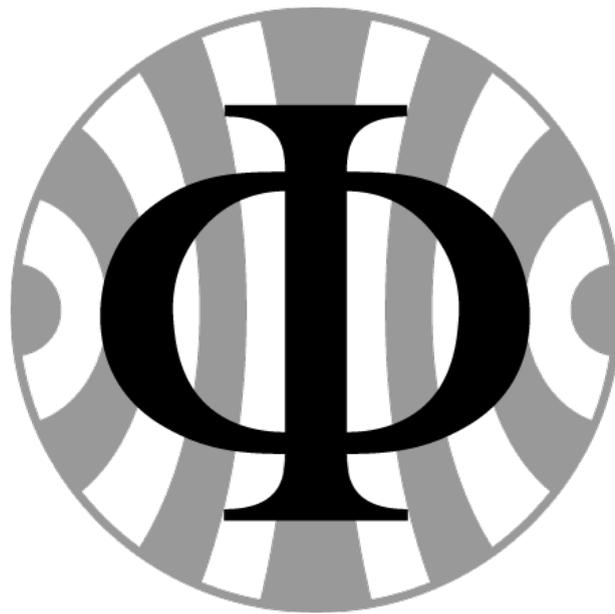


Versuch 211 - Gekoppelte Pendel

PAP 2.1, [1]

09.12.2024



[2]

Teilnehmender Student: **Jonathan Rodemers**

Gruppe des Teilnehmenden: 4

Kurs: Montags

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Messverfahren	1
1.3	Grundlagen aus der Physik	1
2	Durchführung	3
2.1	Messprotokoll	3
3	Auswertung	6
3.1	Frequenzen der Schwingungen	6
3.2	Kopplungsgrade	7
3.3	Bestimmung der Verhältnisse und Vergleich	7
4	Zusammenfassung und Diskussion	8
5	Anhang	9
	Quellen- und Literaturverzeichnis	11

1. Einleitung

1.1 Motivation

Dieses Experiment ist von Beobachtungen inspiriert und erforscht das Zusammenspiel zwischen gekoppelten mechanischen Oszillatoren. Gekoppelte Oszillatoren dienen als vereinfachtes Modell für komplexe Systeme in Physik etc. Durch die Analyse gekoppelter Pendel erhalten wir Einblicke in die grundlegenden Eigenschaften von Energieübertragung und Resonanz, was unser Verständnis der miteinander verbundenen Systeme, die natürlichen Phänomenen zugrunde liegen, bereichert.

1.2 Messverfahren

Der Versuchsaufbau besteht aus zwei Messingpendeln, die über eine Feder gekoppelt sind. Die wichtigsten Komponenten sind:

- Ein Hall-Sensor zur Messung der Pendelverschiebungen.
- ADC, der mit einem Computer zur Datenerfassung verbunden ist.
- Eine auf Python basierte Software für Echtzeitmessungen und Fast-Fourier-Transformationsanalysen.

Die Messungen werden durch manuelle Verschiebung der Pendel unter verschiedenen Ausgangsbedingungen, wie symmetrische, antisymmetrische oder gemischte Erregungen, ausgelöst. Der Hallsensor erkennt die Winkelverschiebung, indem er eine Spannung erzeugt, die proportional zum Sinus des Pendelwinkels in dem Magnetfeld ist. Die Daten werden in 2 ms-Intervallen digitalisiert und analysiert, um die Frequenzen und Amplituden der Schwingungen zu extrahieren. Unterschiedliche Kopplungsstärken werden durch Anpassung der Position der Feder simuliert. Eine Fourier-Analyse isoliert die charakteristischen Frequenzen der symmetrischen und antisymmetrischen Moden und ermöglicht eine detaillierte Untersuchung des Systemverhaltens.

1.3 Grundlagen aus der Physik

Im Mittelpunkt des Experiments steht das Verständnis gekoppelter Schwingungssysteme, die durch die folgenden, für kleine Winkelverschiebungen abgeleiteten Differentialgleichungen modelliert werden:

Für einzelne Pendel:

$$J\ddot{\phi}_i = -D\phi_i, \quad (1.1)$$

wobei J das Trägheitsmoment ist, $D = mgL$ ist das Direktionsmoment (mit m als Masse, g als Schwerkraft und L als Pendellänge).

Bei Kopplung über eine Feder treten zusätzliche Drehmomente auf:

$$M_1 = D'(\phi_2 - \phi_1), \quad M_2 = D'(\phi_1 - \phi_2), \quad (1.2)$$

wobei D' die Drehmomentkonstante der Feder darstellt.

Die Bewegungsgleichungen für das gekoppelte System lauten:

$$J\ddot{\phi}_1 = -D\phi_1 + D'(\phi_2 - \phi_1), \quad J\ddot{\phi}_2 = -D\phi_2 + D'(\phi_1 - \phi_2) \quad (1.3)$$

Substitution bringt:

$$u = \phi_1 + \phi_2, \quad v = \phi_1 - \phi_2 \quad (1.4)$$

entkoppelt die Gleichungen in unabhängige Modi:

$$\ddot{u} + \frac{D}{J}u = 0, \quad \ddot{v} + \frac{D + 2D'}{J}v = 0 \quad (1.5)$$

Durch Lösung erhalten wir zwei Frequenzen:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{J}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D'}{J}}, \quad (1.6)$$

entsprechend den symmetrischen und antisymmetrischen Schwingungsformen. Das Zusammenspiel dieser Moden kann ein Schwebungsmuster erzeugen, bei dem die Energie zwischen den Pendeln mit einer bestimmten Frequenz wechselt:

$$\omega_{\text{beat}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}. \quad (1.7)$$

Diese grundlegenden Prinzipien ermöglichen es uns, Energieübertragung, Synchronisation und Resonanzeffekte zu untersuchen. Außerdem wird die Stärke der Kopplung durch den Kopplungsfaktor quantifiziert:

$$\kappa = \frac{D'}{D + D'} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}. \quad (1.8)$$

2. Durchführung

2.1 Messprotokoll

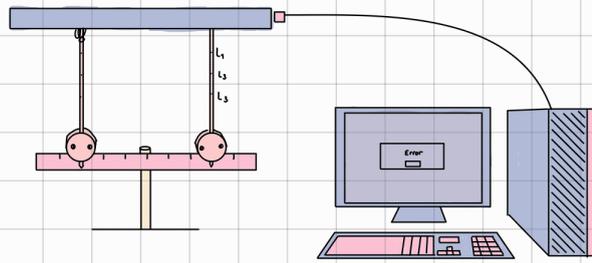
Versuch 211

09.12.2024

Lara Riethling

Helen Mayerhofer

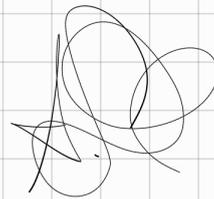
Jonathan Rodemers



$$l_1 = 33,50$$

$$l_2 = 29,50$$

$$l_3 = 19,50 \quad \Delta L = 0,20$$



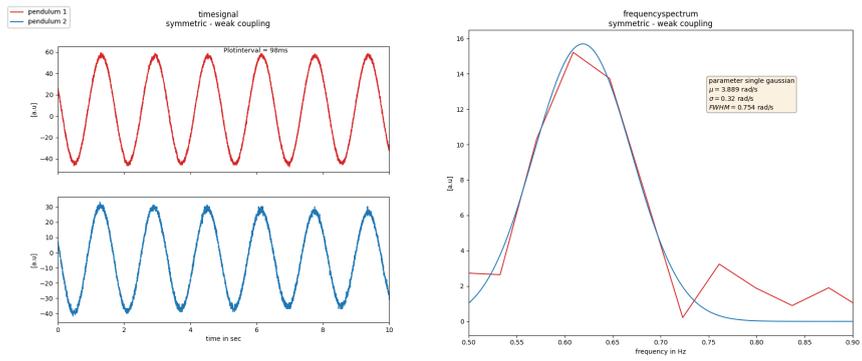


Abbildung 2.1: Symmetrische Anregung – Schwache Kopplung

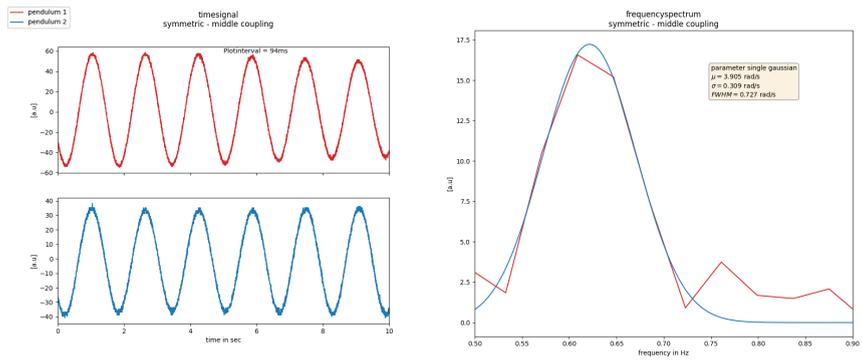


Abbildung 2.2: Symmetrische Anregung – mittlere Kopplung

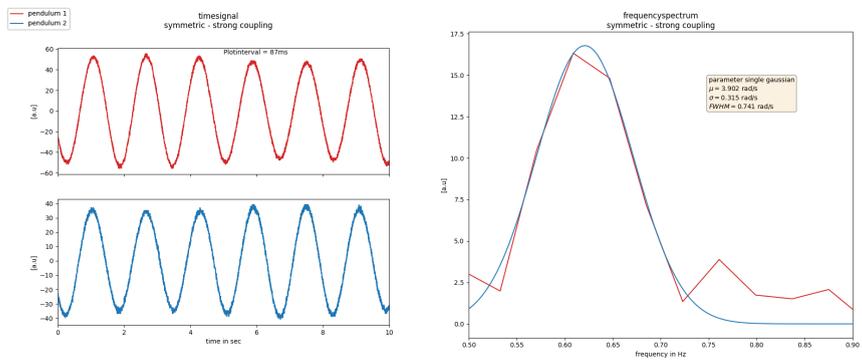


Abbildung 2.3: Symmetrische Anregung – starke Kopplung

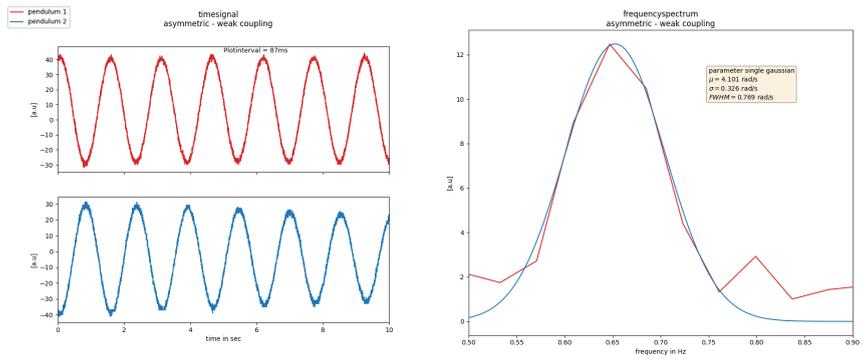


Abbildung 2.4: Asymmetrische Anregung – schwache Kopplung

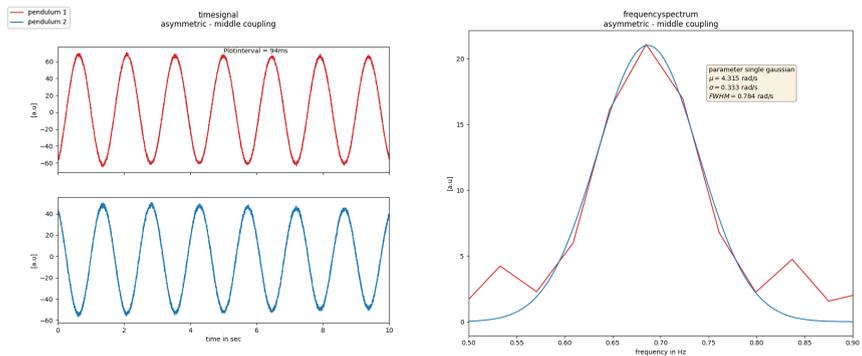


Abbildung 2.5: Asymmetrische Anregung – mittlere Kopplung

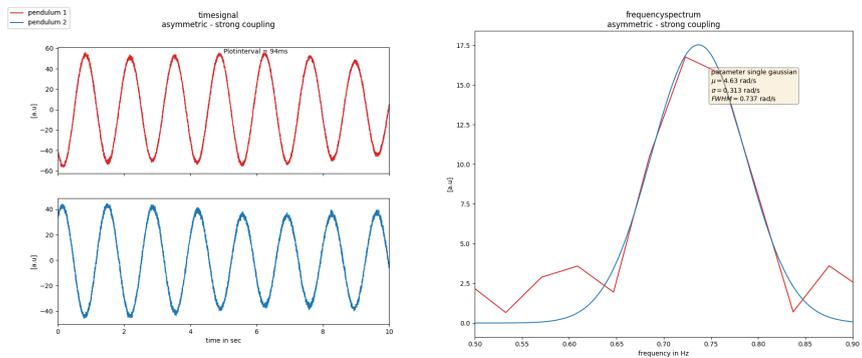


Abbildung 2.6: Asymmetrische Anregung – starke Kopplung

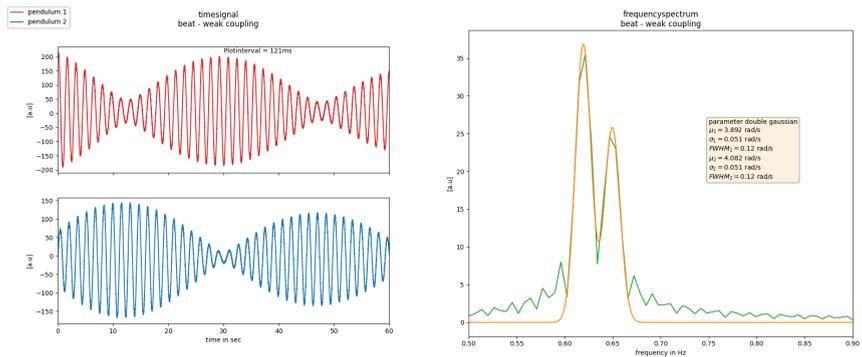


Abbildung 2.7: Gemischte Anregung – schwache Kopplung

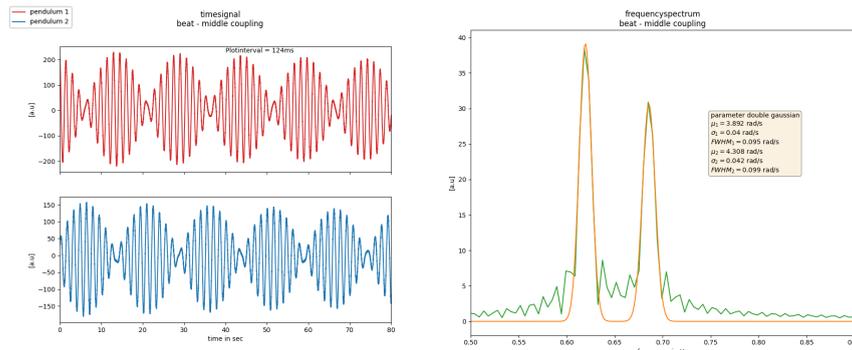


Abbildung 2.8: Gemischte Anregung – mittlere Kopplung

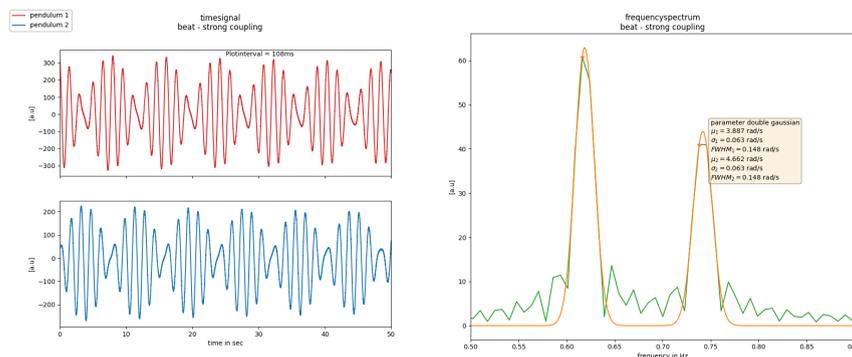


Abbildung 2.9: Gemischte Anregung – starke Kopplung

3. Auswertung

3.1 Frequenzen der Schwingungen

Zunächst definieren wir die Kopplungsgrade anhand der Entfernung der Kopplungsfeder zur Pendelachse:

Kopplungsgrad	Länge zur Pendelachse [cm]
schwach	19,50 ± 0,20
mittel	29,50 ± 0,20
stark	39,50 ± 0,20

Tabelle 3.1: Definition der Kopplungsgrade

Mithilfe der Fast-Furier-Transformation und dem fitten einer Gauskurve können wir die jeweilig gemessenen Frequenzen ablesen und erhalten folgende Tabelle:

Kopplungsgrad	Symmetrisch ω_1 [rad/sec]	Asymmetrisch ω_2 [rad/sec]
schwache Kopplung	3,9 ± 0,3	4,1 ± 0,3
mittlere Kopplung	3,9 ± 0,3	4,3 ± 0,3
starke Kopplung	3,9 ± 0,3	4,6 ± 0,3

Tabelle 3.2: Vergleich Asymmetrische und Symmetrische Anregungen

Weiter noch haben wir uns die gemischte Pendelanregung angeschaut. Hierbei kann man die

gemessenen Werte auch mit den theoretisch Erwarteten vergleichen, mithilfe der Formeln:

$$\omega_I = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) \quad (3.1)$$

mit:

$$\Delta\omega_I = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\Delta\omega_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\Delta\omega_1\right)^2} \quad (3.2)$$

und:

$$\omega_{II} = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \quad (3.3)$$

mit der gleichen Fehlerformel.

Somit erhalten wir folgende Tabelle:

Kopplungsgrad	Messung ω_I [rad/sec]	Messung ω_{II} [rad/sec]	Theo ω_I [rad/sec]	Theo ω_{II} [rad/sec]	Abweichung [σ]
schwach	$3,88 \pm 0,11$	$0,21 \pm 0,11$	$3,99 \pm 0,03$	$0,09 \pm 0,03$	0,96 bzw. 1,05
mittel	$4,32 \pm 0,08$	$0,39 \pm 0,08$	$4,100 \pm 0,029$	$0,208 \pm 0,029$	2,59 bzw. 2,14
stark	$3,90 \pm 0,13$	$0,75 \pm 0,13$	$4,27 \pm 0,04$	$0,39 \pm 0,04$	2,72 bzw. 2,65

Tabelle 3.3: gemischte Anregung

3.2 Kopplungsgrade

Zum bestimmen der Kopplungsgrade benutzen wir Formel 1.8 und die Fehlerformel:

$$\Delta\kappa^2 = \left(\left(\frac{-2w_2(-w_1^2 + w_2^2)}{(w_1^2 + w_2^2)^2} + \frac{2w_2}{w_1^2 + w_2^2} \right) \Delta w_2 \right)^2 + \left(\left(\frac{-2w_1(-w_1^2 + w_2^2)}{(w_1^2 + w_2^2)^2} - \frac{2w_1}{w_1^2 + w_2^2} \right) \Delta w_1 \right)^2 \quad (3.4)$$

Es ergibt sich folgende Tabelle:

Kopplungsgrad	Kopplungsgrad (qualitativ)
schwach	$0,048 \pm 0,018$
mittel	$0,101 \pm 0,014$
stark	$0,180 \pm 0,020$

Tabelle 3.4: Kopplungsgrade qualitativ

3.3 Bestimmung der Verhältnisse und Vergleich

Wir können nun das Verhältniss zweier Kopplungsgrade bestimmen und dies mit dem Verhältniss der jeweiligen Kopplungslänge (im Quadrat) vergleichen. Dazu nutzen wir für die Fehler:

$$\Delta\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa_2}\Delta\kappa_1\right)^2 + \left(\frac{-\kappa_1}{\kappa_2^2}\Delta\kappa_2\right)^2} \quad (3.5)$$

und:

$$\Delta\left(\frac{l_1^2}{l_2^2}\right) = \sqrt{\left(\frac{2l_1}{l_2^2}\Delta l_1\right)^2 + \left(\frac{-2l_1^2}{l_2^3}\Delta l_2\right)^2} \quad (3.6)$$

Daraus ergibt sich dann die folgende Tabelle:

Verhältniss	Kopplungsgrad	Längenquadrate	Abweichung [σ]
stark-schwach	$3,8 \pm 1,5$	$4,10 \pm 0,09$	0,2
stark-mittel	$1,8 \pm 0,3$	$1,79 \pm 0,03$	0,03
mittel-schwach	$2,1 \pm 0,8$	$2,29 \pm 0,05$	0,2

Tabelle 3.5: Verhältnissvergleich

4. Zusammenfassung und Diskussion

In dem Experiment untersuchten wir die Schwingungen zweier mechanischer Pendel, die durch eine Feder gekoppelt sind. Die jeweiligen Frequenzen wurden für verschiedene Kopplungsstärken (schwach, mittel, stark) bestimmt, wobei mithilfe eines Hall-Sensors und einer Fourier-Analyse die symmetrischen und antisymmetrischen Schwingfrequenzen bestimmt wurden und durch Messung die Kopplungslänge zur Pendelachse.

Die experimentell bestimmten Kopplungsgrade betragen

$$\text{schwach: } 0,048 \pm 0,018$$

$$\text{mittel: } 0,101 \pm 0,014$$

und

$$\text{stark: } 0,180 \pm 0,020$$

Die gemessenen Werte für ω_1 und ω_2 variieren zwischen $3,9 \pm 0,3$ rad/s und $4,6 \pm 0,3$ rad/s. Bei der gemischten Anregung ergaben sich dann Abweichungen von theoretischen Werten in einem Bereich von bis zu $2,72\sigma$, wobei insbesondere starke Kopplungen größere Abweichungen zeigten. Solche Diskrepanzen können durch systematische Fehler in der Kopplungskonfiguration oder durch ungenaue Positionierung des Hallsensors bedingt sein. Trotz kleiner Abweichungen erwies sich das Experiment als erfolgreich, da auch die Verhältnisse der Längenquadrate und der Kopplungsgrade übereinstimmten. Die Verhältnisse zwischen den Kopplungsgraden korrelierten genau mit denen der Längenquadrate.

Mögliche Fehlerquellen könnten die Sensitivität der FFT-Analyse oder Fehler beim Manuellen Eingeben der Fitparameter sein. Insgesamt liefert das Experiment wertvolle Einsichten in die Physik gekoppelter Schwingungssysteme und demonstriert die erfolgreiche Anwendung theoretischer Modelle auf experimentelle Beobachtungen.

5. Anhang

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.signal import hilbert
from scipy.fftpack import fft, fftfreq

# Funktion zur Bestimmung der Hauptfrequenz über FFT mit Fehlerabschätzung
def get_fft_frequency(t, signal):
    n = len(signal) # Anzahl der Datenpunkte
    T = t[-1] - t[0] # Gesamtdauer des Signals
    dt = t[1] - t[0] # Abtastintervall

    # Frequenzen und FFT berechnen
    freqs = fftfreq(n, d=dt)
    fft_values = np.abs(fft(signal))

    # Nur positive Frequenzen betrachten
    positive_freqs = freqs[freqs > 0]
    positive_fft_values = fft_values[freqs > 0]

    # Hauptfrequenz bestimmen
    main_index = np.argmax(positive_fft_values)
    main_frequency = positive_freqs[main_index]

    # Fehlerabschätzung: Frequenzauflösung ist 1 / Gesamtdauer
    frequency_error = 1 / T

    return main_frequency, frequency_error

# Hauptcode
def main():

    data = np.loadtxt("data/beat - weak coupling.txt", delimiter=",")
    t = data[:, 0]
    signal = data[:, 1]

    # Einhüllende bestimmen mit Hilbert-Transformation
    analytic_signal = hilbert(signal)
    amplitude_envelope = np.abs(analytic_signal)
```

```
# Frequenzen bestimmen
small_freq, small_freq_err = get_fft_frequency(t, signal)
beat_freq_measured, beat_freq_err = get_fft_frequency(t, amplitude_envelope)

# Ergebnisse anzeigen
print(f"Frequenz der kleinen Schwingung: {small_freq:.3f} Hz      {small_freq_err:.3f} Hz")
print(f"Frequenz der Einhüllenden (Schwebung): {beat_freq_measured:.3f} Hz")
small_rad = small_freq*2*np.pi
big_rad = beat_freq_measured*2*np.pi
err1 = small_freq_err*2*np.pi
err2 = beat_freq_err*2*np.pi
print(f"{small_rad:.3f}      {err1:.3f}")
print(f"{big_rad:.3f}      {err2:.3f}")

# Plot des Signals und der Einhüllenden
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(t, signal, label="Originalsignal", color="red")
plt.plot(t, amplitude_envelope, label="Einhüllende (Amplitude)", color="blue")
plt.title("Signal mit Einhüllender")
plt.xlabel("Zeit [s]")
plt.ylabel("Amplitude")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

if __name__ == "__main__":
    main()
```

Quellen- und Literaturverzeichnis

- [1] CAPTAIN JONI: *pap1-tex-vorlage*. <https://github.com/captain-joni/pap1-tex-vorlage>. – [Online; Stand 28.08.2024]
- [2] DR. J. WAGNER: *Physikalisches Praktikum 1 für Studierende der Physik B.Sc.* <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Corona/PAP1.pdf>. – [Online; Stand 01/2014]