Versuch 212 - Viskosität

PAP 2.1

Teilnehmender Student: **Harish Mahendran**

Gruppe des Teilnehmenden: **14**

Kurs: **Vormittags**

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**
1.1 Motivation . . . 1
1.2 Grundlagen aus der Physik . . . 1
1.2.1 Innere Reibung . . . 1
1.2.2 Laminare und turbulente Strömung . . . 1
1.2.3 Stokes'sche Reibung . . . 2
1.2.4 Hagen-Poiseuille-Gesetz . . . 2

2 Durchführung **4**
2.1 Versuchskizze . . . 4
2.2 Messprotokoll . . . 5

3 Auswertung **7**
3.1 Viskosität durch Fallgeschwindigkeit . . . 7
3.2 Kritische Reynoldszahl . . . 10
3.3 Viskosität nach Hagen-Poiseuille . . . 12
3.4 Reynoldszahl der Kapillare . . . 12

4 Zusamenfassung und Diskussion **14**

5 Python-Code **15**

1. Einleitung

1.1 Motivation

1.2 Grundlagen aus der Physik

1.2.1 Innere Reibung

Bewegt sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit in einem Medium, so benötigt dieser auch ohne Beschleunigung eine konstante Kraft, um die Bewegung aufrechtzuerhalten. Dies ist auf zwischenmolekulare Kräfte zwischen den Molekülen des Mediums und der Oberfläche des Körpers zurückzuführen. Diese Reibung wird von der Viskosität (Zähigkeit) der Flüssigkeit beeinflusst.

Veranschaulicht werden kann dies durch zwei Platten im Abstand z zueinander, die durch eine Flüssigkeit getrennt sind. Bewegt sich nun eine Platte mit der konstanten Geschwindigkeit v, während die andere Platte ruht, ist eine Kraft F_r notwendig, um die konstante Geschwindigkeit zu erhalten. Die Kraft entsteht dabei durch die innere Reibung der Flüssigkeit. Dabei haften Flüssigkeitsschichten direkt an den Oberflächen der Platten. Dazwischen gleiten die Flüssigkeitsschichten mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aneinander vorbei. Für die Reibungskraft gilt

$$F_r = \eta A \frac{v}{z} \quad \text{bzw.} \quad F_r = \eta A \frac{dv}{dz} \tag{1.1}$$

mit der Flüssigkeitsspezifischen dynamischen Viskosität η (Zähigkeit), der Geschwindigkeit v der Platte und dem Abstand z zwischen den Platten.

1.2.2 Laminare und turbulente Strömung

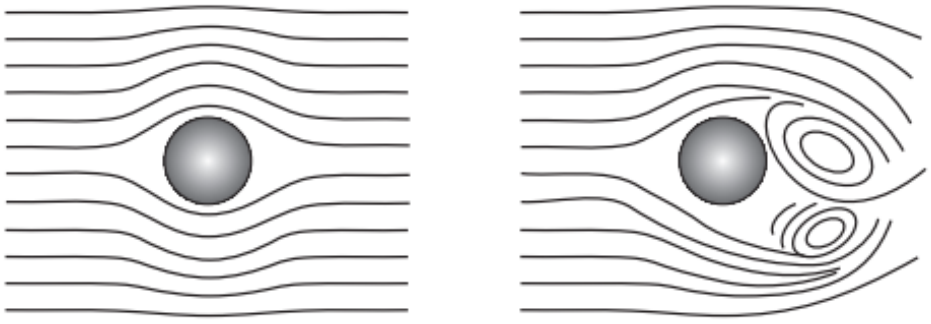


Abbildung 1.1: links: Laminare Strömung, rechts: turbulente Strömung

Gleiten wie in 1.1.1 einzelne Flüssigkeitsschichten aneinander vorbei, ohne sich dabei zu vermischen, handelt es sich um laminare Strömung. Bei größeren Geschwindigkeiten oder speziellen Körpergeometrien ist dies nicht mehr der Fall und es kommt zu Wirbeln, die die Schichten miteinander vermischen. Der entstehende Strömungswiderstand ist bei

dieser turbulenten Strömung größer als im laminaren Fall, womit auch die Newtonsche Reibungsgesetz (Gleichung (1.1) seine Gültigkeit verliert.

Mit der dimensionslosen Reynolds-Zahl kann abgeschätzt werden, ob sich eine Flüssigkeit laminar oder turbulent verhält. Diese ist durch das Verhältnis der doppelten kinetischen Energie E_{kin} zu den Reibungsverlusten W_{Reibung} definiert:

$$Re = \frac{2E_{\text{kin}}}{W_{\text{Reibung}}} = \frac{\rho v L}{\eta} \tag{1.2}$$

ρ ist die Dichte der Flüssigkeit, v die mittlere Strömungsgeschwindigkeit und L der Rohrdurchmesser. Die kritische Reynolds-Zahl, bei der es zu einer turbulenten Strömung kommt, hängt vom jeweiligen Experiment ab.

1.2.3 Stokes'sche Reibung

Nach dem Stokes'schen Gesetz wirkt auf eine Kugel mit dem Radius r, die sich mit konstanter Geschwindigkeit v durch eine Flüssigkeit bewegt, die Reibungskraft:

$$F_r = 6\pi\eta r v \tag{1.3}$$

Mithilfe des Stokes'schen Gesetzes (abgeleitet aus der Newtonschen Reibung) lässt sich die Viskosität η einer Flüssigkeit mithilfe eines Kugelfallviskosimeters bestimmen. Auf die Kugel wirken dabei die Kräfte:

$$F_g + F_A + F_r = 0 \tag{1.4}$$

mit der Gewichtskraft $F_g = \rho_k V_k g$, der Auftriebskraft $F_A = -\rho_f V_k g$ und der Reibungskraft $F_r = 6\pi\eta r v_s$ (ρ_s und ρ sind die Dichten der Flüssigkeit und der Kugel). Für die Viskosität η folgt:

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{(\rho_k - \rho_f) r^2 g}{v_s} \tag{1.5}$$

1.2.4 Hagen-Poiseuille-Gesetz

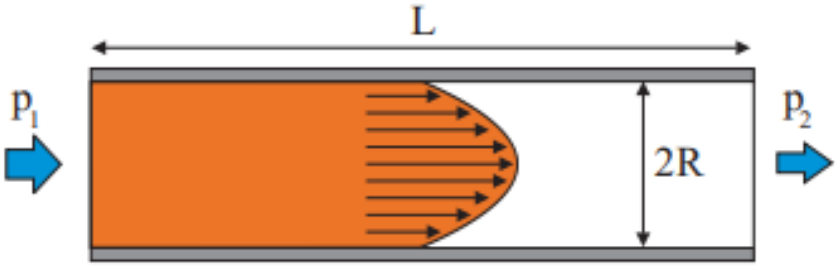


Abbildung 1.2: Laminare Rohrströmung

Die Viskosität einer Flüssigkeit kann ebenfalls mithilfe des Volumenstroms einer laminaren Rohrströmung bestimmt werden. Bei einer Rohrlänge L, einem Radius R und einer Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ wirkt die Kraft

$$F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2) \tag{1.6}$$

sowie die Newtonsche Reibungskraft

$$F_r = -2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} \tag{1.7}$$

Bei einer konstanten Geschwindigkeit müssen diese Kräfte im Gleichgewicht sein ($F_p = F_r$), woraus folgt:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L} r \tag{1.8}$$

Mit einer Integration über r sowie der Randbedingung $v(R) = 0$ erhält man:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) \tag{1.9}$$

Über eine weitere Integration über die gesamte Querschnittsfläche erhält man den Volumenstrom:

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^R 2\pi r v(r)\, dr = \frac{\pi (p_1 - p_2) R^4}{8\eta L} \tag{1.10}$$

2. Durchführung

2.1 Versuchskizze

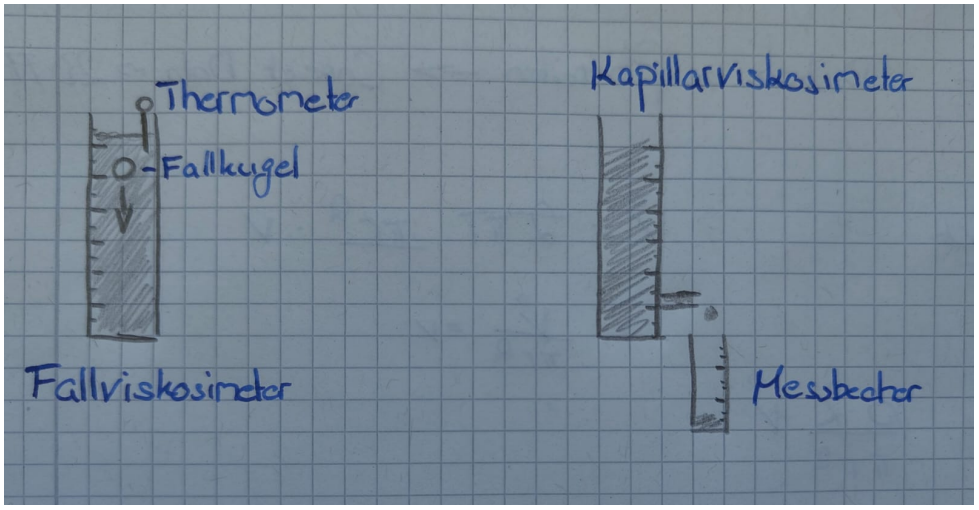


Abbildung 2.1: Links: Skizze zur Fallgeschwindigkeitsmessung, Rechts: Skizze zur Hagen-Poiseuille Messung

2.2 Messprotokoll

Messprotokoll 212: Viskosität

05.03.25
Harish Mahendran
Jonas Schwer

Messaufbau: - Messzylinder aus Hartglas, gefüllt mit Polyethylenglycol
- Kugeln aus Polyacetal mit verschiedenen Durchmessern
- Thermometer
- Maßstab
- Pinzetten
- Stoppuhren
- Bechergläser

Aufgabe 1: Kugelfallviskometer

Wir legen die Fallstrecke der Kugeln fest: $s = \begin{cases} 200\,\text{mm} & d > 5\,\text{mm} \\ 100\,\text{mm} & 2\,\text{mm} \leq d \leq 5\,\text{mm} \\ 50\,\text{mm} & 1\,\text{mm} = d \end{cases}$

Nun lassen wir von jedem Durchmesser fünf Kugeln in der Flüssigkeit sinken, und messen deren Falldauer durch den bestimmten Bereich mittels Handstoppuhren. Auch notieren wir immer die Temperatur des Polyethylenglycols.

Der Innendurchmesser des Fallgefäß lautet: $d_g = 7{,}5\,\text{mm}$

Durchmesser d[mm]	T_1 [s]	T_2 [s]	T_3 [s]	T_4 [s]	T_5 [s]	ϑ [°C]	$\bar{T}$ [s]
1	66,47	68,61	66,23	69,23	67,00	22	67,5 ± 1,2
2	42,76	44,76	44,86	46,62	46,36	22	45,1 ± 1,4
3	20,37	21,25	19,36	19,84	19,7	22	20,1 ± 0,7
4	12,78	12,93	12,87	12,33	12,65	22	12,71 ± 0,21
5	7,37	8,07	7,54	7,31	7,67	22	7,59 ± 0,27
6	12,31	12,42	12,02	12,02	12,09	22	12,17 ± 0,16
7	9,07	9,15	9,01	9,21	9,21	22	9,13 ± 0,08
8	7,34	7,53	7,50	7,28	7,43	22	7,42 ± 0,09
9	6,12	6,48	6,37	6,48	6,14	22	6,32 ± 0,16

Fehler: 25 µm — Fehler: Standardfehler der Messung — Fehler: ± 1

Tabelle 1: Fallzeit bei verschiedenen Kugeldurchmessern

Aufgabe 2: Kapillarviskometer

Wir öffnen den Ausfluss des Rohres. Sobald sich der Flüssigkeitsstrom stabilisiert hat, lesen wir den Füllstand h_A ab, stellen einen Messzylinder unter den Ausguss und starten die Stoppuhr. Wir notieren alle 5 cm^3 Volumen die Zeit.

V [cm^3]	T [s]
5	130
10	257
15	362
20	535
25	674

$h_A = (92 \pm 1)$ mm (Anfangshöhe)

$h_E = (87 \pm 1)$ mm (Endhöhe)

$T = (22 \pm 1)°C$ (Raumtemp)

$\Delta T = 7$ s

5. März Y. Obispo

Tabelle 2: Zeit pro geflossenes Volumen

3. Auswertung

3.1 Viskosität durch Fallgeschwindigkeit

Die Dichte des Polyethylenglykol ist aus folgendem Diagramm abzulesen

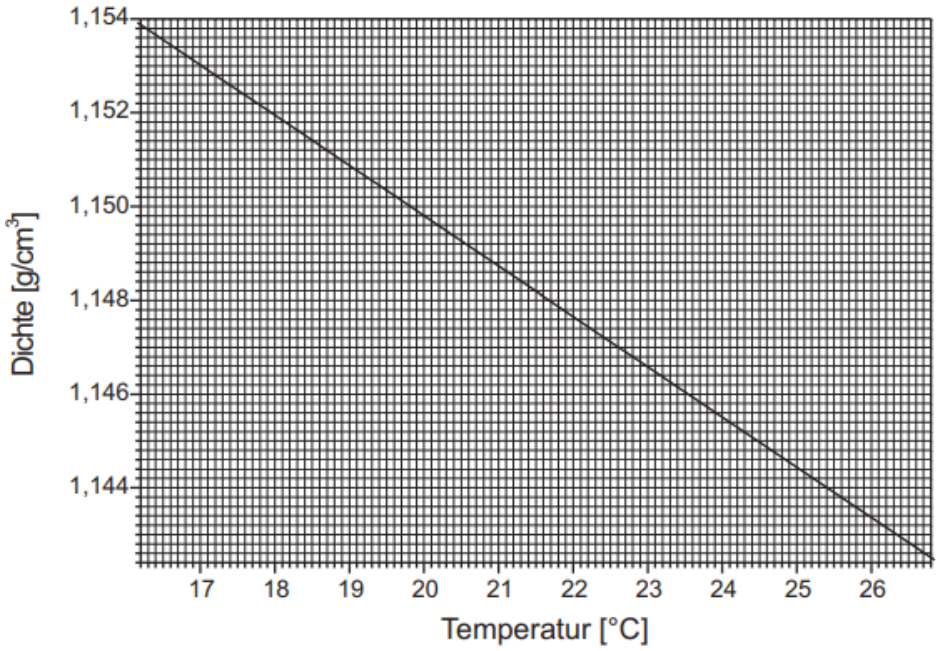


Abbildung 3.1: Temperaturabhängigkeit der Dichte des Polyethylenglykol (Quelle: Jens Wagner, "Physikalisches Anfängerpraktikum PAP 2.1", Stand:2025)

die Temperatur der Polyethylenglykol ist dem Messprotokoll zu entnehmen. Die Temperatur der Flüssigkeit:

$$T = (22,0 \pm 1,0)°C$$

und damit eine Dichte von

$$\rho = (1,1476 \pm 0,0012)\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

Die Fallzeiten der verschiedenen Kugeln, der zugehörige Mittelwert und der mittlere Fehler des Mittelwerts sind in Tabelle (1) des Messprotokolls zu finden.Der Radius der Kugeln hat einen Fehler von $\Delta r = 0,013\,mm$. Nach Gauss ergibt dann der Fehler vom Radius zum Quadrat

$$\Delta(r^2) = 2r\Delta r \tag{3.1}$$

Die Sinkgeschwindigkeit lässt sich klassisch berechnen

$$v_s = \frac{s}{\bar{t}} \tag{3.2}$$

wobei s die Fallstrecke und $\bar{t}$ die Durchschnittliche Fallzeit ist. Der Fehler der Fallgeschwindigkeit

$$\Delta v = v\sqrt{(\frac{\Delta s}{s})^2 + (\frac{\Delta \bar{t}}{\bar{t}})^2} \tag{3.3}$$

Die Sinkgeschwindigkeiten sind in der folgenden Tabelle aufgetragen

$r[mm]$	$v_s[\frac{mm}{s}]$
4,5	$31,6 \pm 0,8$
4,0	$26,9 \pm 0,3$
3,5	$21,91 \pm 0,19$
3,0	$16,43 \pm 0,22$
2,5	$13,2 \pm 0,5$
2,0	$7,87 \pm 0,14$
1,5	$4,98 \pm 0,18$
1,0	$2,22 \pm 0,07$
0,5	$0,740 \pm 0,015$

Tabelle 3.1: Durschnittliche Fallgeschwindigkeiten der Einzelnen Kugeln

Das Stokes'sche Gesetz gilt nur für unendlich ausgedehnte Flüssigkeiten . Mithilfe der Ladenburg'schen Korrektur λ lässt sich dies im Stokes'schen Gesetz berücksichtigen:

$$F_r = 6\pi\eta r v\lambda \tag{3.4}$$

mit der Korrektur λ:

$$\lambda = (1 + 2,1\frac{r}{R}) \tag{3.5}$$

Wobei R der Radius des Fallrohres ist, dieser ist gegeben als

$$R = 75mm$$

Dadurch ist die korrigierte Geschwindigkeit

$$v_{korr} = v\lambda \tag{3.6}$$

und der Fehler

$$\Delta v_{korr} = v_{korr}\sqrt{(\frac{\Delta v}{v})^2 + (\frac{\Delta \lambda}{\lambda})^2} \tag{3.7}$$

Beide Geschwindigkeitswerte sind gegen den Kugelradius im folgenden Diagramm aufgetragen:

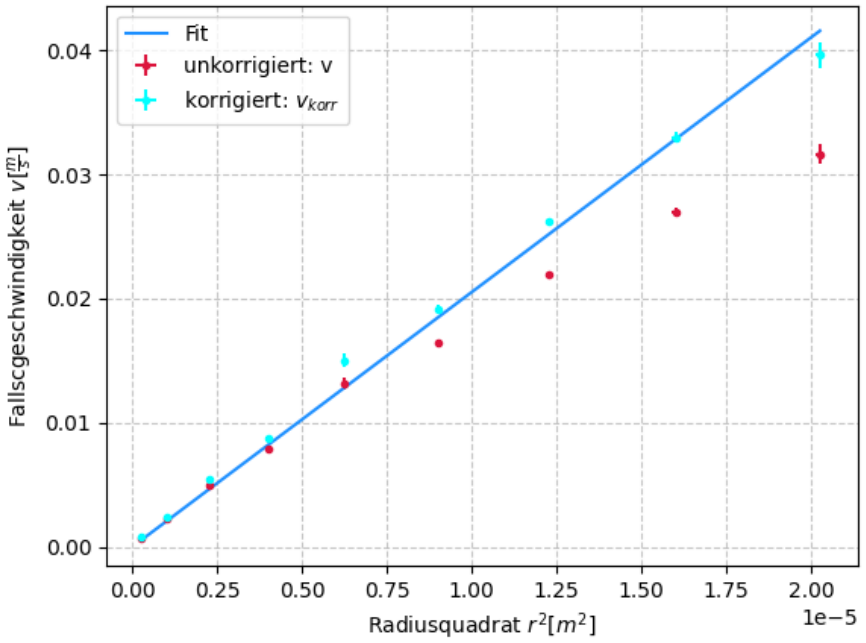


Abbildung 3.2: Sinkgeschwindigkeit gegen Radiusquadrat

Hierbei wurde eine Ausgleichsgerade durch die korrigierten Werte gelegt. Die Steigung der Geraden m:

$$m = \frac{v}{r^2} = 1825 \pm 0,63 \frac{\frac{m}{s}}{m^2}$$

Man kann daraus nun die Viskosität mit Gleichung (1.5) berechnen. Durch einsetzten erhält man

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{(\rho_k - \rho_f)g}{m} \tag{3.8}$$

Der Fehler lässt sich dann nach Gauss wie folgt berechnen

$$\Delta\eta = \eta \sqrt{(\frac{\Delta\rho_f}{(\rho_k - \rho_f)})^2 + (\frac{\Delta\rho_k}{\rho_f - \rho_k})^2 + (\frac{\Delta m}{m})^2} \tag{3.9}$$

Man erhält dann folgenden Wert für die Viskosität:

$$\eta = (0,284 \pm 0,018) Pa \cdot s$$

Mit der bestimmten Viskosität kann man nun auch noch die theoretische zu erwartenden

Fallgeschwindigkeit v_{lam} berechnen:

$$v_{lam} = \frac{2}{9}\frac{(\rho_k - \rho_f)gr^2}{\eta} \tag{3.10}$$

und den Fehler

$$v_{lam} = v_{lam}\sqrt{(\frac{\Delta\rho_f}{(\rho_k - \rho_f)})^2 + (\frac{\Delta\rho_k}{\rho_f - \rho_k})^2 + (\frac{2\Delta r}{r})^2 + (\frac{\Delta\eta}{\eta})^2} \tag{3.11}$$

Diese Werte sind in der folgenden Tabelle neben der gemessenen Sinkgeschwindigkeiten mit der Korrekur v_{korr} eingetragen. Dazu wird noch die σ-Abweichung zwischen diesen Werten ausgerechnet. Allgemein lässt sich die σ-Abweichung wie folgt berechnen

$$\sigma = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}} \tag{3.12}$$

Diese Formel wird im weitern Verlauf der Auswertung verwendet um σ-Abw. zu berechnen.

Kugelradius $r^2[mm^2]$	$v_{korr}[\frac{mm^3}{s}]$	$v_{lam}[\frac{mm^3}{s}]$	σ-Abw.
4,5	$31,6 \pm 0,8$	$37,0 \pm 2,4$	2,12
4,0	$26,9 \pm 0,3$	$29,2 \pm 1,9$	1,20
3,5	$21,91 \pm 0,19$	$22,4 \pm 1,5$	0,30
3,0	$16,43 \pm 0,22$	$16,4 \pm 1,1$	0
2,5	$13,2 \pm 0,5$	$11,4 \pm 0,8$	1,91
2,0	$7,87 \pm 0,14$	$7,30 \pm 0,5$	1,10
1,5	$4,98 \pm 0,18$	$4,11 \pm 0,29$	2,55
1,0	$2,22 \pm 0,07$	$1,83 \pm 0,15$	2,36
0,5	$0,740 \pm 0,015$	$0,756 \pm 0,006$	0,99

Tabelle 3.2: Vergleich der gemessenen Fallgeschwindigkeiten (mit Korrektur) v_{korr} mit v_{lam}

Man sieht dass die gemessenen Werte innerhalb einer 3σ-Grenze liegen, also man systematische Messfehler ausschließen kann. Bis auf die λ-Korrektur, die hier mit betrachtet worden ist.

3.2 Kritische Reynoldszahl

Die Reynoldszahl lässt sich hier wie folgt berechnen:

$$Re = \frac{2\rho_f v r}{\eta} \tag{3.13}$$

Der Fehler lässt sich nach Gauss wie folgt berechnen

$$\Delta Re = Re\sqrt{(\frac{\Delta\rho_f}{(\rho_f)})^2 + (\frac{\Delta v}{v})^2 + (\frac{2\Delta r}{r})^2 + (\frac{\Delta\eta}{\eta})^2} \tag{3.14}$$

In der folgenden Tabelle sind die Reynoldszahlen für die einzelen Kugel eingetragen:

$r[mm]$	Re
4,5	$1,15 \pm 0,08$
4,0	$0,88 \pm 0,06$
3,5	$0,62 \pm 0,04$
3,0	$0,40 \pm 0,03$
2,5	$0,27 \pm 0,019$
2,0	$0,132 \pm 0,008$
1,5	$0,064 \pm 0,004$
1,0	$0,0177 \pm 0,0012$
0,5	$0,0037 \pm 0,0007$

Tabelle 3.3: Reynoldszahl der verschiedenen Kugeln

Im folgenden Diagramm ist nun das Verhältnis der Geschwindigkeiten $\frac{v_s}{v_{lam}}$ gegen die Reynoldszahl aufgetragen

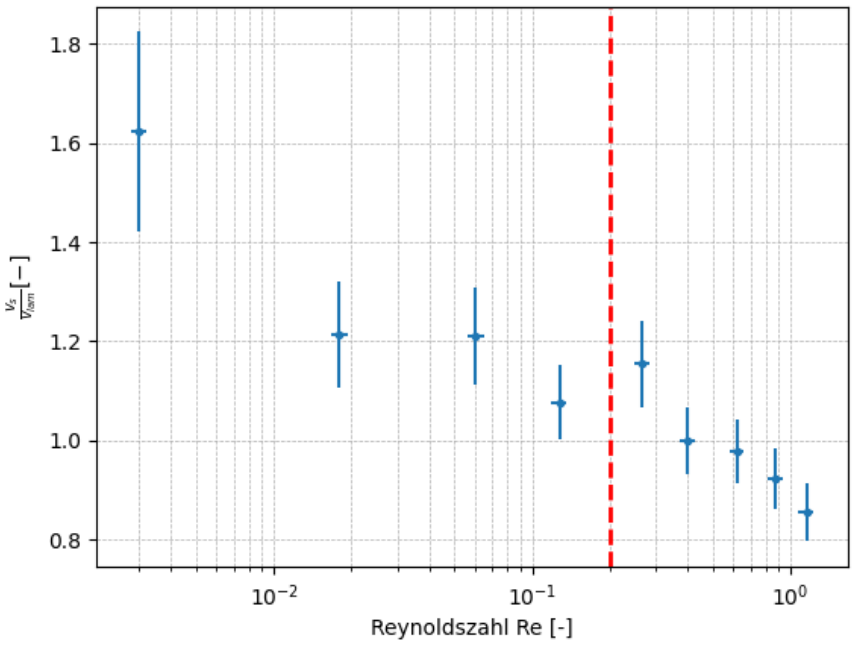


Abbildung 3.3: $\frac{v_s}{v_{lam}}$ gegen Re

Hierbei kann man ein Knick bei der kritsichen Reynoldszahl von etwa

$$Re_{krit} = 0,2 \pm 0,075$$

erkennen. Ab hier geht die laminare Strömung in turbulente Strömung über.

3.3 Viskosität nach Hagen-Poiseuille

Nach Hagen-Poiseuille kann man die Viskosität auch durch eine Volumenstrommessung bestimmen.

$$\eta = \frac{\pi R^4 p}{8L\dot{V}} \tag{3.15}$$

Da sich die Höhe der Flüssigkeitssäule ändert wird hier mit dem Mittelwert

$$\bar{h} = (489,5 \pm 1,4)$$

verwendet. Der Fehler wurde hier quadratisch addiert. Der Druck kann man nun wie folgt berechnen

$$p = \rho_f g \bar{h} \qquad\qquad \Delta p = p\sqrt{(\frac{\Delta\rho_f}{(\rho_f)})^2 + (\frac{\Delta\bar{h}}{\bar{h}})^2} \tag{3.16}$$

berechnen. Um den Volumenstrom zu bestimmen wird hier das ausgeflossene Volumen gegen die Zeit im folgenden Plot aufgetragen Aus der Steigung erhalten wir folgenden Wert

$$m = \dot{V} = 36,38 \pm 0,27\frac{ml}{s}$$

Mit $L = (100,0 \pm 0,5)mm$ und $R_K = (0,75)mm$ haben wir nun alle Werte um die Viskosität zu berechnen. Wir erhalten mit (3.15) folgenden Wert für die Viskosität:

$$\eta = (0,1882 \pm 0,0016)Pa \cdot s$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem Wert dem man in 3.1 bestimmt hat so erhält man eine σ-Abweichung von

$$5,28$$

Man kann also systematische Fehler erwarten. Dies wird in der Diskussion weiter ausgeführt.

3.4 Reynoldszahl der Kapillare

Die Reynoldszahl lässt sich mit Gleichung (1.2) berechnen. Hierbei wird für L $d = (1,5 \pm 0,01)mm$ verwendet. Drückt man die Gleichung noch mit dem Volumenstrom

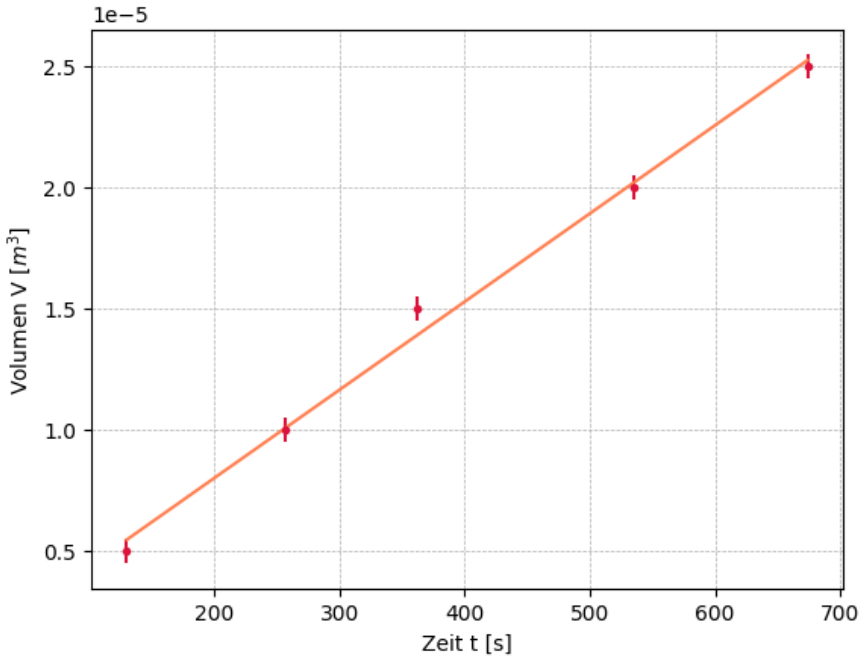


Abbildung 3.4: Füllstand als Funktion der Zeit

$\dot{V} = \pi R_K^2 \cdot v$ aus, erhält man folgende Formeln

$$Re = \frac{\rho_f L \dot{V}}{\pi r^3} \qquad \Delta Re = Re\sqrt{(\frac{\Delta\rho_f}{(\rho_f)})^2 + (\frac{\Delta L}{L})^2 + (\frac{\Delta \dot{V}}{\dot{V}})^2 + (\frac{3\Delta r}{r})^2} \tag{3.17}$$

und daraus folgenden Wert

$$Re = (1575 \pm 8)$$

Dieser liegt unterhalb der kritischen Reynoldszahl , welcher bei $Re_{krit} \approx 2300$ liegt. Die beobachtete Strömung ist also auch unter Beachtung des Fehlerintervalls weit im laminaren Bereich.

4. Zusamenfassung und Diskussion

In diesem Versuch wurde die Viskosität von Polyethylenglykol auf zwei verschiedenen Weisen bestimmt. Zuerst wurde die Sinkgeschwindigkeit von Kugeln unterschiedlicher Radien gemessen, um mit dem Stokes'schen Gesetz auf die Viskosität schließen zu können. Im Anschluss wurde der Volumenfluss einer Kapillare gemessen, um mithilfe des hydrostatischen Drucks die Viskosität nach Hagen-Poiseuille zu bestimmen.
Im ersten Teil des Versuchs bei der Messung der Fallzeit im Kugelfallviskosimeter zeigten sich einige Abweichungen, insbesondere bei den kleineren Kugeln und den damit verbundenen längeren Fallzeiten. Hier stellte sich schon während des Versuchs heraus, dass gut darauf geachtet werden muss, dass die Kugeln mittig in das Viskosimeter gegeben werden müssen, damit keine unerwünschten Nebeneffekte die Fallzeiten beeinflussen. Dies könnte dadurch verbessert werden, dass die Kugeln mithilfe einer geeigneten Vorrichtung mittig und aus der gleichen Höhe in das Viskosimeter fallen gelassen werden. Mit zunehmender Anzahl an Messungen erhöht sich natürlich auch die Genauigkeit des Mittelwerts der Fallzeiten. Im geplotteten Diagramm zeigt sich deutlich, dass für größere Kugelradien das Stokes'sche Gesetz nicht mehr linear ist, da dieses lediglich für unendlich ausgedehnte Flüssigkeiten gilt. Die Ladenburg'sche Korrektur führt demnach bereits ab einem Kugelradius von $2,5mm$ zu deutlichen Abweichungen von den ursprünglich berechneten Werten. Mithilfe der Ausgleichsgeraden konnte dann auf die Viskosität geschlossen werden. Die kritische Reynoldszahl wurde dabei näherungsweise aus dem Knick des dazu angefertigten Diagramms bestimmt, in welchem für alle Kugeln die Reynolds-Zahlen bestimmt wurden und gegen das Verhältnis v_s/v_{lam} geplottet wurden. Da die jeweiligen Fehlerbereiche recht groß sind, konnte hier der Wert nur abgeschätzt werden.
Im zweiten Teil des Versuchs ergab sich aus den Messwerten des Füllstands als Funktion der Zeit eine gute lineare Kurve, aus welcher der Volumenfluss bestimmt werden konnte. Um den Fehler des Volumenflusses zu minimieren, müsste hier ebenfalls eine geeignete Vorrichtung vorliegen, mit welcher der Füllstand genauer als Funktion der Zeit gemessen werden kann. Dies könnte zum Beispiel mithilfe einer Waage erfolgen, die das Gewicht des Füllglases automatisch als Funktion der Zeit misst.
Die beiden berechneten Viskositäten weisen eine Abweichung von 528σzueinander auf, womit eine signifikanten Abweichungen vorliegt. Hierbei ist der Grund wahrscheinlich, dass die Temperatur im Vergleich zum Versuchsteil gestiegen ist. Hier wurde zwar auch eine Temperatur von $22°C$ notiert, diese aber die Temperatur der Flüssigkeit im oberen Teil des Zylinders ist. Es ist also gut möglich, dass die Temperatur der Flüssigkeit die durch die Kapillare geflossen ist, höher war.

5. Python-Code

Versuch 212

March 10, 2025

1 Versuch 212 - Viskosität

[157]:
```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit
```

[158]:
```
R = 75 /2  *10**(-3) # Zylinderradius

rho_k = 1.385 *10**3 # Kugeldichte
Del_rho_k = 0.015 *10**3

rho_f = 1.1476 *10**3 # Dichte Flüssigkeit
Del_rho_f = 0.0012 *10**3

g=9.81
```

[159]:
```
# Radien
r= np.array([4.5 ,4.0,3.5,3.0,2.5,2.0,1.5,1.0,0.5]) *10**(-3)
Del_r = np.ones(len(r))*0.013  *10**(-3)

r_square = r**2
Del_r_square = 2 *r * Del_r

#Fallzeiten
T = np.array([6.32,7.42,9.13,12.17,7.59,12.71,20.1,45.1,67.5])
Del_T = np.array([0.16,0.09,0.08,0.16,0.27,0.21,0.7,1.4,1.2])

#Fallstrecken
s = np.array([200,200,200,200,100,100,100,100,50]) *10**(-3)
Del_s = np.ones(len(s))*0.5 *10**(-3)

#Fallgeschwindigkeit

v = s/T

Del_v = v*np.sqrt((Del_s/s)**2+(Del_T/T)**2)
```

1

```
v_mean = np.mean(v)
v_std = np.std(v)

# Mit Korrektur
lam = 1+2.1*(r/(np.ones(len(r))*R))
Del_lam = 2.1/R*Del_r

v_korr = v*lam
Del_v_korr = v_korr*np.sqrt( (Del_v/v)**2 + (Del_lam/lam)**2  )
```

[160]:
```
def lin(x,a):
    return a*x

popt, pcov = curve_fit(lin,r_square, v,sigma=Del_v ,p0=[1825])

popt_korr, pcov_korr = curve_fit(lin,r_square,v_korr)

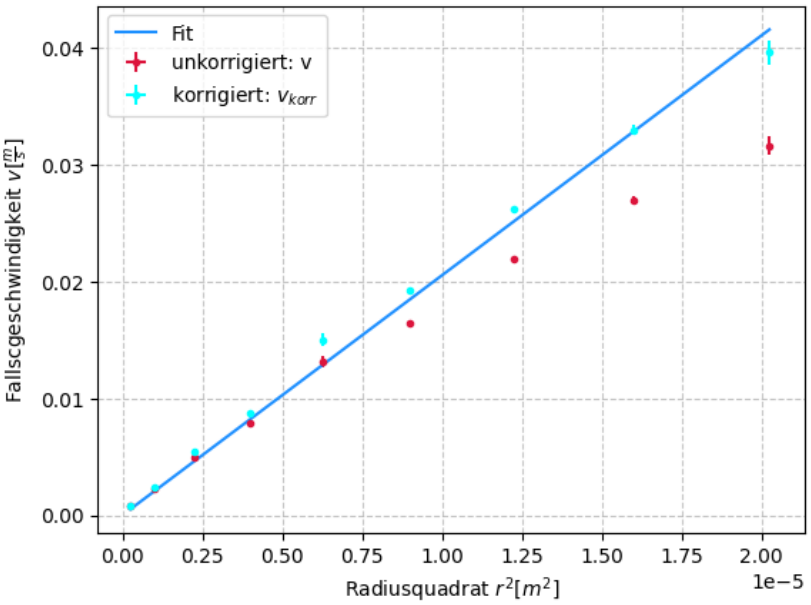
# Plot ohne Korrektur
#plt.plot(r_square,lin(r_square,*popt),label='Fit')
plt.errorbar(r_square,v, xerr=Del_r_square , yerr=Del_v, marker ='.' ,␣
 ↪linestyle='none',label=r'unkorrigiert: v',color='crimson')

# Plot mit Korrektur
plt.plot(r_square,lin(r_square,*(popt_korr)),label='Fit',color='dodgerblue')
plt.errorbar(r_square,v_korr, xerr=Del_r_square , yerr=Del_v_korr, marker ='.'␣
 ↪, linestyle='none',label=r'korrigiert: $v_{korr}$' ,color='aqua')

#plt.plot(r_square,lin(r_square,*(popt_korr+pcov_korr[0,0])),␣
 ↪linestyle="--",color='gray',alpha=0.7)
#plt.plot(r_square,lin(r_square,*(popt_korr-pcov_korr[0,0])),␣
 ↪linestyle="--",color='gray',alpha=0.7)
plt.grid(True, linestyle="--", alpha=0.7)
plt.legend()
plt.ylabel(r'Fallscgeschwindigkeit $v[\frac{m}{s}]$')
plt.xlabel(r'Radiusquadrat $r^2 [m^2]$')

plt.savefig('plot1_212.png')
```

2



[161]:
```
# Berechnung der Dichte aus der Steigung

eta = 2/9 * ( (rho_k-rho_f) *g)  / popt[0]
Del_eta = eta * np.sqrt( (Del_rho_k/(rho_k-rho_f))**2 + (Del_rho_f/
  ↪(rho_k-rho_f))**2 +(0.63/popt[0])**2   )

print(f'eta = {eta} \pm {Del_eta}')
```

```
eta = 0.28352817662648516 \pm 0.01797208738139497
```

[162]:
```
# theoretische Geschwindigkeit

v_lam = 2/9 * ( (rho_k-rho_f) *g) *r_square / eta

Del_v_lam = v_lam * np.sqrt((Del_rho_k/(rho_k-rho_f))**2 + (Del_rho_f/
  ↪(rho_k-rho_f))**2 +(2 * Del_r_square/r_square)**2)

#Reynoldszahl

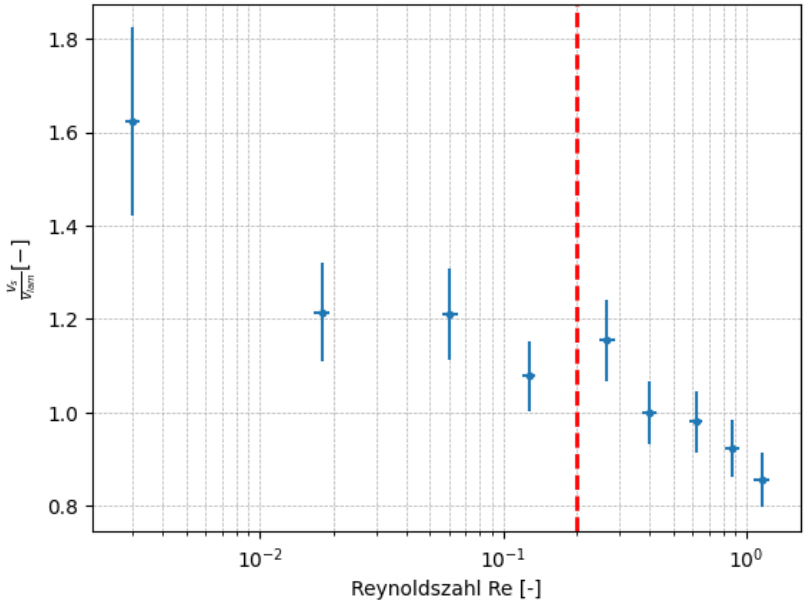
Re = rho_f* v*2*r/eta
```

```
Del_Re = Re *np.sqrt( (Del_rho_f/rho_f)**2 + (Del_v/v)**2 + (Del_r/r)**2 +␣
↪(Del_eta/eta)**2 )
```

[163]:
```
y = v/v_lam

Del_y = y * np.sqrt((Del_v/v)**2 + (Del_v_lam/v_lam)**2)

plt.axvline(x=0.2, color='red', linestyle='--', linewidth=2)
plt.errorbar(Re,y, xerr=Del_Re , yerr=Del_y, marker ='.' , linestyle='none')
plt.xscale('log')
plt.xlabel(r'Reynoldszahl Re [-]')
plt.ylabel(r'$\frac{v_s}{v_{lam}} [-]$')
plt.grid(True, which="both", ls="--", linewidth=0.5)
plt.savefig('plot2_212.png')
```



[164]:
```
# Hagen Pouiseuele
h = np.array([492.0,487.0]) *10**(-3)

h_mean = np.mean (h)
Del_h_mean = np.std(h)
```

```
V = np.array([5,10,15,20,25]) * 10** (-6)
t = np.array([130,257,362,535,674])

Del_V = np.ones(len(V))*0.5*10**(-6)
Del_t = np.ones(len(t))

def lin2(x,a,b):
    return a*x+b

popt_Vol , pcov_Vol = curve_fit(lin2, t, V)

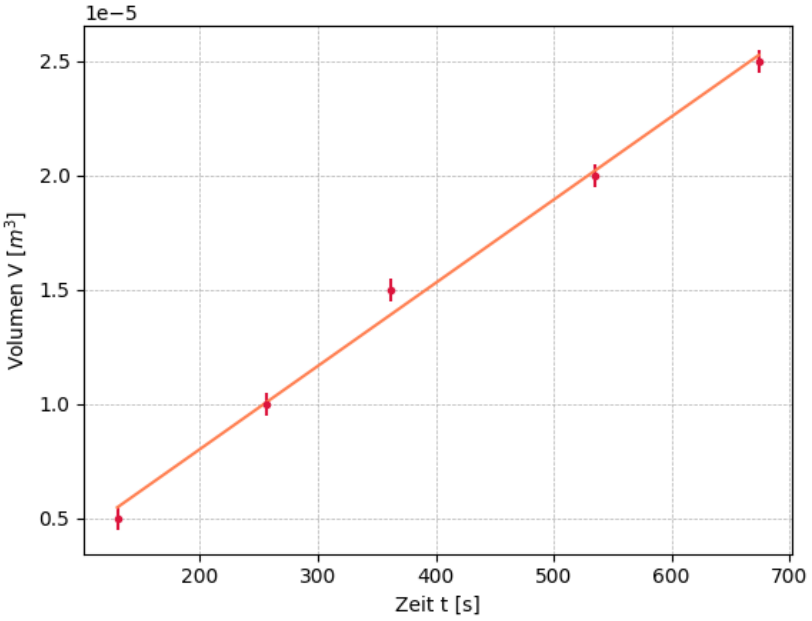
plt.errorbar(t,V, xerr=Del_t , yerr=Del_V, marker ='.' , linestyle='none'␣
 ↪,color='crimson')

plt.plot(t,lin2(t,*popt_Vol),color = 'coral')

plt.grid(True, which="both", ls="--", linewidth=0.5)

plt.xlabel(r'Zeit t [s]')
plt.ylabel(r'Volumen V $[m^3]$')

plt.savefig('plot3_212.png')
Vol = popt_Vol[0]
Del_Vol = pcov_Vol[0,0]
```



[165]:
```
p = rho_f*h_mean*g

Del_p = p * np.sqrt( (Del_rho_f/rho_f)**2 +(Del_h_mean)**2 )

R = 0.75*10**(-3)
L = 100 * 10**(-3)
Del_L = 0.5 * 10**(-3)

eta2 = np.pi * p * R**4 / (8*L*Vol)

Del_eta2 = eta * np.sqrt( (Del_p/p)**2 + (Del_L/L)**2 + (Del_Vol/Vol)**2    )
```

[166]:
```
sigma = np.abs(eta-eta2)/ np.sqrt(Del_eta**2+Del_eta2**2)

print(sigma)
```

```
5.282138940039768
```

[167]:
```
Re2 = (rho_f*L*Vol)/(2*np.pi*R**3)
Del_Re2 = Re2* np.sqrt((Del_rho_f/rho_f)**2+(Del_L/L)**2+(Del_Vol/Vol)**2)
```