Versuch 211 - Gekoppelte Pendel

PAP 2.1

Teilnehmender Student: **Harish Mahendran**

Gruppe des Teilnehmenden: **14**

Kurs: **Vormittags**

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Motivation 1

1.2 Grundlagen aus der Physik 1

1.2.1 Symmetrische Schwingung 2

2 Durchführung **4**

2.1 Versuchskizzen 4

2.2 Messprotokoll 5

3 Auswertung **7**

3.1 Ungekoppelte Pendel 7

3.2 Gekoppelte Pendel 7

3.3 Kopplungsgrade 9

3.4 Verhältnis der Kopplungsgrade 9

4 Zusamenfassung und Diskussion **11**

1. Einleitung

1.1 Motivation

Das Konzept von gekoppelte Schwingungskörpern ist vor allem in der Festkörperphysik von Wichtigkeit. Hierbei werden die Atome und deren Bindungen als Gekopplete Schwinger betrachtet. Um dieses Konzept besser zu verstehen werden wir uns in diesem Versuch das Verhalten zweier Gekoppelter Pendel untersuchen. Hierbei werden verschiedene Kopplungsgrade und deren Eigenschwingungen anschauen.

1.2 Grundlagen aus der Physik

Auf ein einzelnes ungekoppeltes Pendel mit dem Trägheitsmoment J wirkt aufgrund der Schwerkraft das Direktionsmoment $D = mgL$, mit der Pendellänge L und der Masse m. Mithilfe der Kleinwinkelnäherung $\sin(\varphi) \approx \varphi$ ergibt sich die Differenzialgleichung

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi \tag{1.1}$$

die durch eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω gelöst wird:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{1.2}$$

Wird nun eine Feder mit der Federkonstante D_f jeweils im Abstand l zur Pendelachse an ein zweites Pendel montiert, ergibt sich das Direktionsmoment der Feder zu $D' = D_f l^2$. Es wirken damit zwei zusätzliche Drehmomente M_1 und M_2 auf die beiden Pendel:

$$M_1 = D'(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{1.3}$$

$$M_2 = D'(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{1.4}$$

die jeweils von den Auslenkwinkeln φ_1 und φ_2 abhängen. Die Differenzialgleichungen der gekoppelten Pendel sind:

$$J\ddot{\varphi}_1 = -D\varphi_1 + D'(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{1.5}$$

$$J\ddot{\varphi}_2 = -D\varphi_2 + D'(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{1.6}$$

Mithilfe der Substitutionen $u = \varphi_1 + \varphi_2$ und $v = \varphi_1 - \varphi_2$ lassen sich die beiden Differenzialgleichungen entkoppeln und man erhält:

$$u(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) \quad \text{mit } \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{J}} \tag{1.7}$$

$$v(t) = A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) \quad \text{mit } \omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D'}{J}} \tag{1.8}$$

Mit einer weiteren Substitution $\varphi_1 = \frac{1}{2}(u + v)$ und $\varphi_2 = \frac{1}{2}(u - v)$ erhält man die Bewegungsgleichungen der Auslenkwinkel der Pendel:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}A_1 \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2}B_1 \sin(\omega_1 t) + \frac{1}{2}A_2 \cos(\omega_2 t) + \frac{1}{2}B_2 \sin(\omega_2 t) \tag{1.9}$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}A_1 \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2}B_1 \sin(\omega_1 t) - \frac{1}{2}A_2 \cos(\omega_2 t) - \frac{1}{2}B_2 \sin(\omega_2 t) \tag{1.10}$$

Für bestimmte Anfangsbedingungen ergeben sich unterschiedliche Schwingungsmoden: Symmetrische Schwingungen, Asymmetrische Schwingungen und Schwebung. Diese sind in der folgenden Abbildung dargestellt:

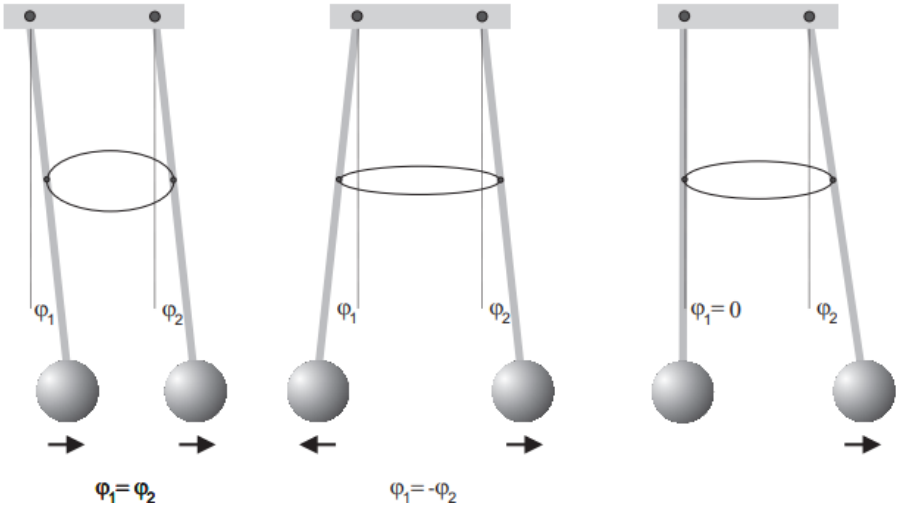


Abbildung 1.1: Abbildung 1:Links: Symmetrisch ; Mitte: Asymmetrisch ; Rechts: Schwebung (Quelle: Jens Wagner, "Physikalisches Anfängerpraktikum PAP 2.1", Stand:2025)

1.2.1 Symmetrische Schwingung

Für die symmetrische Schwingung werden beide Pendel um den gleichen Winkel ausgelenkt und gleichzeitig losgelassen. Die Anfangsbedingungen sind:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \tag{1.11}$$

Eingesetzt in die Bewegungsgeichungen (1.9) und (1.10) erhält man die Koeffizienten $A_1 = 2\varphi_0$, $A_2 = B_1 = B_2 = 0$ und damit die Bewegungsgleichungen:

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_0 \cos(\omega_1 t) \tag{1.12}$$

Die beiden Pendel schwingen damit harmonisch und phasengeich mit der Frequenz ω_1, womit die Kopplungsfeder keinen Einfluss auf die Bewegung hat.

Asymmetrische Schwingung

Bei der asymmetischen Schwingung werden beide Pendel gegenphasig um den gleichen Winkelbetrag ausgelenkt und gleichzeitig losgelassen. Die Anfangsbedingungen sind:

$$\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0 \tag{1.13}$$

Für die Koeffizienten erhält man $A_2 = 2\varphi_0$, $A_1 = B_1 = B_2 = 0$ und damit die Bewegungsgleichungen:

$$\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \varphi_0 \cos(\omega_2 t) \tag{1.14}$$

Die beiden Pendel schwingen harmonisch und gegenphasig mit der Frequenz ω_2, wobei ω_2 vom Direktionsmoment der Feder abhängt und die Schwingung ist damit gekoppelt ist.

Schwebungs-Schwingung

Für eine Schebungsschwingung wird ein Pendel um φ_0 ausgelenkt, während das andere in der Ruhelage verbleibt. Die Anfangsbedingungen sind gegeben als:

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \tag{1.15}$$

Für die Koeffizienten erhält man $A_1 = -A_2 = \varphi_0$, $B_1 = B_2 = 0$ und damit die Bewegungsgleichungen:

$$\varphi_1(t) = \varphi_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \tag{1.16}$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \tag{1.17}$$

Das anfangs ausgelenkte Pendel überträgt seine Schwingungsenergie auf das andere Pendel, bis es zum Ruhen kommt und der Vorgang sich umgekehrt wiederholt. Die Frequenz von den beiden einzelnen Pendeln ist $\omega_T = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$ und die Schwebungsfrequenz $\omega_I = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$, mit der die Energie eines einzelnen Pendels oszilliert.

Kopplungsgrad

Die Stärke der Kopplung wird durch den Kopplungsgrad κ beschrieben und ist:

$$\kappa = \frac{D'}{D + D'} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2} \tag{1.18}$$

Wobei die Gleichungen (1.7) und (1.8) verwendet wurden.

2. Durchführung

2.1 Versuchskizzen

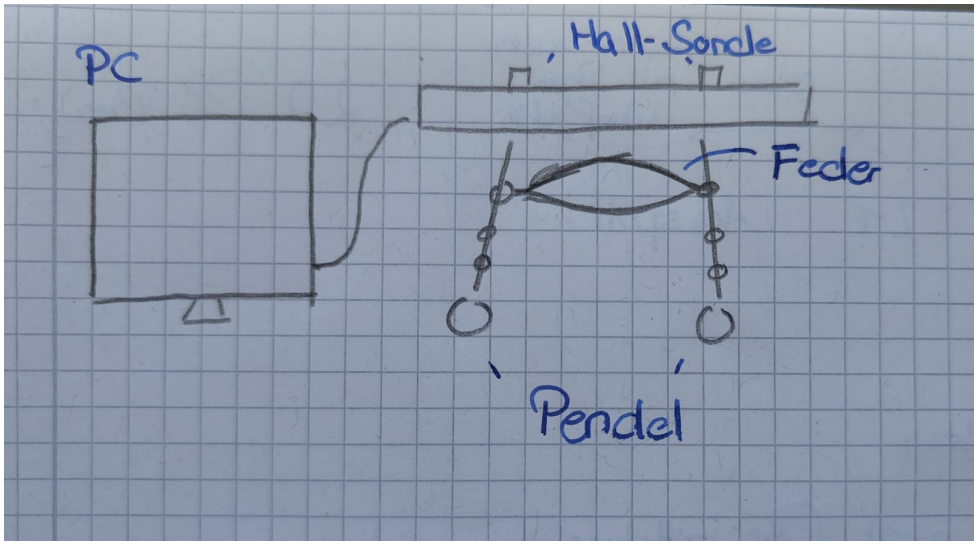


Abbildung 2.1: Skizze zum Versuchsteil

2.2 Messprotokoll

Messprotokoll 211: Gekoppelte Pendel

03.03.2025
Harish Mahendran
Jonas Schweer

Messaufbau:

- Zwei Pendel aus Messing
  $\rho = 7{,}5\ g/cm^3$
- Kopplungsfeder (Ring aus Federbronzeband)
- Fest montierter, magnetischer Winkelaufnehmer
- Analog-Digital Wandler
- PC

Aufgabe 1: Eigenschwingungsfrequenz des ungekoppelten Pendels

Zuerst regen wir beide Pendel an, ohne sie mit der Feder zu verbinden. Mit dem PC messen wir die Frequenz, indem wir eine Fouriertransformation durchführen. Außerdem speichern wir die Messwerte.

$\mu = 3{,}892\ rad/s$
$\sigma = 0{,}154\ rad/s$

Aufgabe 2: Symmetrische und antisymmetrische Eigenschwingung

Nun befestigen wir die Ringfeder in einer der markierten Vorrichtungen. Wir notieren den Abstand der Befestigung zur Pendelachse.
Anschließend lenken wir die Pendel sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch aus und starten die Messung. Wir messen so die Frequenz bei drei verschiedenen Federpositionen und speichern die Werte ab.

Lage	Abstand Pendelachse [cm]	Symmetrische Frequenz ω_{sym} $[\frac{rad}{s}]$	Asymmetrische Frequenz ω_{asym} $[\frac{rad}{s}]$
Oben	$19{,}20 \pm 0{,}20$	$3{,}91 \pm 0{,}08$	$4{,}10 \pm 0{,}08$
Mittel	$29{,}20 \pm 0{,}20$	$3{,}90 \pm 0{,}08$	$4{,}33 \pm 0{,}08$
Unten	$39{,}20 \pm 0{,}20$	$3{,}90 \pm 0{,}08$	$4{,}65 \pm 0{,}09$

Tabelle 1: Symmetrische und Asymmetrische Eigenfrequenzen bei verschiedenen Kopplungsgraden

Aufgabe 3: gemischte Anregung

Wir nutzen wieder die selben Kopplungen wie zuvor, jedoch halten wir ein Pendel in der Ruhelage fest, während wir das andere auslenken. Mit der Fouriertransformation bestimmen wir Schwebungs- und Schwingungsfrequenzen.

Lage	Abstand Pendelachse [cm]	Schwebungsfrequenz ω $[\frac{rad}{s}]$	Schwingungsfrequenz ω_{+} $[\frac{rad}{s}]$
Oben	$19,20 \pm 0,20$	$3,91 \pm 0,04$	$4,11 \pm 0,05$
Mittel	$29,20 \pm 0,20$	$3,91 \pm 0,05$	$4,34 \pm 0,05$
Unten	$39,20 \pm 0,20$	$3,92 \pm 0,06$	$4,66 \pm 0,07$

Tabelle 2: Frequenzen gemischte Auslenkung

Mit dem Curser messen wir auch die Periodendauer

Lage	Abstand Pendelachse [cm]	Periodendauer Schweb. T_{-} [s]	Periodendauer Schwing. T_{+} [s]
Oben	$19,20 \pm 0,20$	$64 \pm 0,8$	$1,64 \pm 0,12$
Mittel	$29,20 \pm 0,20$	$29,30 \pm 0,14$	$1,60 \pm 0,03$
Unten	$39,20 \pm 0,20$	$16,93 \pm 0,28$	$1,57 \pm 0,05$

Tabelle 3: Periodendauer gemischte Auslenkung

Aufgabe 4: Gekoppelte elektrische Schwingkreise

Wir schauen uns qualitativ einen gekoppelten elektrischen Schwingkreis an.

Wir sehen, dass die Schwebungsfrequenz sinkt, wenn wir den Abstand der Spulen erhöhen und so den Kopplungsgrad senken.

3. März Y. Obispo Gloster

3. Auswertung

3.1 Ungekoppelte Pendel

Aus dem Messprotokoll ist folgende Kreisfrequenz für den ungekoppelten Pendel zu entnehmen

$$\omega = (3,89 \pm 0,15)\, rad \cdot Hz$$

3.2 Gekoppelte Pendel

Die Frequenzen der verschiedenen Kopplungsarten erhalten, wir aus der Fourieranalyse. Der Fehler ergibt sich aus der Standardabweichung.

	Symmetrisch $\omega_1[rad \cdot Hz]$	Assymmetrisch $\omega_2[rad \cdot Hz]$
Schwach	$3,91 \pm 0,08$	$4,10 \pm 0,08$
Mittel	$3,90 \pm 0,08$	$4,33 \pm 0,08$
Stark	$3,90 \pm 0,08$	$4,65 \pm 0,09$

Tabelle 3.1: Kreisfrequenzne bei symmetrischer und asymmtrischer Kopplung

Man sieht hier, dass bei der Symmetrischen Schwingung die Kreisfrequenz sich nicht verändert. Dies lässt sich dadurch erklären, dass hier die Feder nicht ausgelenkt wird , also diesen kein Einfluss auf die Schwingung hat.
In der folgenden Tabelle sind die Frequenzen aus der Fourieranalyse folgende folgende Kreisfrequenzen bestimmen.

	$\omega_1[rad \cdot Hz]$	$\omega_2[rad \cdot Hz]$
Schwach	$3,91 \pm 0,04$	$4,11 \pm 0,05$
Mittel	$3,91 \pm 0,05$	$4,34 \pm 0,05$
Stark	$3,92 \pm 0,06$	$4,66 \pm 0,07$

Tabelle 3.2: Kreisfrequenzen bei Schwebungskopplung

Vergleicht man die Werte für ω_2 aus 3.2 und 3.1 so erhält man folgende σ-Abweichungen

	σ-Abw.
Schwach	0,11
Mittel	0,11
Stark	0,09

Tabelle 3.3: Vergleich der Kreisfrequenz der Asymmetrischen Schwingung ω_2

Man kann hier noch die Kreisfrequenzen für die Symmetrische Schwingung mit der Kreisfrequenz der ungekoppelte Pendel vergleichen, da bei der symmetrischen Schwingung die feder nicht zur Periodendauer beiträgt.

	Symmetrische Schwingung	Schwebung
Schwach:	0,12	0,13
Mittel:	0,06	0,13
Stark :	0,06	0,19

Tabelle 3.4: Vergleich der Kreisfrequenz der Symmetrischen Schwingung ω_1

Man hat hier noch per Hand die Frequenzen ω_{I} und ω_{II} bestimmt. Diese sind in der folgenden Tabelle aufgetragen:

	Schwinngungs-Kreisfrequenz ω_{I} $[rad \cdot Hz]$	Schwebungs-Kreisfrequenz ω_{II} $[rad \cdot Hz]$
Schwach	$3,83 \pm 0,28$	$0,0982 \pm 0,0012$
Mittel	$3,927 \pm 0,07$	$0,2144 \pm 0,0010$
Stark	$4,00 \pm 0,12$	$0,3711 \pm 0,006$

Tabelle 3.5: Per Cursor gemessene Schwingungs- und Schwebungs- Kreisfrequenz

Hierbei wurde folgende Gleichung

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{3.1}$$

und die Fehlerformel

$$\Delta\omega = \frac{\partial\omega}{\partial T} \tag{3.2}$$

$$= \omega\frac{\Delta T}{T} \tag{3.3}$$

verwendet. Theoretisch sind folgende Kreisfrequenzen zu erwarten:

$$\omega_{\mathrm{I}_{theo}} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \qquad \omega_{\mathrm{II}_{theo}} = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \tag{3.4}$$

Verwendet man nun die Messwerte aus 3.2 so erhält man folgende Werte

	Schwingungs-Kreisfrequenz $\omega_{\mathrm{I}_{theo}}$ $[rad \cdot Hz]$	Schwebungs-Kreisfrequenz $\omega_{\mathrm{II}_{theo}}$ $[rad \cdot Hz]$
Schwach	$4,01 \pm 0,03$	$0,1 \pm 0,03$
Mittel	$4,125 \pm 0,04$	$0,215 \pm 0,04$
Stark	$4,29 \pm 0,05$	$0,37 \pm 0,05$

Tabelle 3.6: Theoretische Schwingungs- und Schwebungs- Kreisfrequenz

Die σ-Abweichung zwischen den theoretischen und experimentell bestimmtene Werten sind in der folgenden Tabelle aufgetragen

	Schwingungs-Kreisfrequenz ω_{II} $[rad \cdot Hz]$	Schwebungs-Kreisfrequenz ω_{I} $[rad \cdot Hz]$
Schwach	0,64	0,06
Mittel	2,5	0,02
Stark	2,23	0,02

Tabelle 3.7: Vergleich der Kreisfrequenzen bei der Schwebung

3.3 Kopplungsgrade

Um die Kopplungsgrade aus den Periodendauer auszuerechnen verwenden wir folgenden Formel aus dem Skript

$$\kappa = \frac{\left(\frac{1}{T_I} + \frac{1}{T_{II}}\right)^2 - \left(\frac{1}{T_{II}} - \frac{1}{T_I}\right)^2}{\left(\frac{1}{T_{II}} - \frac{1}{T_I}\right)^2 + \left(\frac{1}{T_I} + \frac{1}{T_{II}}\right)^2} \tag{3.5}$$

(Quelle: Jens Wagner, "Physikalisches Anfängerpraktikum PAP 2.1", Stand:2025)und daraus die Fehlerformel:

$$\kappa \sqrt{\frac{T_1^6 dT_2^2 + T_1^4 T_2^2 dT_1^2 - 2T_1^4 T_2^2 dT_2^2 - 2T_1^2 T_2^4 dT_1^2 + T_1^2 T_2^4 dT_2^2 + T_2^6 dT_1^2}{T_1^2 T_2^2 \left(T_1^4 + 2T_1^2 T_2^2 + T_2^4\right)}} \tag{3.6}$$

Die Fehlerformel wurde mit dem Fehlerrechner aus dem Skript bestimmt. Die Werte wurden auch mit diesem Programm bestimmt.

	Kopplungsgrad κ $[-]$
Schwach	$0,05 \pm 0,004$
Mittel	$0,11 \pm 0,004$
Stark	$0,18 \pm 0,006$

Tabelle 3.8: Kopplungsgrade

3.4 Verhältnis der Kopplungsgrade

In der Theorie entspricht das Verhältnis zweier Kopplungsgrade dem Quadrat des Verhältnisses der zugehörigen Koppellängen:

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = (\frac{l_1}{l_2})^2 \tag{3.7}$$

Die Koppellängen sind gegeben als

$$\text{Schwach: } l_1 = (19,20 \pm 0,20)\, cm \tag{3.8}$$

$$\text{Mittel : } l_2 = (29,20 \pm 0,20)\, cm \tag{3.9}$$

$$\text{Stark : } l_3 = (39,20 \pm 0,20)\, cm \tag{3.10}$$

Der Fehler der linken Seite der Gleichung (3.7) lässt sich nach Gaussscher Fehlerfortpflanzung wie folgt

$$\Delta(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}) = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\sqrt{(\frac{\Delta\kappa_1}{\kappa_1})^2 + (\frac{\Delta\kappa_2}{\kappa_2})^2} \tag{3.11}$$

und für die rechte Seite:

$$\Delta(\frac{l_1}{l_2})^2 = (\frac{l_1}{l_2})^2\sqrt{2(\frac{\Delta l_1}{l_1})^2 + 2(\frac{\Delta l_2}{l_2})^2} \tag{3.12}$$

Man erhält dann für die rechte Seite

$$\text{Schwach/ Mittel : } 0,45 \pm 0,04 \tag{3.13}$$

$$\text{Schwach/ Stark: } 0,28 \pm 0,024 \tag{3.14}$$

$$\text{Mittel / Stark: } 0,61 \pm 0,03 \tag{3.15}$$

und für die linke Seite:

$$\text{Schwach/ Mittel : } 0,432 \pm 0,008 \tag{3.16}$$

$$\text{Schwach/ Stark: } 0,240 \pm 0,004 \tag{3.17}$$

$$\text{Mittel / Stark: } 0,562 \pm 0,007 \tag{3.18}$$

Daraus ergeben sich folgende σ-Abweichungen:

$$\text{Schwach/ Mittel : } 0,44 \tag{3.19}$$

$$\text{Schwach/ Stark: } 1,64 \tag{3.20}$$

$$\text{Mittel / Stark: } 1,56 \tag{3.21}$$

4. Zusamenfassung und Diskussion

In diesem Versuch wurde die Kopplung zweier Pendel untersucht. Dabei wurden die Kreisfrequenzen der symmetrischen und antisymmetrischen Eigenschwingung und der Schwebung für verschiedene Kopplungsgrade betrachtet. Anschließend erfolgte die quantitative Berechnung der Kopplungsgrade. Zunächst bestimmte man die Eigenfrequenzen der ungekoppelten Pendel. Um sicherzustellen, dass die Bewegungsgleichungen korrekt sind, wurden die Pendel nur um 2 cm ausgelenkt, sodass die Kleinwinkelnäherung angewendet werden kann. Dazu verhält sich die verwendete Feder nur bei sehr kleinen Auslenkungen näherungsweise linear. Da die Luftreibung proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist , konnte durch kleine Auslenkungen auch die Messgenauigkeit verbessert werden.

Danach wurden die Frequenzen für die symmetrische, antisymmetrische Eigenschwingung und die Schwebung bei drei unterschiedlichen Kopplungsgraden der Feder bestimmt. Die Variation des Kopplungsgrades wurde durch das Einspannen der Feder an verschiedenen Aufhängungen ermöglicht, wodurch sich die Kopplungslänge veränderte. Eine mögliche Fehlerquelle in diesem Versuch ist es, dass man die einzelnen Pendel nicht exakt um die selbe Strecke auslenken lassen. Dadurch kann man vorallem bei der starken Kopplung eine Schwebung sehen. Es gab auch unerwünschte Schwingungen senkrecht zur eigentlichen Schwingungsebene auf. Präzisere Messungen wären mithilfe einer geeigneten Vorrichtung und eines optimierten Startmechanismus möglich gewesen.
Die Frequenzanalyse wurde mithilfe der Fourier-Transformation des verwendeten Programms durchgeführt. Während das Programm zu Beginn eine Gauß-Kurve automatisch anpasste, um Frequenz und zugehörigen Fehler zu bestimmen, war bei den doppelten Gauß-Kurven eine manuelle Anpassung erforderlich. Dies führte dazu, dass einige Werte größere Fehler aufwiesen, was auf eine zu hohe Standardabweichung der Gauß-Kurven zurückzuführen ist.
Die in Tabelle 3.3 dargestellten σ-Abweichungen liegen unterhalb der 3σ Grenze, weshalb man signifikante Messfehler ausschließen kann. Auch weicht die ursprünglich gemessene Kreisfrequenz ω höchstens um $0,19\sigma$ von der Frequenz der symmetrischen Schwingung ab. Wie erwartet nimmt die Kreisfrequenz der antisymmetrischen Schwingung mit steigender Kopplung zu, da durch die zusätzliche Stauchung und Dehnung der Feder verstärkte Rückstellkräfte wirken. Auch für die Frequenzen ω_{II} und ω_{II} der gemischten Schwingung sowie der symmetrischen und antisymmetrischen Schwingung ergeben sich keine signifikanten Abweichungen.
Die Berechnung der Kopplungsgrade ergab, dass diese bei stärkeren Kopplung ansteigen, was der theoretischen Erwartung entspricht.
Zum Abschluss wurde das Verhältnis der Kopplungsgrade zu den Koppellängen analysiert. Während das Verhältnis der Koppellängen mit einem maximalen Fehler von nur

$1,56\sigma$ bestimmt werden konnte.Es wurde also der theoretische Zusammenhang durch die experimentellen Ergebnisse bestätigt.