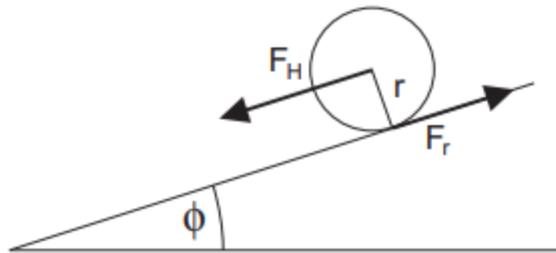


Versuch 15 - Schiefe Ebene

PAP 1, [2] [1]

06.09.2024



Teilnehmender Student: **Jonathan Rodemers**

Gruppe des Teilnehmenden: 1

Kurs: Nachmittags

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Messverfahren	1
1.3	Grundlagen aus der Physik	1
2	Durchführung	3
2.1	Messprotokoll	3
3	Auswertung	8
3.1	Beschleunigung der Rollzylinder	8
3.1.1	Trägheitsmoment des Vollzylinders	8
3.1.2	Trägheitsmoment des Hohlzylinder	8
3.1.3	Berechnung der Beschleunigungen	8
3.2	Auswerten der gemessenen Beschleunigung	9
3.3	Kinetische Energie	9
3.3.1	Bestimmung von E_{trans}	9
3.3.2	Bestimmung von E_{rot}	10
3.4	Potentielle Energie	10
3.5	Vergleich der Energien	11
4	Zusammenfassung und Diskussion	12
	Quellen- und Literaturverzeichnis	14

1. Einleitung

1.1 Motivation

Die Untersuchung der Bewegung auf einer schiefen Ebene bietet grundlegende Einblicke in die Prinzipien der klassischen Mechanik, insbesondere in Bezug auf Dynamik, Rotationsbewegung und Energieerhaltung. In diesem Experiment soll untersucht werden, wie sich massive und hohle Zylinder verhalten, wenn sie eine schiefe Ebene hinunterrollen. Das Experiment ermöglicht desweiteren die Untersuchung von Rotationsträgheit, Reibungskräften und der Erhaltung der mechanischen Energie.

1.2 Messverfahren

Das Experiment wird mit Hilfe einer verstellbaren schiefen Ebene durchgeführt, auf die Zylinder aus der Ruhelage gelöst werden und unter dem Einfluss der Schwerkraft nach unten rollen. Die Apparatur ist mit Lichtschranken ausgestattet, die in bestimmten Abständen entlang der Ebene angebracht sind und eine genaue Zeitmessung der Bewegung der Objekte ermöglichen. Die Beschleunigung der Objekte wird durch die Messung der Zeit bestimmt, die sie benötigen, um die Lichtschranken zu durchqueren. Außerdem werden die potentielle und kinetische Energie der rollenden Körper untersucht, wobei die Masse und die Höhe, aus der die Objekte freigesetzt werden, bekannt sind. Das Experiment besteht aus mehreren Schritten: Kalibrierung des Ebenenwinkels, Messung der Abstände, Aufzeichnung der Zeitintervalle und Berechnung der resultierenden Beschleunigungen.

1.3 Grundlagen aus der Physik

Zu den physikalischen Prinzipien, die diesem Experiment zugrunde liegen, gehören die Newtonschen Bewegungsgesetze, die Rotationsdynamik und die Energieerhaltung. Die Gleichung für die Translationsbewegung eines Objekts, das eine Schräge hinunterrollt, kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$a_s = \frac{g \sin(\varphi)}{1 + \frac{J}{mr^2}} \quad (1.1)$$

Dabei ist:

- a_s die Beschleunigung des Schwerpunkts
- g , die Erdbeschleunigung
- φ der Winkel der Ebene
- J das Trägheitsmoment
- m die Masse des Objektes
- r der Radius des Objektes

Bei einem rollenden Objekt hängt das Trägheitsmoment von seiner Geometrie ab. Für einen massiven Zylinder beträgt das Trägheitsmoment um seine Symmetrieachse:

$$J_v = \frac{1}{2} m_v R_v^2 \quad (1.2)$$

Für einen Hohlzylinder gilt:

$$J_h = \frac{m_h(R_a^4 - R_i^4)}{2(R_a^2 - R_i^2)} \quad (1.3)$$

Dabei ist R_a der Außerradius und R_i der Innenradius des Hohlzylinders.

Zusätzlich zur kinetischen Translationsenergie $\frac{1}{2}mv^2$ besitzen Rollende Objekte eine kinetische Rotationsenergie $\frac{1}{2}J\omega^2$, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit ist. Die gesamte mechanische Energie in jedem Punkt der Bewegung bleibt erhalten, es ergibt sich:

$$E_{total} = mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \quad (1.4)$$

Diese Formeln ermöglichen die Berechnung der theoretischen Beschleunigung und Energiebilanz.

2. Durchführung

2.1 Messprotokoll

Messprotokoll

06.03.2024

Jonathon Rodemers, Theodora Lazarevic

13:00 Uhr - 16:00 Uhr

Versuch 15 - Schiefe Ebene

Abbildung 1: Versuchsaufbau 1

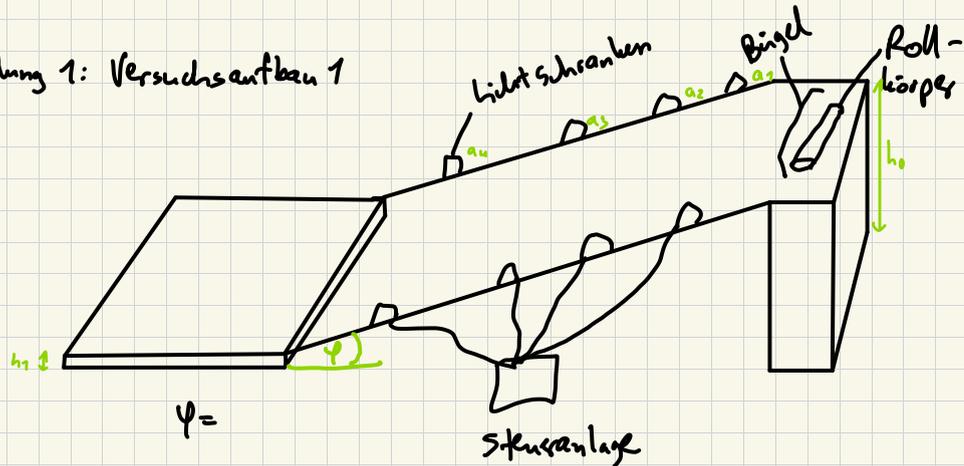
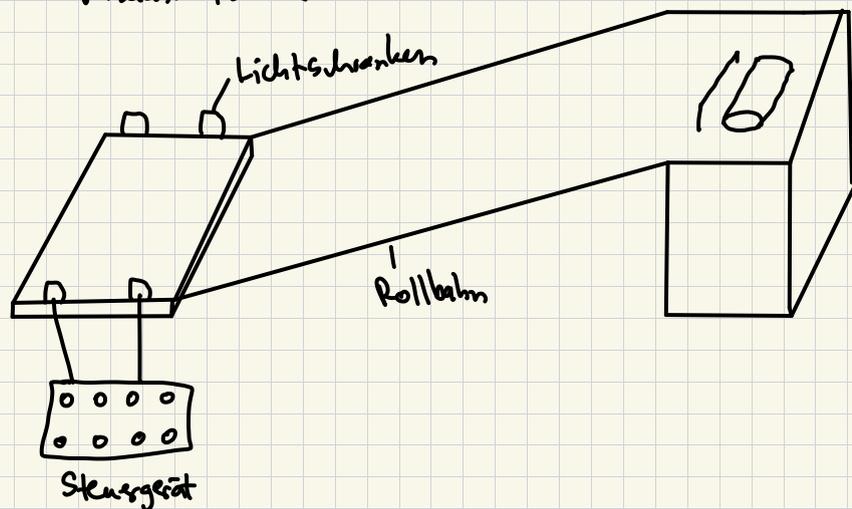


Abbildung 2: Versuchsaufbau 2



Geräte: höhenverstellbare Rollbahn, Lichtschranke mit Steuergesät,
Wasserwaage, Lineal, Rollkörper (Vollzylinder, Hohlzylinder,
verbundzylinder) Schiebelehre, Waage

Tabelle 1: Vermessung d. Rollkörper

Körper	l (cm)	d (cm)	r (cm)	m (g)
Vollzylinder	8,01	5,00	2,500	444,00
Hohlzylinder	8,05	5,00	2,500	442,93
Verbundzylinder	8,08	5,02	2,510	444,05
	$\pm 0,01$	$\pm 0,01$	$\pm 0,005$	$\pm 0,01$

Innendurchmesser Hohlzylinder: $d_i = (4,45 \pm 0,01) \text{ cm}$

Innenradius Hohlzylinder: $r_i = (2,225 \pm 0,005) \text{ cm}$

Abstände ab dem Halbkügel mit jeweils $\pm 1 \text{ mm}$

$$a_1 = (30) \text{ mm}$$

$$a_3 = (445) \text{ mm}$$

$$a_2 = (250) \text{ mm}$$

$$a_4 = (770) \text{ mm}$$

Länge d. Rollbahn $l_R: (872 \pm 1) \text{ mm}$

Höhe bis zur Unterkante d. Rollbahn: $(95 \pm 1) \text{ mm}$

Neigungswinkel: $(6,44 \pm 0,20)^\circ$

2.1. Untersuchung d. Bewegungsarten versch. Körper

Qualitativ beobachtet man, dass der Hohlzyl. etwas langsamer als d. Vollzyl. ist und dieser wiederum langsamer als d. Verbundzyl. die Ebene herunterrollt.

2.2. Bestimmen d. Beschleunigung d. Rollkörper

Tabelle 2: Messung d. Rollzeiten für Voll- und Hohlzyl.

Körper	Position	t_1 [s]	t_2 [s]	t_3 [s]	t_4 [s]	t_5 [s]
Vollzylinder	a_1	0,496	0,496	0,501	0,509	0,505
	a_2	0,841	0,840	0,845	0,853	0,849
	a_3	1,131	1,130	1,137	1,148	1,139
	a_4	1,429	1,438	1,484	1,491	1,488
Hohlzylinder	a_1	0,566	0,567	0,568	0,567	0,567
	a_2	0,948	0,943	0,949	0,949	0,942
	a_3	1,270	1,265	1,271	1,272	1,264
	a_4	1,659	1,653	1,659	1,661	1,653
		$\pm 0,001$				

2.3 Untersuchungen zum Energieerhaltungssatz:

Tabelle 3: Messung d. Rollzeiten von Voll- & Hohlzyl.

auf der Horizontalen

Körper	Position	t_1 [s]	t_2 [s]	t_3 [s]	t_4 [s]	t_5 [s]
Vollzylinder	a_1	1,875	1,869	1,872	1,894	1,887
	a_2	2,069	2,063	2,066	2,093	2,075
Hohlzylinder	a_1	1,689	1,704	1,679	1,682	1,688
	a_2	1,860	1,875	1,849	1,853	1,859
		$\pm 0,001$				

Abstand zwischen Lichtschranken a_1 und a_2 : (200 ± 1) mm

Ergänzung zu Tabelle 2:

Vollzylinder

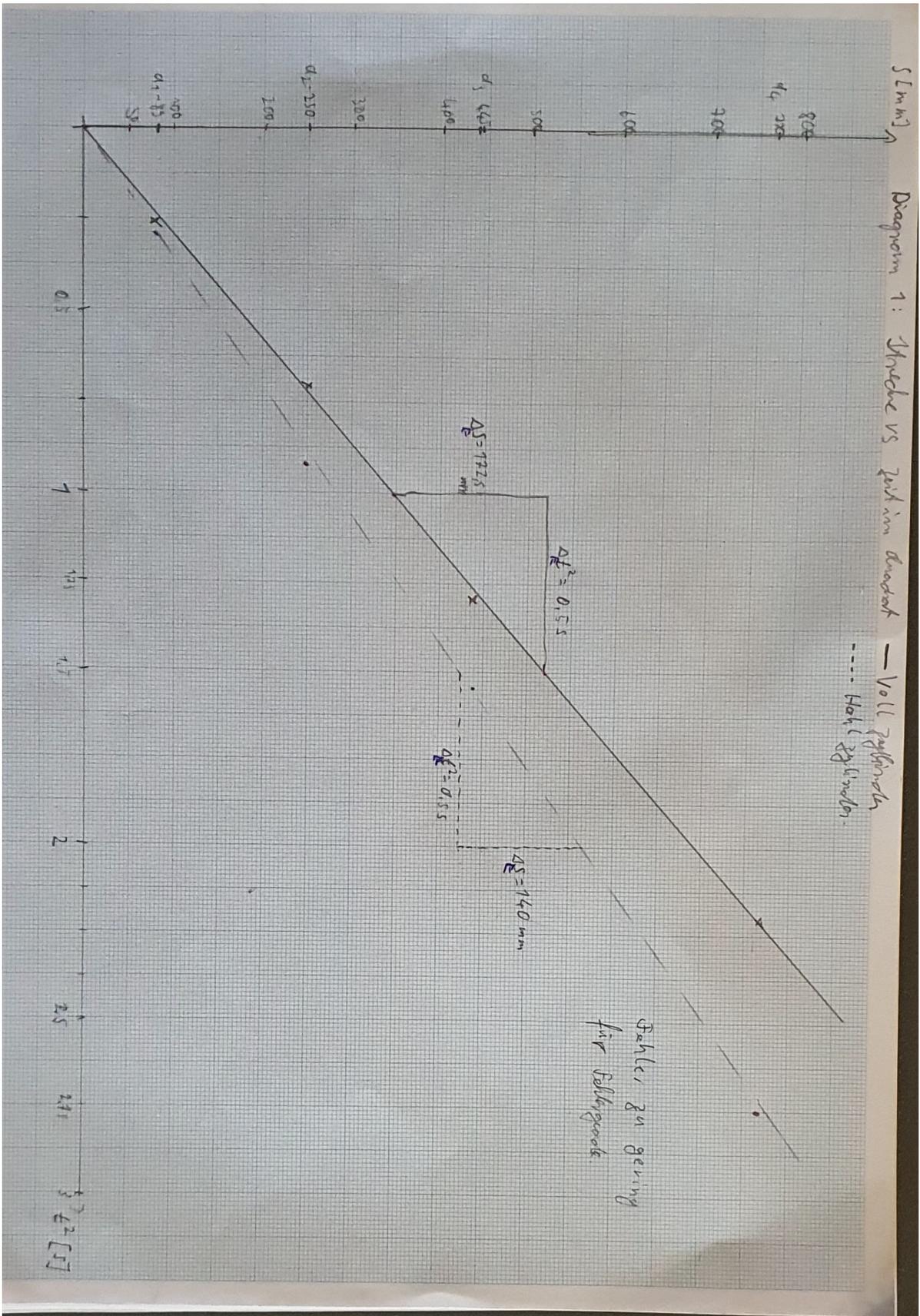
Position	\bar{t} [s]	$\Delta \bar{t}$ [s]	\bar{t}^2 [s ²]	$\Delta \bar{t}^2$ [s ²]
a ₁	0,501	0,002	0,251	0,002
a ₂	0,846	0,002	0,715	0,003
a ₃	1,136	0,002	1,291	0,005
a ₄	1,484	0,002	2,201	0,006

$$\Delta \bar{t} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (\bar{t} - t_i)^2}{5 \cdot 4} + 0,001^2}$$

Hohlzylinder

Position	\bar{t} [s]	$\Delta \bar{t}$ [s]	\bar{t}^2 [s ²]	$\Delta \bar{t}^2$ [s ²]
a ₁	0,565	0,002	0,319	0,002
a ₂	0,946	0,002	0,895	0,004
a ₃	1,268	0,002	1,609	0,005
a ₄	1,657	0,002	2,746	0,007

J. M. W. G. O.



3. Auswertung

3.1 Beschleunigung der Rollzylinder

Mithilfe der Formel 1.1 können wir die theoretische Beschleunigung der Schwerpunkts der Zylinder berechnen. Dazu benötigen wir das jeweilige Trägheitsmoment wie in Formel 1.2 und 1.3 beschrieben, als auch deren Radien und Massen.

3.1.1 Trägheitsmoment des Vollzylinders

Mithilfe der Formel 1.2 und einer Fehlerrechnung nach:

$$\Delta J_v = \sqrt{\left(\frac{1}{2}R^2 \cdot \Delta m_v\right)^2 + (m_v R \cdot \Delta R)^2} \quad (3.1)$$

erhalten wir:

$$J_v = (1,39 \cdot 10^{-4} \pm 1,7 \cdot 10^{-15}) \text{kgm}^2$$

Dabei ist der Fehler sehr gering, da die einzelnen Messung (mit der Waage und dem Messschieber) sehr genau waren und der Wert in kgm^2 angegeben wird.

3.1.2 Trägheitsmoment des Hohlzylinder

Wir nutzen die Formel 1.3 und errechnen den Fehler mit folgender Formel:

$$\begin{aligned} \Delta J_h^2 = & \left(\frac{m_h(4R_1^3(R_1^2 - R_2^2) - 2R_1(R_1^4 - R_2^4))}{2(R_1^2 - R_2^2)^2} \cdot \Delta R_1 \right)^2 \\ & + \left(\frac{m_h(-4R_2^3(R_1^2 - R_2^2) + 2R_2(R_1^4 - R_2^4))}{2(R_1^2 - R_2^2)^2} \cdot \Delta R_2 \right)^2 \\ & + \left(\frac{R_1^4 - R_2^4}{2(R_1^2 - R_2^2)} \cdot \Delta m_h \right)^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Wir erhalten:

$$J_h = (2,49 \cdot 10^{-4} \pm 7,4 \cdot 10^{-7}) \text{kgm}^2$$

3.1.3 Berechnung der Beschleunigungen

Dabei nutzen wir die Formel 1.1 und die Fehlerformel:

$$\begin{aligned} \Delta a_s^2 = & \left(\frac{Jg \sin(\Phi)}{m^2 r^2 \left(\frac{J}{mr^2} + 1\right)^2} \Delta m \right)^2 \\ & + \left(\frac{\sin(\Phi)}{\frac{J}{mr^2} + 1} \Delta g \right)^2 + \left(\frac{g \cos(\Phi)}{\frac{J}{mr^2} + 1} \Delta \Phi \right)^2 \\ & + \left(\frac{-g \sin(\Phi)}{mr^2 \left(\frac{J}{mr^2} + 1\right)^2} \Delta j \right)^2 + \left(\frac{2Jg \sin(\Phi)}{mr^3 \left(\frac{J}{mr^2} + 1\right)^2} \Delta r \right)^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Damit ergibt sich ein Wert für folgende Beschleunigungen:

Vollzylinder:

$$a_{s,v} = (0,73 \pm 0,03) \frac{m}{s^2}$$

Hohlzylinder:

$$a_{s,h} = (0,57 \pm 0,03) \frac{m}{s^2}$$

3.2 Auswerten der gemessenen Beschleunigung

Da wir die Zylinder herabrollen lassen haben, und wir die zurückgelegte Distanz, sowie die Zeit für diese Distanz gemessen haben, können wir die Beschleunigung auch aus diesen gemessenen Daten ermitteln. Dazu schauen wir uns folgende Formel an:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad (3.4)$$

Wobei s die zurückgelegte Strecke, a die Beschleunigung und t die Zeit.

Wenn wir also die Werte für s gegen eine Achse plotten, die t^2 aufführt, dann erhalten wir für die Steigung dieser linearen Funktion, durch die Ausgleichsgerade genähert:

$$\text{Steigung} = \frac{1}{2}a \quad (3.5)$$

Mithilfe dieser Formel und Diagram 1, können wir die Beschleunigungen berechnen.

Es ergibt sich für den Vollzylinder:

$$a_v = (0,69 \pm 0,01) \frac{m}{s^2}$$

und für den Hohlzylinder:

$$a_h(0,56 \pm 0,01) \frac{m}{s^2}$$

Dabei wurde der Fehler wie folgt berechnet:

$$\Delta a_{\text{graphisch}} = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2} \cdot \Delta s\right)^2 + \left(\frac{-4s}{t^3} \cdot \Delta t\right)^2} \quad (3.6)$$

Vergleicht man diese beiden Werte, fällt auf, dass es eine signifikante Abweichung gibt. Genauer beträgt die Abweichung beim Vollzylinder 11σ und beim Hohlzylinder sogar 14σ .

3.3 Kinetische Energie

Die kinetische Energie, die die Zylinder am Ende ihres Rolweges haben, setzt sich zusammen aus der translationsenergie E_{trans} und der Rotationsenergie E_{rot} , wie in Formel 1.4 beschrieben.

3.3.1 Bestimmung von E_{trans}

Hierfür nutzen wir die Daten aus dem zweiten Versuchsaufbau, also die gemessenen Zeiten, die die Zylinder auf der flachen Ebene gebraucht haben eine gewisse Distanz zurückzulegen.

Nutzen wir den ersten Term von Formel 1.4, so erhalten wir E_{trans}

$$E_{trans} = \frac{1}{2}m \left(\frac{s}{t}\right)^2 \quad (3.7)$$

Wobei s die in t zurückgelegte Strecke ist.

Dabei berechnen wir den Fehler mittels:

$$\Delta E_{trans}^2 = \left(\frac{ms}{t^2}\Delta s\right)^2 + \left(\frac{-ms^2}{t^3}\Delta t\right)^2 + \left(\frac{s^2}{2t^2}\Delta m\right)^2 \quad (3.8)$$

Dabei muss allerdings noch die Zeitliche differenz und deren Fehler berechnet werden.

Für die Zeit t und Δt ergibt sich:

Zylinder	$\Delta_{E\bar{t}}[s]$	$\Delta\bar{t}[s]$
Vollzylinder	0,195	0,001
Hohlzylinder	0,1708	0,0002

Tabelle 1: Zeitdifferenzen und Fehler

Hierbei ist $\Delta_{E\bar{t}}$ die Zeitdifferenz und $\Delta\bar{t}$ der Fehler.

Somit erhalten wir folgende Werte für die Translationsenergien:

Vollzylinder:

$$E_{trans} = (0,234 \pm 0,006)J$$

Hohlzylinder:

$$E_{trans} = (0,304 \pm 0,008)J$$

3.3.2 Bestimmung von E_{rot}

Betrachten wir Formel 1.4, fehlt noch die Rotationsenergie:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}J\frac{s^2}{r^2t^2} \quad (3.9)$$

Hieraus ergibt sich eine Fehlerformel:

$$\Delta E_{rot}^2 = \left(\frac{Js}{r^2t^2}\Delta s\right)^2 + \left(\frac{-Js^2}{r^2t^3}\Delta t\right)^2 + \left(\frac{-Js^2}{r^3t^2}\Delta r\right)^2 + \left(\frac{s^2}{2r^2t^2}\Delta J\right)^2 \quad (3.10)$$

Damit lassen sich die Rotationsenergien berechnen, sie betragen:

Vollzylinder:

$$(0,1170 \pm 0,0017)J$$

Hohlzylinder:

$$(0,273 \pm 0,009)J$$

3.4 Potentielle Energie

Die Formel für die Potentielle Energie, eines Objektes ist:

$$E_{pot} = mgh \quad (3.11)$$

Im Messprotokoll wurde nur die Höhe der gesamten Ebene gemessen, sodass wir den per Phyphox bestimmten Winkel überprüfen konnten, dabei wurde versäumt die Höhe, die der Zylinder über der vertikalen Ebene ist zu messen. Also muss diese Höhe rechnerisch bestimmt werden.

$$h = (l + r) \cdot \sin(\varphi) \quad (3.12)$$

Dabei ist r der Radius des Zylinders, φ der Winkel der Ebene, und l die gemessene Länge der Ebene, bis zum Zylinderanfang. Diese Formel gibt nicht ganz genau, die Höhe des Scherpunktes des Zylinder an, ist aber eine gute Näherung. Auf eine noch genauere Bestimmung wurde verzichtet, da die Fehler der Einzelmessungen die kleine Abweichung überwiegen.

Hier muss auch wieder der Fehler berechnet werden mit der Formel:

$$\Delta h^2 = (\sin(\varphi) \Delta l)^2 + (\sin(\varphi) \Delta r)^2 + ((l + r) \cos(\varphi) \Delta \varphi)^2 \quad (3.13)$$

Damit erhalten wir:

$$h = (0,10 \pm 9 \cdot 10^{-6})m$$

Zusammen mit der Fehlerformel für die Potentielle Energie:

$$\Delta E_{pot}^2 = (gh\Delta m)^2 + (hm\Delta g)^2 + (gm\Delta h)^2 \quad (3.14)$$

Damit ergibt sich für E_{pot} :

Vollzylinder:

$$E_{pot} = (0,436 \pm 4 \cdot 10^{-5})J$$

Hohlzylinder:

$$E_{pot} = (0,434 \pm 4 \cdot 10^{-5})J$$

3.5 Vergleich der Energien

Dabei rechnen wie die kinetischen Energien zuerst zusammen:

Dabei wird der Fehler wie folgt bestimmt:

$$\Delta E_{kin} = \sqrt{\Delta E_{trans}^2 + \Delta E_{rot}^2} \quad (3.15)$$

Es ergibt sich:

Vollzylinder:

$$E_{kin} = (0,35 \pm 0,006)J$$

Hohlzylinder:

$$E_{kin} = (0,577 \pm 0,01)J$$

Ein Vergleich ergibt:

Vollzylinder:

$$z - \text{Wert}_{E_{pot} \text{ zu } E_{kin}} = 14\sigma$$

Hohlzylinder:

$$z - \text{Wert}_{E_{pot} zu E_{kin}} = 14\sigma$$

Die Abweichungen sind signifikant, obwohl die Energien nach dem Energiesatz nahezu ident sein sollten. Ein Möglicher Fehler ist hierbei der Versuchsaufbau selbst, dessen Übergang von schiefer zu vertikalen Ebene nicht glatt war. Hier hat der Zylinder womöglich einiges seiner Energie verloren.

4. Zusammenfassung und Diskussion

In diesem Versuch konnten wir den Zusammenhang zwischen Theorie und Praxis vergleichen. Wir haben zum Einen die Beschleunigungen für einen Vollzylinder und einen Hohlzylinder, der eine schiefe Ebene herunterrollt, mithilfe ihres Trägheitsmomentes berechnet. Dabei ergab sich

$$a_{s,v} = (0,73 \pm 0,03) \frac{m}{s^2}$$

und

$$a_{s,h} = (0,57 \pm 0,03) \frac{m}{s^2}$$

Und zum Anderen haben wir die Beschleunigungen über gemessene Werte ermittelt, wobei sich folgende Beschleunigungen ergaben:

$$a_v = (0,69 \pm 0,01) \frac{m}{s^2}$$

und

$$a_h(0,56 \pm 0,01) \frac{m}{s^2}$$

Dabei zeigt der Index h immer den Hohlzylinder und v den Vollzylinder an.

Die Werte weichen nicht stark voneinander ab. Der z-Wert der Beschleunigungen des Vollzylinders beträgt zum Beispiel $1,26 \sigma$.

Desweiteren wurden die kinetischen Energien mit der potentiellen Energie des Zylinders verlichen. Dabei eraben sich jeweils auch hohe Abweichungen:

$$z_v - \text{Wert}_{E_{pot} zu E_{kin}} = 14\sigma$$

und

$$z_h - \text{Wert}_{E_{pot} zu E_{kin}} = 14\sigma$$

Dabei lassen sich die Abweichungen über den Versuchsaufbaue erklären. Die Kante des Übergangs von schiefer zur vertikalen Ebene ist unsauber und im Moment der Messungen nicht verbesserbar gewesen. Dadruch ist der Zylinder gesprungen auf der vertikalen Ebene gesprungen und aus dem Rollen geraten, das verfälscht die Zeitmessungen und erklärt die Unterschiedlichen Energien, sowie den Fakt, dass laut den Werten, die wir errechen haben, die kinetische Energie über der potentiellen gelegen haben soll.

Desweiteren lässt sich der Versuch verbessern indem man den Schalter, der die Zeitmessung startet verändert. Denn die Zeitmessung startet schon bevor der Zylinder beschleunigt werden kann, da der Schalter bereits auslöst, wenn die Schranke noch vor dem Zylinder ist. Dieser Effekt wurde von dem von uns zu gering gewähltem Steigwinkel ebenfalls bestärkt.

Quellen- und Literaturverzeichnis

- [1] CAPTAIN JONI: *pap1-tex-vorlage*. <https://github.com/captain-joni/pap1-tex-vorlage>. – [Online; Stand 28.08.2024]
- [2] DR. J. WAGNER: *Physikalisches Praktikum 1 für Studierende der Physik B.Sc.* <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Corona/PAP1.pdf>. – [Online; Stand 01/2014]