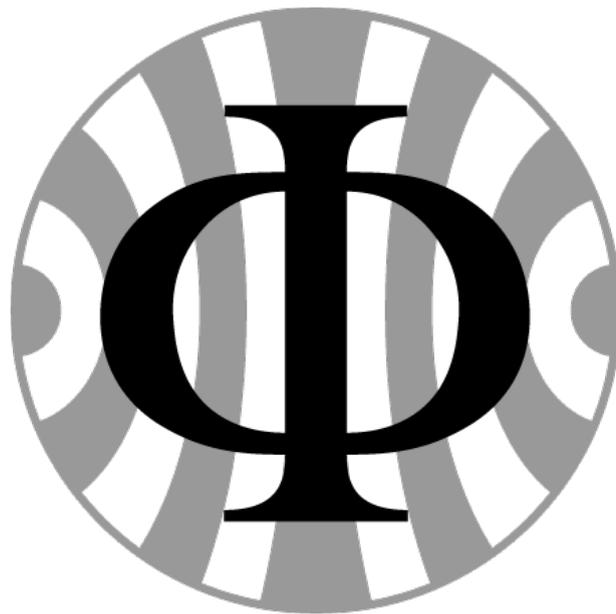


Versuch 251 Statistik des Zerfalls

PAP 2.2, [1]

26.02.2025



[2]

Teilnehmender Student: **Jonathan Rodemers**

Gruppe des Teilnehmenden: 1

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Messverfahren	1
1.3	Grundlagen aus der Physik	1
1.3.1	Radioaktiver Zerfall und statistische Natur	1
1.3.2	Funktionsweise des Geiger-Müller-Zählrohrs	2
1.3.3	Zählrohrcharakteristik und Plateaubereich	2
1.3.4	Statistische Schwankungen und Totzeit	2
2	Durchführung	3
2.1	Messprotokol	3
3	Auswertung	5
3.1	Bestimmung des Plateaubereichs	5
3.2	Untersuchung des Anstiegs	5
3.3	Auswertung der hohen mittleren Ereignisszahl	7
3.4	Auswertung der kleinen Ereignisszahlen	7
4	Zusammenfassung und Diskussion	9
5	Anhang	10
	Quellen- und Literaturverzeichnis	13

1. Einleitung

1.1 Motivation

Der radioaktive Zerfall ist ein stochastischer Prozess, der sich nur statistisch vorhersagen lässt. Dennoch folgt er Gesetzmäßigkeiten, die durch Verteilungen beschrieben werden können. Ziel dieses Experiments ist es, die Eigenschaften eines Geiger-Müller-Zählrohrs zu untersuchen, insbesondere seine Zählrohrkennlinie und den Plateaubereich. Darüber hinaus wird überprüft, ob der radioaktive Zerfall statistisch durch eine Poisson- oder Gauß-Verteilung beschrieben werden kann. Ein präzises Verständnis dieser Verteilungen ist essenziell für die Fehleranalyse in Experimenten der Kern- und Teilchenphysik.

1.2 Messverfahren

Zur Detektion radioaktiver Strahlung wird ein Geiger-Müller-Zählrohr mit einem Betriebsgerät genutzt. Die Messungen erfolgen mit einem radioaktiven Präparat (Cobalt-60 oder Caesium-137), das in einer Halterung mit Bleiabschirmung eingebaut wird.

Folgende Messungen werden durchgeführt:

- Bestimmung der Zählrohrkennlinie durch Variation der Zählrohrspannung von der Einsatzspannung bis zu einem Bereich von 100 V darüber.
- Untersuchung des Plateaubereichs des Zählrohrs, um den optimalen Betriebspunkt zu bestimmen.
- Statistische Analyse der Zählrate durch eine große Anzahl von Einzelmessungen, um die Verteilung der gemessenen Zerfälle zu untersuchen.
- Vergleich der gemessenen Daten mit einer Poisson- und Gauß-Verteilung zur Überprüfung der theoretischen Modelle.

Die erfassten Messdaten werden anschließend mit Python analysiert.

1.3 Grundlagen aus der Physik

1.3.1 Radioaktiver Zerfall und statistische Natur

Radioaktive Atome zerfallen zufällig, jedoch mit einer für jedes Isotop charakteristischen Wahrscheinlichkeit. Die Anzahl der verbleibenden Atomkerne $N(t)$ nach einer Zeit t folgt dem radioaktiven Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (1.1)$$

wobei N_0 die Anfangszahl der Atomkerne und λ die Zerfallskonstante ist.

Da der Zerfall eines einzelnen Atoms nicht vorhergesagt werden kann, folgt die Anzahl der Zerfälle in einem bestimmten Zeitraum einer Poisson-Verteilung:

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \quad (1.2)$$

mit dem Mittelwert μ , der die durchschnittliche Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit beschreibt. Bei großen μ kann die Poisson-Verteilung durch eine Gauß-Verteilung angenähert werden:

$$G(k; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.3)$$

mit der Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\mu}$$

Die Zählrate eines Geiger-Müller-Zählrohrs zeigt diese statistischen Schwankungen.

1.3.2 Funktionsweise des Geiger-Müller-Zählrohrs

Das Geiger-Müller-Zählrohr ist ein Detektor für ionisierende Strahlung. Es besteht aus einem Metallzylinder, hier Kathode, und einem zentralen Draht (Anode), welches unter Hochspannung steht. Das Innere des Zählrohrs ist mit einem Gasgemisch gefüllt, oft Argon mit einem Löschgas. Wenn ionisierende Strahlung in das Zählrohr eintritt, ionisiert sie das Gas entlang ihrer Flugbahn. Dadurch entstehen freie Elektronen und positive Ionen. Die Elektronen werden durch das elektrische Feld zur Anode beschleunigt, auf dem Weg lösen sie weitere Ionisationen aus. Diese Kettenreaktion führt zu einer Elektronenlawine, die eine messbare elektrische Entladung verursacht. Diese Impulse werden gezählt und dienen als Maß für die Intensität der Strahlung.

1.3.3 Zählrohrcharakteristik und Plateaubereich

Die Funktion eines Geiger-Müller-Zählrohrs hängt stark von der angelegten Hochspannung ab. Die Zählrohrkennlinie zeigt die Abhängigkeit der Zählrate von der Spannung und weist verschiedene Bereiche auf:

- Rekombinationsbereich
- Proportionalbereich
- Plateau-Bereich
- Überschlagbereich (Gasentladungen)

Das Experiment zielt darauf ab, den Plateaubereich zu bestimmen, da nur in diesem Bereich eine zuverlässige Zählung gewährleistet ist. Die Einsatzspannung U_E ist die kleinste Spannung, bei der das Zählrohr zuverlässig arbeitet. Die Plateau-Steigung gibt an, wie stark die Zählrate pro 100 V Spannung variiert.

1.3.4 Statistische Schwankungen und Totzeit

Da das Zählrohr auf einzelnen Impulsen basiert, sind statistische Schwankungen unvermeidlich. Diese lassen sich mit der Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{N}$$

abschätzen, wobei N die Anzahl der gezählten Zerfälle ist.

Zusätzlich besitzt jedes Zählrohr eine Totzeit:

Nach einem registrierten Impuls ist das Zählrohr für eine kurze Zeit unempfindlich für weitere Impulse. Dies führt bei hohen Zählraten (also kurzen Messzeiten) zu einer Unterschätzung der tatsächlichen Zerfallsrate, weshalb Totzeitkorrekturen notwendig sind.

2. Durchführung

2.1 Messprotokoll

26.02.25

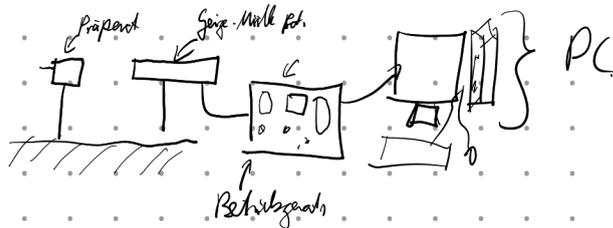
Neuprüfung
Versuch 251

Jonathan Rodina
Manuel Jenzefrei

Geräte:

- Geiger-Müller Zählrohr mit Betriebsgerät
- externer Impulzzähler
- PC
- Präparathalter mit Bleischutzblei
- Radioaktives Präparat (^{60}Co)

Skizze:



Aufgabe 2:

$$V_E = 440 \pm 5 \text{ V}$$

$$V_E + 50 = 950 \pm 5 \text{ V}$$

$$U_0 = 5.28 \pm 0.05 \text{ V}$$

Aufgabe 3:

$U [V]$	$t [min]$	N
U_0	1	13.129
U_0	3	39.816
$U_0 + 100$	1	13.904
$U_0 + 100$		11.511
$\Delta U = 5V$		$\Delta t = 0,3 \text{ sec}$

Aufgabe 4:
 Anzahl der Messen: 2000
 Mittelwert: 71,41
 Standardabweichung: 8,36

Aufgabe 5:
 Anzahl der Messen: 5000
 Mittelwert: 4,26
 Standardabweichung: 2,11

Engel

3. Auswertung

3.1 Bestimmung des Plateaubereichs

Zunächst stellten wir die Spannung des Zählrohr so ein, dass wir akustisch verfolgen konnten, dass einige Ereignisse gezählt werden. Danach wurde die Spannung in Schritten von 25V erhöht, sodass wir den Plateubereich quantitativ bestimmen können.

Die gemessenen Werte wurde sofort in ein Python-Skript eingetragen und der Anstieg des Plateubereichs mit einer Geraden gefitet. Es ergibt sich folgendes Bild:

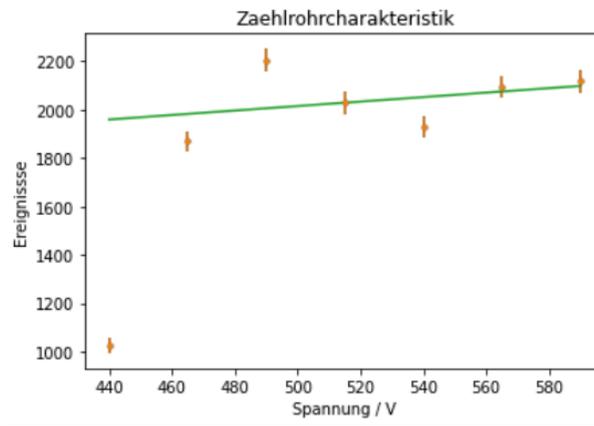


Abbildung 3.1: Plateubereich mit fitgerade

3.2 Untersuchung des Anstiegs

Um bewerten zu können, ob der Anstieg signifikant ist, muessen wir berachen, ob der Prozentuale Anstieg um mehr als 3 Standartabweichungen von der Null abweicht. mit:

$$m = n(U_0 + 100V) - n(U_o), \quad \Delta m = \sqrt{n(U_0 + 100V) + n(U_o)} \quad (3.1)$$

Dabei wird davon ausgegangen, dass $\Delta n = \sqrt{n}$.

Zudem kann mn den Prozentualen Anstieg berechnen:

$$m\% = \frac{n(U_0 + 100V) - n(U_o)}{n(U_0)} \quad (3.2)$$

mit der Fehlerrechnung:

$$\Delta m\% = \frac{m}{n(U_0)} \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta n(U_0)}{n(U_0)}\right)^2} \quad (3.3)$$

Dabei ergibt sich für die Messungen folgenden Tabelle: Es sind also beide anstiege Signifiakant.

Um den Anstieg auf 1% genau zu kennen, müsste gelten:

$$p = 0,01 = \frac{\Delta m\%}{m\%}$$

T [min]	$m_{\%}$	σ
1	$0,059 \pm 0,013$	4,5
3	$0,042 \pm 0,007$	6

Tabelle 3.1: Prozentuale Steigungen und Abweichungen von der Null

Wir können den prozentualen Anteil auch schreiben als:

$$m_{\%} = \alpha(U_o + 100) \cdot t - \alpha(U_0) \cdot t \quad (3.4)$$

Wobei α , die Zählrate $\frac{n}{t}$ beschreibt.

Dann ergibt sich:

$$p = \frac{\sqrt{\alpha(U_0 - 100)t + \alpha(U_0)t}}{\alpha(U_0 + 100)t - \alpha(U_0)t} \Leftrightarrow t = \frac{\alpha(U_0 + 100) + \alpha(U_0)}{p^2(\alpha(U_0 + 100) - \alpha(U_0))^2} \quad (3.5)$$

Wir schreiben nun $\alpha(U_0 + 100) = a_1$ und $\alpha(U_0) = a_0$ Und erhalten die Fehlerrechnung:

$$\Delta t = \sqrt{\left(\left(\frac{1}{p^2(-a_0 + a_1)^2} - \frac{2(a_0 + a_1)}{p^2(-a_0 + a_1)^3} \right) \Delta a_1 \right)^2 + \left(\left(\frac{1}{p^2(-a_0 + a_1)^2} + \frac{2(a_0 + a_1)}{p^2(-a_0 + a_1)^3} \right) \Delta a_0 \right)^2} \quad (3.6)$$

Mit den Zählraten aus der Messung bei einer Minute ergibt sich dann eine Zeit von:

$$t = (450 \pm 190)\text{min}$$

Die Vertrauensniveaus, 68% und 95% entsprechen einer Variation von einem, bzw. zwei Standardabweichungen σ . Die relative Variation für diese Vertrauensniveaus ist also gegeben durch:

$$\sigma_N = m_{\%} - \sigma \cdot \Delta m_{\%} \quad (3.7)$$

Es ergibt sich dadurch folgende Tabelle:

T [min]	σ_N 68% [%]	σ_N 95% [%]
1	3,8	13,5
3	5,3	15,0

Tabelle 3.2: Prozentuale Variation

3.3 Auswertung der hohen mittleren Ereignisszahl

Zunächst werden die Daten des Histogramms mit Python geplottet und zwei Fits angelegt. Wir betrachten hier den Unterscheid zwischen einem Fit mithilfe einer Gausskurve und einer Poissonkurve. Es ergibt sich folgendes Bild:

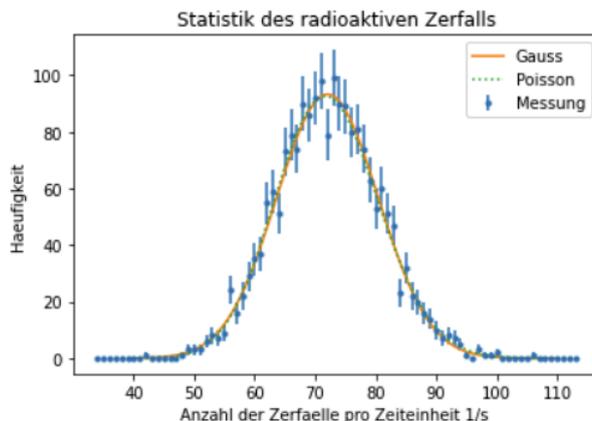


Abbildung 3.2: Hohe Ereignisszahlen

Wir erhalten dabei eine reduzierte χ^2 Summe von:

$$\text{Gauss: } \chi_{red}^2 = 0,71 \quad \text{Poisson: } \chi_{red}^2 = 0,65$$

Der Poisson-Fit ist also etwas genauer, dies zeigt sich auch in der Fit-Wahrscheinlichkeit:

$$\text{Gauss: } 90\% \quad \text{Poisson: } 95\%$$

3.4 Auswertung der kleinen Ereignisszahlen

Hier gehen wir analog vor, aber ändern die Darstellung zu einem Logarithmischen Plot, damit die Unterschiede der beiden Fits besser erkennbar sind.

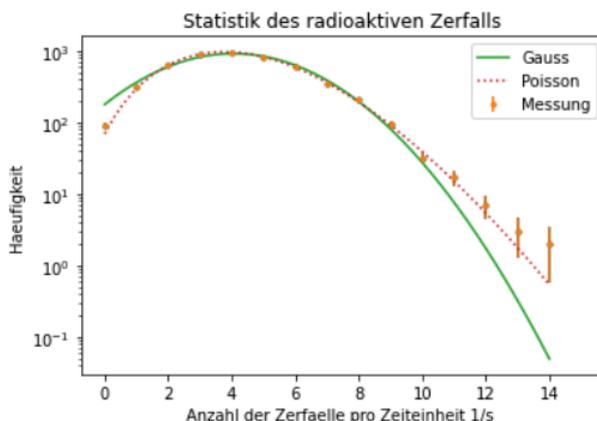


Abbildung 3.3: Kleine Ereignisszahlen

Hier zeichnet sich ein ähnliches Bild ab, allerdings ist der Unterschied erheblich größer.

$$\text{Gauss: } \chi_{red}^2 = 3,8 \quad \text{Poisson: } \chi_{red}^2 = 0,52$$

Mit den jeweiligen Fit-Wahrscheinlichkeiten:

Gauss: 0% Poisson: 90%

4. Zusammenfassung und Diskussion

Im Rahmen dieses Experiments haben wir die Statistik des radioaktiven Zerfalls mithilfe eines Geiger-Müller-Zählrohrs untersucht. Dabei wurde die Zählrohrkennlinie aufgenommen, der Plateaubereich bestimmt und die Zählrate analysiert. Die experimentellen Daten wurden mit einer Poisson- und Gauß-Verteilung gefittet, um zu überprüfen, welche statistische Beschreibung für den Zerfall am besten geeignet ist.

Zunächst wurde der Plateaubereich des Zählrohrs bestimmt, indem die Spannung erhöht und die Ereignisse gemessen wurden. Es konnte ein "nahezu"konstanter Bereich identifiziert werden, in dem die Ereignissanzahl nur geringfügig von der Spannung abhängt. Die Plateau-Steigung wurde mit einem linearen Fit bestimmt. Im zweiten Teil des Experiments wurde untersucht, ob der Anstieg der Ereigniszählungen bei einer Spannungserhöhung signifikant ist. Dazu wurde die Differenz der Zählraten für verschiedene Spannungen mit den jeweiligen Fehlern analysiert. Die Berechnung der Standardabweichung ergab, dass die Anstiege signifikant sind, da sie mehr als das Dreifache einer Standardabweichung von der Null betragen. Zudem wurde berechnet, dass eine Messzeit von etwa 450 Minuten erforderlich wäre, um den Plateauanstieg auf 1% genau zu bestimmen.

Die Analyse der Zählraten für unterschiedliche Ereignishäufigkeiten zeigte, dass für hohe mittlere Ereigniszahlen sowohl die Poisson- als auch die Gauß-Verteilung eine gute Beschreibung liefern, wobei der reduzierte χ^2 -Wert für die Poisson-Verteilung leicht besser war. Bei niedrigen Ereigniszahlen hingegen zeigte sich, dass die Gauß-Verteilung deutlich schlechtere Anpassungen lieferte, mit einer Fit-Wahrscheinlichkeit von nahezu 0%, während die Poisson-Verteilung mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% eine sehr gute Übereinstimmung mit den Messwerten aufwies. Dies bestätigt die theoretische Erwartung, dass der radioaktive Zerfall einer Poisson-Statistik folgt, insbesondere bei kleinen Ereigniszahlen. Mögliche Fehlerquellen in diesem Experiment sind vor allem systematische Einflüsse durch Schwankungen in der Hochspannung des Zählrohrs oder externe Störstrahlung. Zudem könnten Totzeiteffekte bei hohen Zählraten eine Rolle spielen, wodurch Ereignisse unregistriert bleiben und eine Unterschätzung der tatsächlichen Zählrate erfolgt. Auch die begrenzte Messzeit könnte eine Rolle spielen, insbesondere bei der Untersuchung des Plateauanstiegs.

Insgesamt war das Experiment jedoch sehr erfolgreich, da theoretischen Vorhersagen experimentell bestätigt wurden. Die Zählrohrkennlinie zeigte die erwartete Charakteristik mit einem gut definierten Plateaubereich, die statistische Analyse ergab eine klare Übereinstimmung mit der Poisson-Verteilung. Damit konnte das grundlegende Verhalten des radioaktiven Zerfalls sowie die Funktionsweise eines Geiger-Müller-Zählrohrs nachvollzogen und quantitativ beschrieben werden. Weiternoch zeigten unsere Versuche, wie wichtig die Einordnung des Mongoleiautos im Kontext des PAPs ist.



Abbildung 4.1: Mongoleiauto

5. Anhang

```

%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit

#—Aufgabe 1 —————

#Zaehlrrohrspannung:
U=np.array([440,465,490,515,540,565,590])
#gezaehlte Ereignisse
N=np.array([1026,1869,2205,2028,1928,2095,2117])
Fehler_N=np.sqrt(N)

def linear(x,a,b):
    return a*x+b

popt, pcov=curve_fit(linear, U[1:], N[1:])

plt.errorbar(U, N, Fehler_N, fmt=".")
plt.xlabel('Spannung / V')
plt.ylabel('Ereignisse')
plt.title('Zaehlrrohrcharakteristik')
plt.errorbar(U, N, Fehler_N, fmt=".")
plt.xlabel('Spannung / V')
plt.ylabel('Ereignisse')
plt.title('Zaehlrrohrcharakteristik')
plt.plot(U, linear(U,*popt))

```

——— Aufgabe 3 —————

Beschneidung:

b = 20

```
anzahl, haefigkeit=np.loadtxt('data2/251_aufgabe2_1.txt', delimiter=",", unpack=
fehler=np.sqrt(haefigkeit)
```

```
plt.errorbar(anzahl, haefigkeit, fehler, fmt=".")
```

```
plt.xlabel('Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit / 1/s')
```

```
plt.ylabel('Haeufigkeit')
```

```
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls')
```

```
from numpy import exp, pi, sqrt
```

```
def gaussian(x, A, mu, sig): #A: Flaeche der Gaussfunktion
```

```
    return A/(sqrt(2*pi)*sig)*exp(-(x-mu)**2/2/sig**2)
```

Hier dran denken den Index 12 richtig zu setzen fuer unsere Daten

```
popt, pcov=curve_fit(gaussian, anzahl[b:-b], haefigkeit[b:-b],
```

```
p0=[2000,75,8], sigma=fehler[b:-b],
```

```
absolute_sigma=True)
```

```
from scipy.special import gamma
```

```
def poisson(x, A_p, mu_p):
```

```
    return A_p*exp(-mu_p)*mu_p**x/gamma(x+1)
```

```
popt_p, pcov_p = curve_fit(poisson, anzahl[b:-b],
```

```
haefigkeit[b:-b], p0=[2000, 75],
```

```
sigma=fehler[b:-b], absolute_sigma=True)
```

```
plt.errorbar(anzahl, haefigkeit, fehler, fmt=".", label='Messung')
```

```
plt.xlabel('Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit 1/s')
```

```
plt.ylabel('Haeufigkeit')
```

```
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls')
```

```
x=np.linspace(40,110, 100)
```

```
plt.plot(x, gaussian(x,*popt), label='Gauss')
```

```
plt.plot(x, poisson(x,*popt_p), label='Poisson', linestyle=':')
```

```
plt.legend()
```

```
print("Gaussfit:")
```

```
print("A=",popt[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[0][0]))
```

```
print("mu=",popt[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[1][1]))
```

```
print("sig=",popt[2], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[2][2]))
```

```
print("Poissonfit:")
```

```
print("A_p=",popt_p[0], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p[0][0]))
```

```
print("mu_p=",popt_p[1], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p[1][1]))
```

```

#Gauss :
chi2_g=np.sum(( gaussian ( anzahl [b:-b] , * popt )
-haeufigkeit [b:-b] )**2/ fehler [b:-b]**2)
dof_g=len ( anzahl [b:-b] )-3 #dof:degrees of freedom , Freiheitsgrad
chi2_red_g=chi2_g/dof_g
print ( " chi2_g=" , chi2_g )
print ( " chi2_red_g=" ,chi2_red_g )
#Poisson :
chi2_p=np.sum(( poisson ( anzahl [b:-b] , * popt_p )
-haeufigkeit [b:-b] )**2/ fehler [b:-b]**2)
dof_p=len ( anzahl [b:-b] )-2 #poisson hat nur 2 Parameter
chi2_red_p=chi2_p/dof_p
print ( " chi2_p=" , chi2_p )
print ( " chi2_red_p=" ,chi2_red_p )
from scipy.stats import chi2
#Gauss :
prob_g=round(1-chi2.cdf ( chi2_g , dof_g ) ,2)*100
#Poisson :
prob_p=round(1-chi2.cdf ( chi2_p , dof_p ) ,2)*100
print ( " Wahrscheinlichkeit Gauss=" , prob_g , "% " )
print ( " Wahrscheinlichkeit Poisson=" , prob_p , "% " )

a= 39816/(60*3) # U_0
b= 41519/(60*3) # U_+=+100

da= np.sqrt (a)
m=b-a
dm = np.sqrt (a+b)
mp= m/a
dmp= (m)/(a) *np.sqrt (((dm)/(m))**2 + ((da)/(a))**2)
#print (mp)
#print (dmp)
sig=2
print (mp-sig*dmp)

```

Quellen- und Literaturverzeichnis

- [1] CAPTAIN JONI: *pap1-tex-vorlage*. <https://github.com/captain-joni/pap1-tex-vorlage>. – [Online; Stand 28.08.2024]
- [2] DR. J. WAGNER: *Physikalisches Praktikum 2 fuer Studierende der Physik B.Sc.* <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Corona/PAP2.pdf>. – [Online; Stand 01/2014]