delta m_K = 4r^2\pi\rho_K \cdot \Delta r \tag{3.9}$$

Aus den gemessenen Werten und dem Literaturwert für die Dichte von Eisen folgt eine Masse von

$$m_K = (178,0 \pm 0,5)kg$$

3.2.3 Berechnung der Masse des Fadens

Hier gilt ebenfalls:

$$m_F = V_F \cdot \rho_K \tag{3.10}$$

Dabei ist ρ_K zu nutzen, da der Faden ebenfalls aus Eisen besteht.

Mit der Formel für das Zylindervolumen (der Faden wird als Zylinder genähert) folgt auch die Formel für den Fehler:

$$\Delta m_F = r^2 \pi \rho_K \cdot \Delta h \tag{3.11}$$

Hierbei wurde auf eine Fehlerfortpflanzung im Zusammenhang mit der Pendellänge und dem Kugelradius verzichtet, da der Wert für den Massefaden ohnehin sehr gering ausfällt und im Vergleich wenig Einfluss hat.

Somit erlangen wir einen Wert von:

$$m_F = (0,2348 \pm 0,0005)g$$

3.2.4 Berechnung von φ_0

Der Winkel φ berechnet sich aus der mittleren Schwingungsweite und der Pendellänge.

Es gilt:

$$\tan(\varphi_0) = \frac{\overline{A}}{l} \tag{3.12}$$

Wobei $\overline{A}$ die mitlere Amplitude und l die Pendellänge ist.

Dabei gilt es den Fehler $\Delta\overline{A}$ und Δl mittels folgender Formel zu berücksichtigen:

$$\Delta\varphi_0 = \sqrt{\left(\frac{l}{\overline{A^2} + l^2} \cdot \Delta\overline{A}\right)^2 + \left(\frac{\overline{A}}{\overline{A}^2 + l^2} \cdot \Delta l\right)^2} \tag{3.13}$$

Mithilfe dieser Formeln ergibt sich:

$$\varphi_0 = (0,059 \pm 0,008)rad$$

Nun können wir g ermitteln.

3.3 Berechnung von g

Mittels Formel 3.6 bestimmen wir g.

$$g_2 = (9,86 \pm 0,03)\frac{m}{s^2}$$

4. Zusamenfassung und Diskussion

In diesem Experiment wurde die Erdbeschleunigung g berechnet. Dabei wurde die Berechnung von g einmal so durchgeführt, das man den Idealfall, also keine Reibung/Widerstände etc., annimmt und einmal mit Korrekturfakrtoren, mitdenen wir einer theoretische Beschreibung der Wirklichkeit näher kommen. Dabei wurde der Wert für $g_1 = (9,708 \pm 0,1)\frac{m}{s^2}$ für die Annahme des Idealfalls berechent und ein $g_2 = (9,86 \pm 0,03)\frac{m}{s^2}$ für den Fall des realen Pendels.

Bei einem Vergleich mit dem Heidelbergerstandartwert $g_{standart} = (9,80984 \pm 2 \cdot 10^{-5})\frac{m}{s^2}$ stimmen die Ergebnisse des Experiments mit den erwarteten Ergebnissen innerhalb des Signifikanzbereichs überein. Es gilt:

$$\text{Abweichung}_{\text{standart zu } g_1} = 1,01\sigma$$

und

$$\text{Abweichung}_{\text{standart zu } g_2} = 1,67\sigma$$

In der Regel sollte die Abweichung zu g_2 geringer sein, allerdings sind die Fehler bei der ersten Methode deutlich höher, und der σ-Wert hängt eben von diesen Fehlern ab. Da wir also bei der ersten Messung einen, im Vergleich zu g_2, deutlich größeren Fehler haben, ist der Z-Wert (σ-Wert) hier geringer, obwohl die Methode selbst ungenauer ist.

Obwohl das Experiment erfolgreich war, um g zu bestimmen, gab es einige Einschränkungen, die die Genauigkeit der Messungen beeinträchtigt haben. Zu den möglichen Fehlerquellen gehören v.a. die Ablesegenauigkeit der Spiegelskalen. Diese kam bei der Bestimmung von der Pendel und Fadenlänge, als auch bei der Abnahme der Amplitude zu tragen. Außerdem wurden auch bei der Rechnung mit Korrekturtermen Näherungen verwendet, wie z.B. den Faden als perfekten Zylinder zu nähern.

Verbesserungen sind zum Beispiel möglich durch Bereitstellung einer Wasserwage, sodass man die Spiegelskala besser im Lot ablesen kann. Als auch eine Apperatur, um die vertikale Auslenkung besser bestimmen zu können. Eine genauere Bestimmung der Fadenmasse ist unsinnig, da andere Messfehler weiterhin überwiegen. Diese Änderungen würden wahrscheinlich zu präziseren und zuverlässigeren Ergebnissen in zukünftigen Wiederholungen dieses Experiments führen.

Quellen- und Literaturverzeichnis

[1] Captain Joni: *pap1-tex-vorlage*. https://github.com/captain-joni/pap1-tex-vorlage. – [Online; Stand 28.08.2024]

[2] Dr. J.Wagner: *Physikalisches Praktikum 1 f¨ur Studierende der Physik B.Sc.* https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Corona/PAP1.pdf. – [Online; Stand 01/2014]