Versuch 213 - Kreisel

PAP 2.1

Teilnehmender Student: **Harish Mahendran**

Gruppe des Teilnehmenden: **14**

Kurs: **Vormittags**

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**
1.1 Motivation 1
1.2 Grundlagen aus der Physik 1

2 Messprotokoll **5**

3 Auswertung **8**
3.1 Vorversuch 8
3.2 Dämpfung des Kreisels 8
3.3 Präzession in Abhängigkeit vom Auslenkwinkel 9
3.4 Bestimmung des Trägheitsmoments entlang der z-Achse 10
3.5 Bestimmung des Trägheitsmoments entlang der x-Achse 12

4 Zusamenfassung und Diskussion **15**

5 Python-Skript **17**

1. Einleitung

1.1 Motivation

Auf vielen Skalen lassen sich Kreiselfphänomene betrachten: Von der Rotation von Molekülen auf der Nanoskala, bis hin zum Verhalten der Erdrotation in makroskopischen Skalen, überall kann mechanisches Verhalten durch Kreisel modelliert werden. Technisch finden Kreisel ihre Anwendung zur Navigation und Sensorik aufgrund ihrer Orientierungs erhaltenden Eigenschaften, oder auch durch ihre Dynamik und Kraftabstumpfung zur Orientierungssteuerung in der Raumfahrt.

Durch grundlegende Mechanische Überlegungen lassen sich Vorhersagen über die Dynamik von Kreisbewegungen treffen, diese sollen in diesem Versuch experimentell überprüft werden.

1.2 Grundlagen aus der Physik

Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Jeder starre, rotierende Körper ist ein Kreisel. Bei einer Lagerung im Schwerpunkt induzieren Gewichtskräfte kein Drehmoment $\vec{M}$, wodurch der Drehimpuls $\vec{L}$ konstant bleibt, der Kreisel heißt dann kräftefrei. Wenn zwei der drei Hauptträgheitsmomente des Kreisels gleich groß sind, wird der Kreisel symmetrisch genannt.

Um einen Kreisel zu beschreiben werden drei charakteristische Achsen herangezogen: Die Symmetrieachse, oder Figurenachse $\vec{F}$, die Drehimpulsachse $\vec{L}$ und die Rotationsachse $\vec{\omega}$.

Bei einer Fixierung an der Symmetrieachse, und Rotation so, dass ihre Richtung konstant bleibt, fallen gerade alle drei Achsen zusammen und bleiben konstant. Dies ist der einzige Fall, in dem Rotation und Drehimpuls gleichgerichtet sind, das Hauptträgheitsmoment verteilt sich dann zwischen ihnen.

Im allgemeinen Fall nehmen die charakteristischen Achsen verschiedene Richtungen an, der Kreisel führt dann eine Nutationsbewegung aus. Dieser Fall kann trotzdem auch kräftefrei sein, wenn das konstante Feld erreicht werden. Der Drehimpuls bleibt in diesem Fall konstant, die Symmetrieachse rotiert auf einem Kegelmantel mit der Nutationsfrequenz ω_N um eine Achse, und führt mit der Frequenz $2\omega_F$ eine Eigendotation durch. Die Drehachse lässt sich also als Superposition der Bewegungen um diese verschiedenen Achsen. Es beschreibt dann die momentane Drehrichtung ω die Drehrichtung des Kreisels zu einem bestimmten Zeitpunkt:

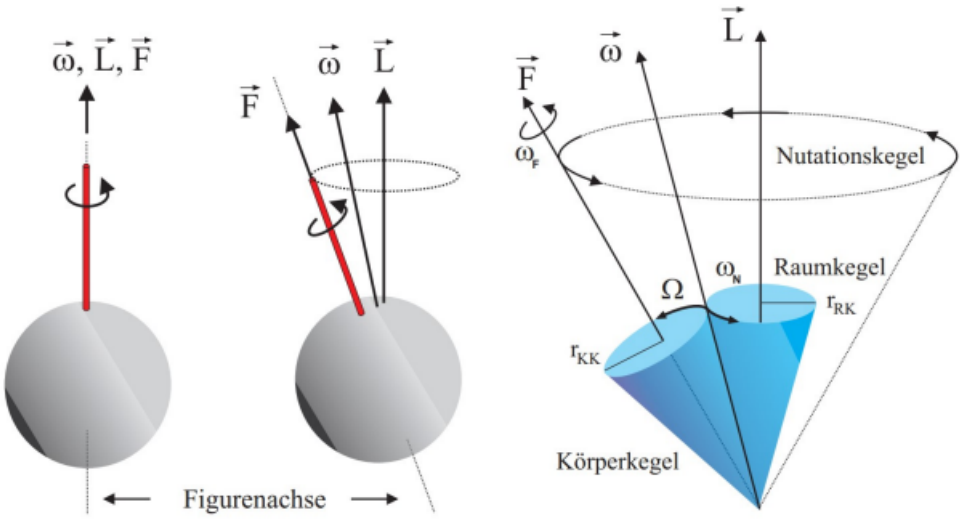


Abbildung 1.1: Die verschiedenen Bewegungsachsen des Kreisels

Es gilt außerdem, dass die Symmetrieachse und der Drehimpuls stets mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit in einer Ebene liegen. Dadurch lässt letztere sich in Anteile der beiden zersetzen nach

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_N + \vec{\omega}_F \tag{1.1}$$

Werden nun Drehimpuls und momentane Winkelgeschwindigkeit in x- und z-Komponenten zerlegt, nutzt man mit Komponenten des Trägheitstensors I dass

$$\omega_x = \omega_N \sin(\vartheta) \tag{1.2}$$

$$L_x = I_s \omega_x \tag{1.3}$$

$$L_x = I_x \omega_x \tag{1.4}$$

Um zu für den Betrag der Nutationsfrequenz zu erhalten

$$\omega_N = \frac{L}{I_s} \tag{1.5}$$

Bei kleinen Winkeln, also niedriger Nutationsbewegung, gilt die Näherung

$$L \approx I_z \omega_F \tag{1.6}$$

So erhält man mit (1.4)

$$\omega_N \approx \frac{I_z}{I_x} \omega_F \tag{1.7}$$

Die Nutationsbewegung lässt sich qualitativ gut durch den kegelförmigen Rotationskörper erkennen, den die Figurenachse durch sie beschreibt. Zur Beobachtung der momentanen

Drehachse wird auf der Figurenachse eine Kreisscheibe mit verschiedenen Farbsektoren befestigt. Bei hohen Rotationsfrequenzen verschwinden die Farben in der momentanen Wahrnehmung. Nur nahe der Drehachse sind die Farben getrennt erkennbar. Durch die Bewegung der momentanen Drehachse auf dem Kegelmantel und die Figurenachse ist am Ort der momentanen Drehachse ein langsamer Wechsel der Farben mit der Winkelgeschwindigkeit Ω in Abhängigkeit der Raumlage- und Körperkreiselradien r_{RK} und r_{KK} erkennbar:

$$\frac{\Omega}{\omega_N} = \frac{r_{RK}}{r_{KK}} \tag{1.8}$$

Nach längeren Rechnungen erhält man als Ergebnis für die Farbwechselgeschwindigkeit:

$$\Omega = \frac{I_x - I_z}{I_x}\omega_F \tag{1.9}$$

Wobei die Umformung gilt:

$$I_x - I_z = \frac{I_z}{\frac{\omega_F}{\Omega} - 1} \tag{1.10}$$

Symmetrischer schwerer Kreisel

Der schwere Kreisel ist nicht mehr im Schwerpunkt fixiert, für den symmetrischen Fall (hier $I_x = I_y$) aber immer noch in der Figurenachse. Es wird für die praktische Durchführung dazu ein Stab mit einer Zusatzmasse m montiert, um den Schwerpunkt entlang der Figurenachse zu verschieben. Es wird nun der Fall ohne Nutationsbewegung, das heißt mit Zusammenfall der Richtungen von $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ betrachtet. Dabei wirkt aufgrund der Gewichtskraft$m\vec{g}$auf den Kreisel das Drehmoment

$$\vec{V} = \vec{l} \times m\vec{g} \tag{1.11}$$

Mit $\vec{l}$ als dem Vektor vom Unterstutzungspunkt des Kreisels bis zur Zusatzmasse auf der Figurenachse.

Das Drehmoment induziert eine zeitliche Änderung des Drehimpulses, die aufgrund der Orthogonalität von Drehmoment und Drehimpuls in Richtung des Drehimpulses den Betrag des Drehimpulses konstant lässt. Es erfolgt also nur eine Richtungsänderung des Drehimpulses aufgrund der Gewichtskraft. Diese erfolgt um die z-Achse herum, die Bewegung wird als Präzession bezeichnet. Die Präzessionsfrequenz um die z-Achse ω_P ist aus der zeitlichen Änderung des Präzessionswinkels $\dot{\varphi}$ ableitbar:

$$\omega_P = \dot{\varphi} = \frac{dL}{Lsin(\alpha)dt} \tag{1.12}$$

Mit $L = I_z\omega_F$ folgt

$$\omega_P = \frac{mgl}{I_z\omega_F} \tag{1.13}$$

Oder im allgemeinen Fall:

$$\vec{M} = \vec{\omega_P} \times \vec{L} \tag{1.14}$$

Woran man erkennt, dass die Präzessionsfrequenz nicht von der Orientierung des Kreisels, sondern nur vom Drehimpuls und Drehmoment abhängt. Im komplizierteren Fall eines Kreisels mit Nutationsbewegung durchläuft die Spitze der Figurenachse eine zykloidähnliche Bahn, deren genaue Parameter von Verhältnis von Nutations- und Präzessionsfrequenz abängt. Im Versuch erfolgt eine Beobachtung dieses Verhaltens nur qualitativ.

2. Messprotokoll

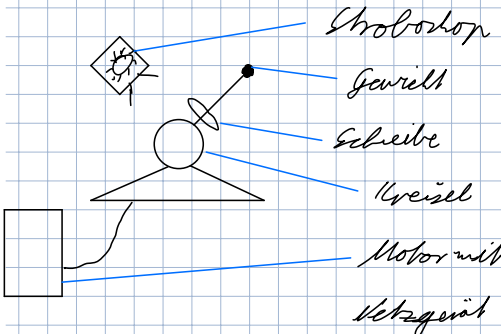
2. Messprotokoll

20.03.25 Harish Mahendran, Lucas Cünig, Simeon Leich

2.1 Messaufbau

- Stahlkugel mit Aluminiumstab ($m = 4{,}169\,kg$, $r = 5{,}08\,cm$) gelagert in einer Luftkissenplatte
- 2 Gewichte ($r_a = 0{,}725\,cm$, $r_i = 0{,}325\,cm$, $h = 1{,}1\,cm$, $m = 9{,}85\,g$)
- Farbscheibe, Scheibe mit
- Stroboskop und Laserfotometer
- Stoppuhr
- Motor mit Netzgerät
- Gyroskop zur Demonstration der Kreiseleigenschaften

2.2 Versuchsskizze



2.3 Vorversuch

Im Vorversuch werden die grundlegenden Eigenschaften des Kreisels qualitativ untersucht

a) Zunächst wird der Kreisel kräftefrei ausbalanciert und wird in eine Nutationsbewegung versetzt und bei Gegenstand weicht der Stab senkrecht davon aus.

b) Dort lässt sich ein Punkt in der Mitte erkennen, der die reinen Farben in der erwartbaren Abfolge zeigt, bei der Einzelscheibe lässt sich hingegen eine konstante Mischfarbe dieser Farben erkennen

c) Bei der Scheibe mit den schwarz-weißen konzentrischen Ringen lassen sich verzweigende und dann in periodischer Wiederholung konzentrische Kreise erkennen. Mit Zusatzgewicht wandelt der Kreisel zusätzlich eine Präzession um die Aufhängung.

d) Ohne Gewicht findet die Präzession gegen die Drehrichtung des Kreisels statt und mit Gewicht mit der Drehrichtung des Kreisels.

2.4 Messung der Dämpfung des Kreisels

Beide Gewichte werden am kräftefreien Kreisel befestigt und der Kreisel beschleunigt. Dann wird die Drehfrequenz des Kreisels alle 2 Minuten für 12 Minuten gemessen.

Die Messung der Frequenzen wird mit dem Laserfotometer bestimmt. Der Fehler liegt hier bei:

$\Delta\omega_f = 0{,}05\,\% + 0{,}1\,\frac{1}{min}$

Tabelle 1: Dämpfung Kreisel

Zeit [min]	Frequenz ν_F [$\frac{1}{min}$]
0	679,8 ± 0,4
2	617,7 ± 0,4
4	568,2 ± 0,4
6	519,3 ± 0,4
8	482,6 ± 0,3
10	448,7 ± 0,3
12	415,8 ± 0,3

2.5 Präzessionsmessung des Kreisels

a) In diesem Aufgabenteil wird die Farbscheibe an dem kräftefreien Kreisel angebracht. Zudem wird in Abstand $d = 20\,cm$ ein Gewicht angebracht und

konfigurationen und je 4 verschiedene Frequenzen gemessen. Die Gewichtskonfigurationen sind:

1. Ein Gewichtsstück bei 15 cm
2. Ein Gewichtsstück bei 20 cm
3. Zwei Gewichtsstücke bei 15 cm
4. Zwei Gewichtsstücke bei 20 cm

Für die Präzessionsdauer T_p [s] mit $\delta T_p = 2,5$ s

Tabelle 3: Präzessionsdauer Konfiguration 1

Frequenz ν_F [$\frac{1}{min}$]	Präzessionsdauer T_p [s]
705,3 ± 0,5	119,2 ± 2,5
570,7 ± 0,4	106,8 ± 2,5
393,7 ± 0,3	75,1 ± 2,5
311,9 ± 0,3	60,3 ± 2,5

der Kreisel beschleunigt auf die Frequenz $f = 495,7 \pm 0,3\ \frac{1}{min}$

Für verschiedene Winkel (einmal $<< 45°$, dann $\approx 45°$ und zuletzt $>> 45°$) ausgelotet und die Präzessionsdauer T_p gemessen

Tabelle 2: Präzessionsdauer Winkel

Winkel	Präzessionsdauer T_p [s]
$<< 45°$	69,14 ± 0,25
$\approx 45°$	65,92 ± 0,25
$>> 45°$	62,04 ± 0,25

b) In diesem Teil wird die Präzessionsdauer T_p für 4 verschiedene Gewichtskonfiguration

Tabelle 4: Präzessionsdauer Konfiguration 2

Frequenz ν_F [$\frac{1}{min}$]	Präzessionsdauer T_p [s]
691,9 ± 0,4	99,1 ± 2,5
531,7 ± 0,4	76,5 ± 2,5
393,6 ± 0,3	57,2 ± 2,5
288,5 ± 0,3	41,0 ± 2,5

Tabelle 5: Präzessionsdauer Konfiguration 3

Frequenz ν_F [$\frac{1}{min}$]	Präzessionsdauer T_p [s]
686,1 ± 0,4	65,3 ± 2,5
534,4 ± 0,4	51,1 ± 2,5
383,9 ± 0,3	36,6 ± 2,5
296,3 ± 0,3	28,4 ± 2,5

Tabelle 6: Präzessionsdauer Konfiguration 4

Frequenz ω_p [1/min]	Präzessionsdauer T_p [s]
676,6 ± 0,4	48,5 ± 2,5
559,9 ± 0,4	40,5 ± 2,5
391,5 ± 0,3	28,2 ± 2,5
287,1 ± 0,3	20,5 ± 2,5

2.6 Messung der Nutationsbewegung

In diesem Versuchsteil wird der Kreisel in Nutation versetzt.

a) Die Reihenfolge der Farben der Farbscheibe ist: grün, rot, gelb

389,8 ± 0,3	25,4 ± 1,0
349,7 ± 0,3	27,8 ± 1,0

c) Auch hier wird der kräftefreie Kreisel in Nutation versetzt und jeweils 10 Wertepaare der Frequenzen ω_N und ω_p bestimmt

Tabelle 8: Frequenzpaare ω_N und ω_p

ω_N [1/min]	ω_p [1/min]
670 ± 20	715 ± 21
635 ± 19	680 ± 20
590 ± 18	640 ± 19
575 ± 17	620 ± 19
520 ± 16	565 ± 17

b) Für 10 Frequenzen ω_p wird die Zeit t 10 komplette Farbwechsel mit der Frequenz Ω gemessen

Tabelle 7: Bestimmung der Frequenz Ω

Frequenz ω_p [1/min]	Zeit t [s]
567,3 ± 0,4	17,4 ± 1,0
542,8 ± 0,4	18,4 ± 1,0
519,3 ± 0,4	18,9 ± 1,0
501,7 ± 0,4	19,4 ± 1,0
478,5 ± 0,4	20,1 ± 1,0
499,2 ± 0,4	21,4 ± 1,0
439,5 ± 0,4	22,6 ± 1,0
415,5 ± 0,4	23,7 ± 1,0

500 ± 15	545 ± 16
490 ± 15	525 ± 16
380 ± 11	410 ± 12
335 ± 10	360 ± 11
290 ± 9	310 ± 9

Diese Messung wurde mit dem Stroboskop durchgeführt. Daher folgt für beide Frequenzen ein Fehler von $\Delta\omega = 3\%$

10.03.25

3. Auswertung

3.1 Vorversuch

In einem ersten Schritt wurde der Kreisel ausbalanciert, um kräftefrei zu sein. Bei der anschließenden Versetzung in Drehung ergab sich eine stabile Rotation um die Figurenachse. Wird der Kreisel langsam zur Seite bewegt, wirkt ein äußeres Drehmoment, womit sich die Drehimpulsachse entsprechend verschiebt. Die Bewegung um die verschobene Achse bleibt weiterhin stabil. Wird die Figurenachse durch einen kurzen seitlichen Stoß ausgelenkt, bleibt der Drehimpuls erhalten und es kommt zur Nutationsbewegung. Die Rotation der momentanen Drehachse konnte anhand der Scheibe mit den Farbsektoren beobachtet werden. Es gab dabei stets einen Punkt auf der Scheibe mit einer reinen, unvermischten Farbe. Bei der Verwendung der Scheibe mit den farbigen Ringen konnte dieser Punkt an den sich nicht ändernden Farbringen erkannt werden.

Bei der Verwendung einer Scheibe mit konzentrischen schwarz-weißen Kreisen, wobei der Mittelpunkt nicht auf der Figurenachse liegt, sind bei einer Bewegung ohne Nutation verwaschene Kreise erkennbar. Bei einer zusätzlichen Nutationsbewegung werden die Kreise abwechselnd scharf und unscharf. Dies liegt daran, dass sich die momentane Rotationsachse um die Figurenachse dreht und dabei periodisch den Mittelpunkt der Scheiben durchstößt. An diesem Punkt sind die Kreise scharf beobachtbar. Bei der Verwendung einer Scheibe, bei welcher der Mittelpunkt der Kreise auf der Figurenachse liegt, sind die Kreise bei einer Bewegung ohne Nutation stets scharf. Bei einer Nutationsbewegung ist erneut nur ein Punkt scharf.

Entfernt man die zusätzliche Farbscheibe, verschiebt sich der Schwerpunkt unterhalb der Kugelmitte, womit man einen schweren, symmetrischen Kreisel erhält. Bei Stillstand richtet sich dieser damit auf. Bei einer Rotation erfolgt eine Präzessionsbewegung entgegen der Rotationsrichtung der Figurenachse. Bringt man Zusatzgewicht an die Figurenachse an, verschiebt sich der Schwerpunkt oberhalb der Kugelmitte, womit der Kreisel bei Stillstand umkippt. Bei einer Rotation führt dieser erneut eine Präzessionsbewegung durch, diesmal in Rotationsrichtung der Figurenachse.

3.2 Dämpfung des Kreisels

In der folgenden Abbildung ist die Frequenz in Abhängigkeit von der Zeit halblogarithmisch geplottet. Die Dämpfung des Kreisels kann mithilfe einer Exponentialfunktion der Form

$$\omega(t) = \omega_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \tag{3.1}$$

beschrieben werden. wobei δ die Dämpfungskonstante und ω_0 die Start Frequenz ist

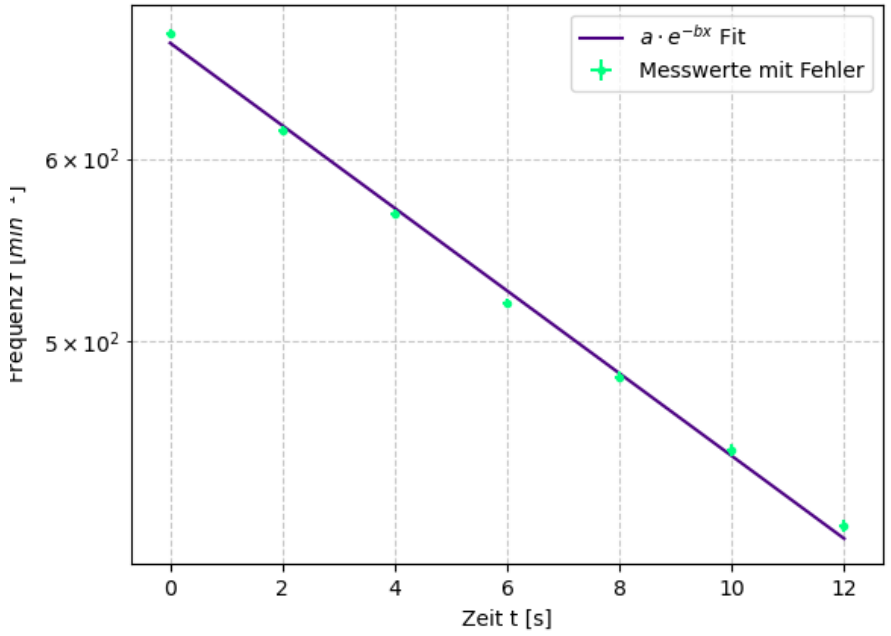


Abbildung 3.1: Kreiselfrequenz in Abhängigkeit von der Zeit

wir erhalten aus der Steigung die Dämpfungskonstante δ

$$\delta = (6,87 \pm 0,15) \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$$

Die Halbwertszeit t_H lässt sich wie folgt berechnen

$$t_H = \frac{ln(2)}{\delta} \tag{3.2}$$

$$\Delta t_H = \frac{ln(2)}{\delta^2} \Delta\delta \tag{3.3}$$

daraus folgt

$$t_H = (1009,389 \pm 0,022)\ s$$

3.3 Präzession in Abhängigkeit vom Auslenkwinkel

Winkel [°]	Präzessionsdauer [s]
$\ll 45$	$69,14 \pm 0,25$
≈ 45	$65,92 \pm 0,25$
$\gg 45$	$62,04 \pm 0,25$

Tabelle 3.1: Präzessionsdauer bei verschiedenen Winkel

Man hat im nächsten Versuchsteil (2.5 im Messprotokoll) die Präzessionsdauer für verschiedene Winkel bestimmt. Man sieht, dass die Präzessionsdauer nicht von dem Winkel abhängt. Dass die Präzessionsdauer absinkt ist dadurch zu erklären, dass wir hier den Kreisel nicht nach einer Messung wieder auf die $f \approx 500\frac{1}{min}$ beschleunigt haben. Durch die Dämpfung sinkt die Rotationsfrequenz ω und dadurch auch die Präzessionsdauer.

3.4 Bestimmung des Trägheitsmoments entlang der z-Achse

Mit Gleichung (1.13) kann man das Trägheitsmoment berechnen:

$$I_z = \frac{mgl}{\omega_P \omega_F} \tag{3.4}$$

Hierbei sind m, g und l bereits bekannt. Da eine Dämpfung des Kreisels vorliegt (siehe 3.2), wird in einem ersten Schritt mithilfe der ermittelten Dämpfungskonstante δ und Gleichung (3.1) die Drehfrequenz $\omega_{F,f}$ am Ende der Präzessionsbewegung bestimmt. Aus dem initialen gemessenen Wert $\omega_{F,i}$ und dem finalen Wert $\omega_{F,f}$ lässt sich dann der Mittelwert $\bar{\omega}_F$ berechnen.

$$\omega_{F,f} = \omega_{F,i} \cdot e^{-\delta \cdot T_P} \tag{3.5}$$

$$\Delta\omega_{F,f} = e^{-\delta \cdot \frac{1}{f_F}} \sqrt{(\Delta\omega_{F,i})^2 + (T_P \omega_{F,i} \Delta\delta)^2 + (\Delta T_P \omega_{F,i} \delta)^2} \tag{3.6}$$

$$\bar{\omega}_F = \frac{\omega_{F,i} + \omega_{F,f}}{2} \tag{3.7}$$

$$\Delta\bar{\omega}_F = \frac{\sqrt{\Delta\omega_{F,i}^2 + \Delta\omega_{F,f}^2}}{2} \tag{3.8}$$

Die Präzessionskreisfrequenz ω_P erhält man mit:

$$\omega_P = \frac{2\pi}{T_P} \tag{3.9}$$

$$\Delta\omega_P = \frac{2\pi}{T_P^2} \Delta T_P \tag{3.10}$$

Wobei hier T_P die Präzessionsdauer ist.
Die Präzessionszeit ist gegen die Rotationskreisfrequenz im folgendem Diagramm aufgetragen.

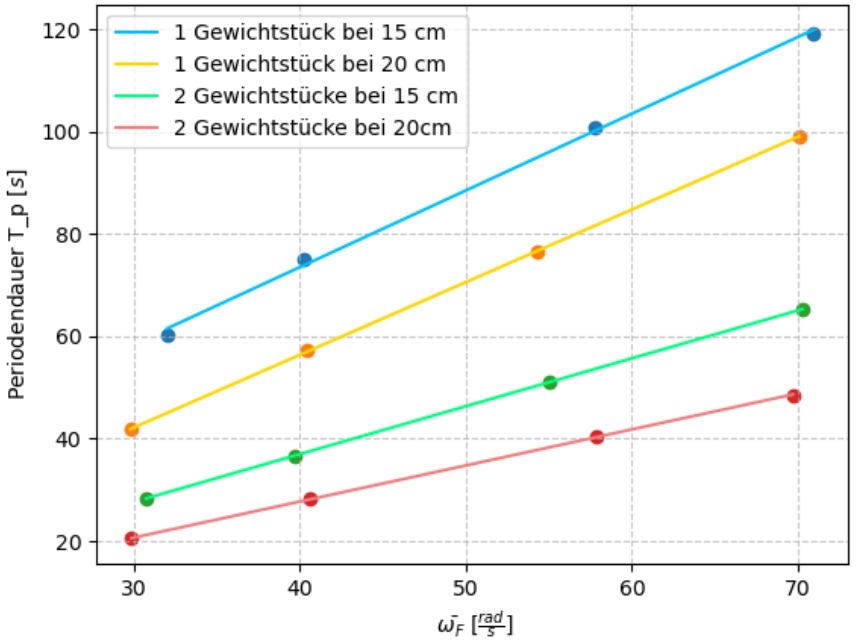


Abbildung 3.2: Präzessionszeit in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz

Wenn man nun die Steigung $c = \frac{T_P}{\bar{\omega}_F} = \frac{1}{2\pi\bar{\omega}_F\omega_P}$ in Gleichung (3.4) einsetzt erhält man:

$$I_z = \frac{mgl \cdot c}{2\pi} \tag{3.11}$$

$$\Delta I_z = I_z\sqrt{(\frac{\Delta c}{c})^2 + (\frac{\Delta l}{l})^2} \tag{3.12}$$

Zum Vergleich sind die Trägheitsmomente in der folgenden Tabelle aufgetragen:

$m\ [g]$	$l\ [cm]$	$s\ [s^2]$	$I_z\ [g \cdot m^2]$
$9,85$	$15,0 \pm 0,3$	$1,498 \pm 0,022$	$3,46 \pm 0,06$
$9,85$	$20,0 \pm 0,3$	$1,419 \pm 0,006$	$4,37 \pm 0,05$
$19,7$	$15,0 \pm 0,3$	$0,935 \pm 0,005$	$4,32 \pm 0,07$
$19,7$	$20,0 \pm 0,3$	$0.705 \pm 0,004$	$4,33 \pm 0,05$

Tabelle 3.2: Messwerte und berechnete Trägheitsmomente

Man sieht hier, dass bei der Messung "*1 Gewicht bei* $15cm$ "das Trägheitsmoment mit mehreren Fehlerintervallen von den anderen Werten abweicht. Hier kam es wahrscheinlich zu Messfehler, welche in der Diskussion näher besprochen werden. Deshalb wird nun der Mittelwert nun ohne dieser Messung gebildet um den Mittelwert nicht zu verfälschen. Der Mittelwert der restlichen Werte ergibt

$$\bar{I_z} = (4,338 \pm 0,021)\ g \cdot m^2$$

Hierbei wurde die Standardabweichung als Fehler verwendet.

3.5 Bestimmung des Trägheitsmoments entlang der x-Achse

In Messung 2.6 wurde zunächst die Umlaufrichtung der momentanen Drehachse mit Hilfe der Farbscheibe bestimmt. Wir haben folgendes Farbwechselschema beobachten können: grün rot gelb. Also ist die Umlaufrichtung in der Drehrichtung der Figurenachse. Mithilfe von Gleichung (1.9) folgt damit, dass $\frac{\Omega}{\omega_F} = \frac{I_x - I_z}{I_x}$ positiv sein muss, also $I_x > I_z$ gelten muss.

Bestimmung über die Frequenz der Drehachse

Es wurden 10 Perioden des Farbwechsels in Abhängigkeit der von ω_F gemessen. Damit kann die Kreisfrequenz des Farbwechsel wie folgt berechnet werden:

$$\Omega = \frac{10 \cdot 2\pi}{t} \tag{3.13}$$

$$\Delta\Omega = \frac{10 \cdot 2\pi}{t^2}\Delta t \tag{3.14}$$

Im folgendem Diagramm ist dieser gegen ω_F aufgetragen

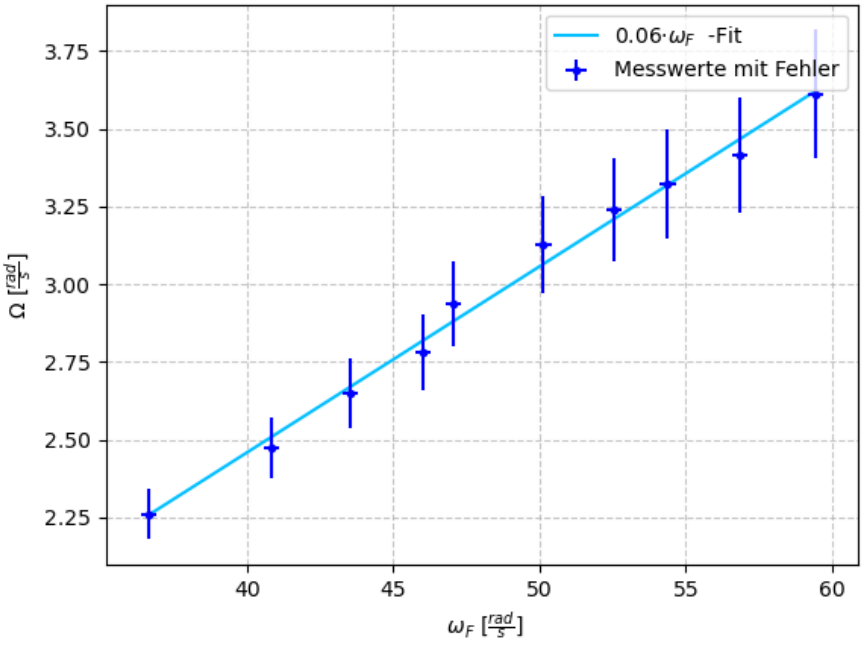


Abbildung 3.3: Frequenz der Drehachse in Abhängigkeit der momentanen Frequenz

Mit der Steigung $m = \frac{\Omega}{\omega_F} = 0,059 \pm 0,003$ kann man nun das Trägheitsmoment berechnen.

$$I_x = \frac{I_z}{1-m} \tag{3.15}$$

$$\Delta I_x = \frac{1}{1-m}\sqrt{(\Delta I_z)^2 + (\frac{I_z \Delta m}{1-m})^2} \tag{3.16}$$

Wir erhalten durch einsetzen

$$I_x = 4,614 \pm 0,022 g \cdot m^2$$

Bestimmung über die Nutationsfrequenz

Anolog wird die Nutationsfrequenz in eine Kreisfrequenz umgerechnet. Diese wird dann gegen ω_F im folgendem Diagramm eingetragen:

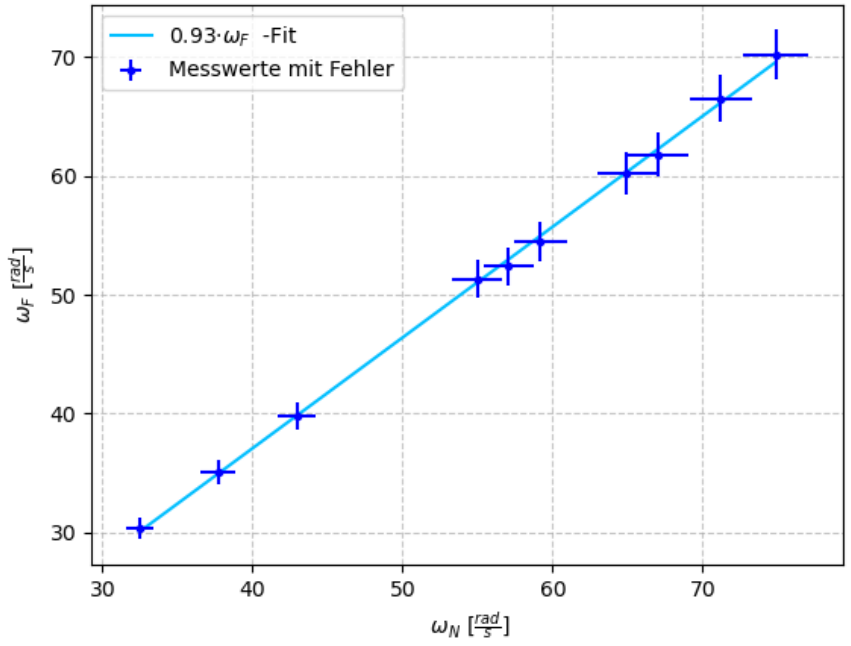


Abbildung 3.4: Nutationsfrequenz in Abhängigkeit der momentanen Frequenz

Mit der Gleichung (1.7) und der Steigung $m = \frac{\omega_N}{\omega_F} = 0,9306 \pm 0,0004$ kann man das Trägheitsmoment wie folgt berechnen

$$I_x = \frac{I_z}{m} \tag{3.17}$$

$$\Delta I_z = I_x \sqrt{(\frac{\Delta I_z}{I_z})^2 + (\frac{\Delta m}{m})^2} \tag{3.18}$$

Daraus erhält man

$$I_x = (4,661 \pm 0,022) g \cdot m^2$$

Vergleicht man die beiden Werte die man für I_x berechnet hat so erhält man folgende σ-Abweichung

$$1,49\sigma$$

Diese wurde wie folgt berechnet

$$\frac{|I_{x_1} + I_{x_2}|}{\sqrt{(\Delta I_{x_1})^2 + (\Delta I_{x_2})^2}} \tag{3.19}$$

Also nicht signifikante Abweichung. Man stellt auch fest, dass die Vermutung $I_x > I_z$ sich bestätigt hat.

4. Zusamenfassung und Diskussion

In diesem Versuch wurden verschiedene Phänomene eines kräftefreien und schweren, symmetrischen Kreisels qualitativ als auch quantitativ untersucht. Nach einem qualitativen Vorversuch wurde die Dämpfung des Kreisels, die Präzessionszeit sowie das Trägheitsmoment entlang der z-Achse bestimmt. Im letzten Teil wurde das Trägheitsmoment entlang der x-Achse zum einen über die Frequenz der Drehachse und zum anderen über die Nutationsfrequenz bestimmt.
Für die Bestimmung der Dämpfungskonstante wurde die Drehfrequenz des Kreisels für 12 *min* lang gemessen und die Frequenz in Abhängigkeit von der Zeit in ein Diagramm halblogarithmisch aufgetragen. Durch die Messpunkte konnte eine Ausgleichsgerade gezogen werden, wobei die Steigung der Dämpfungskonstante δ entspricht. Die Dämpfung konnte damit auf

$$\delta = (6,87 \pm 0,15) \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$$

bestimmt werden, wobei dieser Wert wie erwartet aufgrund des im Versuch verwendeten Luftkissens recht gering ist. Die Halbwertszeit beträgt damit

$$t_H = (1009,389 \pm 0,022)s$$

Anschließend wurde mit der Präzession des Kreisels das Trägheitsmoment entlang der z-Achsen bestimmt. Hierfür wurde in einer Messung vorab gezeigt, dass die Präzessionszeit unabhängig von dem Auslenkwinkel des Kreisels ist. Aus den drei Messungen der Präzessionsperiode bei ca. 30°,60° und 90° lässt sich schließen, dass die Präzessionsdauer nicht von dem Winkel abhängt. Da wir hier die Kreisfrequenz nicht zwischen den Messungen auf einen vergleichbaren Wert erhöht haben, kann man eine sinkende Tendenz sehen. Hier hätte man die Kreisfrequenz auf eine möglichst gleiche Frequenz beschleunigen sollen, damit man hier ein besseren Vergleich ziehen kann.
Für die Messung des Trägheitsmoments der z-Achse wurde dann bei verschiedenen Längen und Gewichten die Präzessionszeit in Abhängigkeit von der Frequenz der Figurenachse gemessen. Mithilfe der berechneten Dämpfungskonstante konnte eine mittlere Kreisfrequenz der Figurenachse ω_F für die verschiedenen Messungen berechnet werden. Mithilfe des Diagramms, in welchem die Präzessionszeit in Abhängigkeit dieser mittleren Kreisfrequenz geplottet wurde, konnte aus den Ausgleichsgeraden das Trägheitsmoment I_z berechnet werden.Es konnte ein Wert von

$$I_z = (4,338 \pm 0,021) \cdot 10^{-3}\ kgm^2$$

berechnet werden.

Im letzten Teil des Versuchs wurde das Trägheitsmoment entlang der x-Achse auf zwei verschiedene Weisen berechnet. Zunächst wurde die Frequenz der Farbänderung in Abhängigkeit der momentanen Drehfrequenz geplottet und mithilfe der Steigung der Ausgleichsgeraden sowie dem bereits berechneten Trägheitsmoment der z-Achse auf

$$I_x = (4,614 \pm 0,022) \cdot 10^{-3}\ kgm^2$$

bestimmt.
Bei der zweiten Methode zur Bestimmung des Trägheitsmoments wurde die Nutationsfrequenz in Abhängigkeit der momentanen Frequenz gemessen und ein Wert von

$$I_x = (4,661 \pm 0,022) \cdot 10^{-3} kgm^2$$

bestimmt. Dieser weicht um $1,49\ \sigma$ vom zuvor berechneten Wert ab, womit keine statistisch signifikante Abweichung vorliegt.Wie davor richtig vermutet, gilt für die beiden Trägheitsmomente $I_x > I_z$.

5. Python-Skript

Versuch_213

April 4, 2025

[58]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit
#427/81:
```

[59]:
```
# Dämpfung des Kreisel

t = np.array([0,2,4,6,8,10,12])
Del_t = 5/60  # 5 Sekunden Ablesezeit


f = np.array([679.8 , 617.3 , 568.2, 519.3 ,482.6 ,448.7 ,415.8])
Del1_f = f*0.0005 + 0.1  # Gerätefehler
Del2_f = 2.5 # Schwankungen in der Messung
Del_f = np.sqrt(Del1_f**2+ Del2_f**2)

def exp(x,a,b):
    return a*np.e**(-b*x)

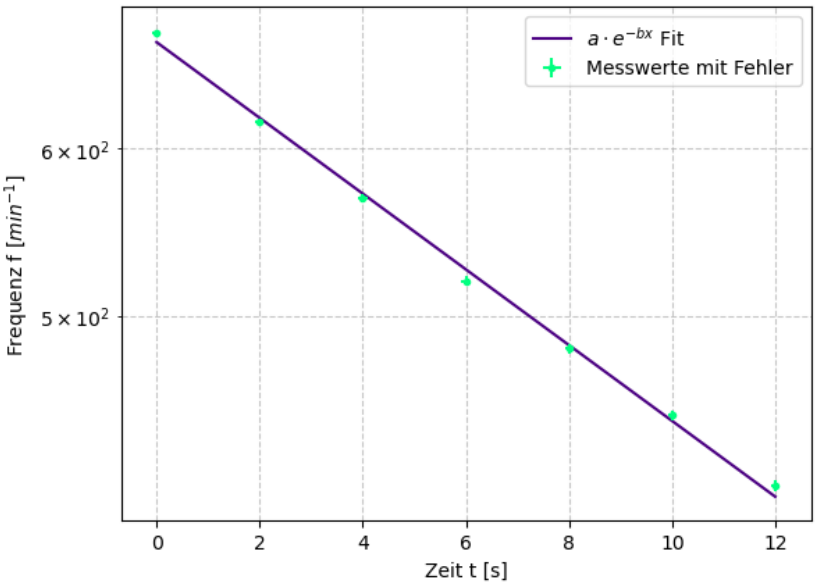
popt , pcov = curve_fit(exp,t,f)



plt.plot(t,exp(t,*popt), color='indigo',label=r'$a \cdot e^{-bx}$ Fit')
plt.errorbar(t,f ,xerr=Del_t, yerr = Del_f  ,color='springgreen',fmt='.' ,label␣
↪='Messwerte mit Fehler')

plt.yscale('log')
plt.xlabel('Zeit t [s]')
plt.ylabel(r'Frequenz f $[min^{-1}]$')
plt.grid(True, linestyle="--", alpha=0.7, which="both")
plt.legend()
plt.savefig('plot1_213.png')
```

```
/tmp/ipykernel_1731924/1614193629.py:13: RuntimeWarning: overflow encountered in
power
  return a*np.e**(-b*x)
```



[60]:
```
#427/82:
delta = popt[1]/60 # Dämpfungskonstante
Del_delta = pcov[1,1] /60

t_H = np.log(2)/delta  #Halbwertszeit
Del_t_H = np.log(2) / delta**2 * Del_delta

print(r'Dämpfungskonstante $\delta:$')
print(fr'{delta:.8e}$\pm$ {Del_delta:.2g}')
print(r'Halbwertszeit $t_H$:')
print(fr'{t_H:3e} $\pm$ {Del_t_H:.2g}')
```

```
Dämpfungskonstante $\delta:$
6.86699744e-04$\pm$ 1.5e-08
Halbwertszeit $t_H$:
1.009389e+03 $\pm$ 0.022
```

[61]:
```
# Präzessionsdauer

T_p = np.array([69.14,65.92,62.04])

T_p_mean = np.mean(T_p)
```

```
Del_T_p_mean = np.std(T_p)

print('durschnittlische Präzissionsdauer:')
print(f'{T_p_mean} \pm {Del_T_p_mean:.2g}')
```

```
durschnittlische Präzissionsdauer:
65.7 \pm 2.9
```

[62]:
```
# Ein Gewicht bei 15 cm
T_p1 = np.array([119.2,100.8,75.1,60.3])
omega_F1i = 2*np.pi* np.array([705.3,570.7,393.7,311.9])/60
omega_p1 = 2*np.pi / np.array([119.2,106.8,75.1,60.3])

# Ein Gewicht bei 20 cm
T_p2 = np.array([99.1, 76.5, 57.2, 41.8])
omega_F2i = 2*np.pi* np.array([691.9, 531.7,393.6,288.5])/60
omega_p2 = 2*np.pi / np.array([99.1, 76.5, 57.2, 41.8])

# Zwei Gewichte bei 15 cm
T_p3 = np.array([65.3,51.1,36.6,28.4])
omega_F3i = 2*np.pi * np.array([686.1,534.4,383.9,296.3])/60
omega_p3 = 2*np.pi / np.array([65.3,51.1,36.6,28.4])

# Zwei Gewichte bei 20 cm
T_p4 = np.array([48.5, 40.5, 28.2, 20.5])
omega_F4i = 2*np.pi * np.array([676.6,559.9,391.5,287.1])/60
omega_p4 = 2*np.pi / np.array([48.5, 40.5, 28.2, 20.5])


# Durschnitt der Drehfrequenz
omega_F1 = (omega_F1i + omega_F1i*np.e**(-delta*T_p1)) /2

omega_F2 = (omega_F2i + omega_F2i*np.e**(-delta*T_p2)) /2

omega_F3 = (omega_F3i + omega_F3i*np.e**(-delta*T_p3)) /2

omega_F4 = (omega_F4i + omega_F4i*np.e**(-delta*T_p4)) /2
```

[63]:
```
# Ein Gewicht bei 15 cm
T_p1 = np.array([119.2,100.8,75.1,60.3])
omega_F1i = 2*np.pi* np.array([705.3,570.7,393.7,311.9])/60
omega_p1 = 2*np.pi / np.array([119.2,106.8,75.1,60.3])

# Ein Gewicht bei 20 cm
T_p2 = np.array([99.1, 76.5, 57.2, 41.8])
omega_F2i = 2*np.pi* np.array([691.9, 531.7,393.6,288.5])/60
omega_p2 = 2*np.pi / np.array([99.1, 76.5, 57.2, 41.8])
```

```
# Zwei Gewichte bei 15 cm
T_p3 = np.array([65.3,51.1,36.6,28.4])
omega_F3i = 2*np.pi * np.array([686.1,534.4,383.9,296.3])/60
omega_p3 = 2*np.pi / np.array([65.3,51.1,36.6,28.4])

# Zwei Gewichte bei 20 cm
T_p4 = np.array([48.5, 40.5, 28.2, 20.5])
omega_F4i = 2*np.pi * np.array([676.6,559.9,391.5,287.1])/60
omega_p4 = 2*np.pi / np.array([48.5, 40.5, 28.2, 20.5])


# Durschnitt der Drehfrequenz
omega_F1 = (omega_F1i + omega_F1i*np.e**(-delta*T_p1)) /2

omega_F2 = (omega_F2i + omega_F2i*np.e**(-delta*T_p2)) /2

omega_F3 = (omega_F3i + omega_F3i*np.e**(-delta*T_p3)) /2

omega_F4 = (omega_F4i + omega_F4i*np.e**(-delta*T_p4)) /2
```

[64]:
```
# Fit-Gerade

def lin(x,a,b):
    return a*x+b

popt1, pcov1 = curve_fit(lin, omega_F1, T_p1 )
popt2, pcov2 = curve_fit(lin, omega_F2, T_p2 )
popt3, pcov3 = curve_fit(lin, omega_F3, T_p3 )
popt4, pcov4 = curve_fit(lin, omega_F4, T_p4 )

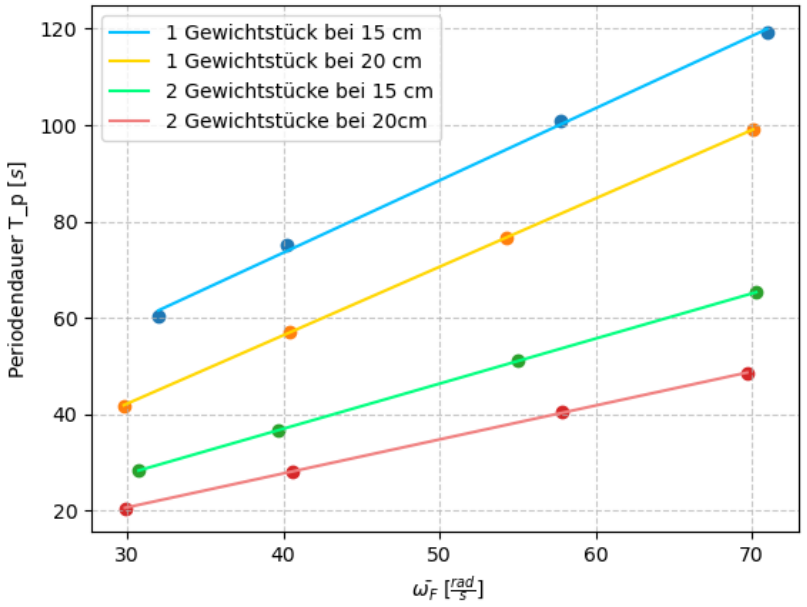
plt.plot(omega_F1,lin(omega_F1,*popt1), color='deepskyblue',label=r'1␣
 ↪Gewichtstück bei 15 cm')
plt.scatter(omega_F1 , T_p1 )

plt.plot(omega_F2,lin(omega_F2,*popt2), color='gold',label=r'1 Gewichtstück bei␣
 ↪20 cm')
plt.scatter(omega_F2 , T_p2 )


plt.plot(omega_F3,lin(omega_F3,*popt3), color='springgreen',label=r'2␣
 ↪Gewichtstücke bei 15 cm')
plt.scatter(omega_F3 , T_p3 )


plt.plot(omega_F4,lin(omega_F4,*popt4), color='lightcoral',label=r'2␣
 ↪Gewichtstücke bei 20cm')
plt.scatter(omega_F4 , T_p4 )
```

```
plt.xlabel(r' $\bar{\omega_F}$ [$\frac{rad}{s}$]')
plt.ylabel(r'Periodendauer T_p $[s]$')
plt.grid(True, linestyle="--", alpha=0.7, which="both")
plt.legend()
plt.savefig('plot2_213.png')
```



[65]:
```
#Trägheitsmoment
m = np.array([9.85, 9.85, 19.7, 19.7 ]) * 10**(-3)
l = np.array([15, 20, 15, 20]) * 10 **(-2)
c = np.array([popt1[0],popt2[0],popt3[0],popt4[0]])
g =9.81 * np.ones(len(m))


Del_l = 0.25 * 10** (-2)
Del_c = np.array([pcov1[0,0],pcov2[0,0],pcov3[0,0],pcov4[0,0]])

I_ = m*g*l *c / (2*np.pi)
Del_I_ = I_*np.sqrt((Del_c/c)**2+(Del_l/l)**2)
```

```
I = np.mean(I_[1:])
Del_I = np.std(I_[1:])


print(f'{I:.4e} \pm {Del_I:.2g}')
```

```
[0.00345621 0.0043652  0.004315   0.00433364]
[5.78350767e-05 5.45651735e-05 7.19167477e-05 5.41711122e-05]
4.3380e-03 \pm 2.1e-05
```

[66]:
```
f = np.array([567.7, 542.8, 519.3, 501.7, 478.7, 449.2, 439.5, 415.5, 389.8,␣
 ↪349.7])
Del1_f = f*0.0005 + 0.1
Del2_f = 2.5
Del_f = np.sqrt(Del1_f**2+ Del2_f**2)

omega_f = 2*np.pi* f /60
Del_omega_f = 2*np.pi * Del_f /60

T = np.array([17.4, 18.4, 18.9, 19.4, 20.1, 21.4, 22.6, 23.7, 25.4, 27.8])
Del_T = 1*np.ones(len(T))



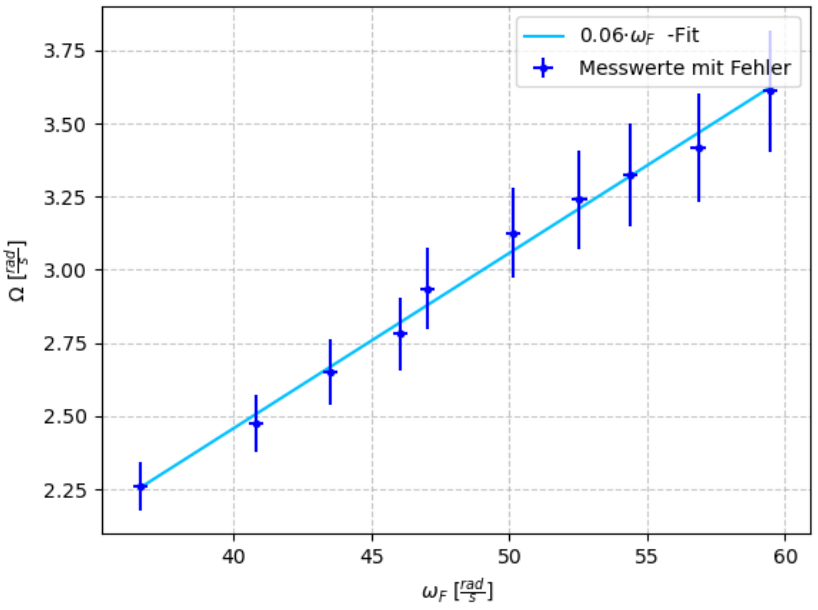
Omega = 2*np.pi*10 / T
Del_Omega = Omega * Del_T/T

popt, pcov = curve_fit(lin,omega_f,Omega)

plt.plot(omega_f,lin(omega_f,*popt), color='deepskyblue',label = fr'{popt[0]:.
 ↪2g}$\cdot \omega_F$  -Fit')
plt.errorbar(omega_f,Omega ,xerr=Del_omega_f, yerr = Del_Omega␣
 ↪,color='blue',fmt='.' ,label ='Messwerte mit Fehler' )

plt.xlabel(r' $\omega_F$ [$\frac{rad}{s}$]')
plt.ylabel(r'$\Omega $ [$\frac{rad}{s}$]')
plt.grid(True, linestyle="--", alpha=0.7, which="both")
plt.legend()
plt.savefig('plot3_213.png')
```

```
[0.05986721 0.06395591] [[ 3.57721164e-06 -1.74337242e-04]
 [-1.74337242e-04  8.66659169e-03]]
```



[67]:
```
# Berechnung aus der Steigung

I_x1 = I/(1-popt[0])

Del_I_x1 = 1 /(1-popt[0]) * np.sqrt(Del_I**2 + ( I* pcov[0,0]/ (1-popt[0]) )**2)

print(f'{I_x1:.4e} \pm {Del_I_x1:.2g}')

#427/89:
```

```
4.6142e-03 \pm 2.2e-05
```

[71]:
```
# Berechnung aus der Nutation

omega_N =2*np.pi*  np.array([670, 635, 590, 575, 520, 500, 490, 380, 335, 290
↪]) /60
Del_omega_N = 2*np.pi * np.array([20, 19, 18, 17, 16, 15,15 , 11, 10, 9]) /60

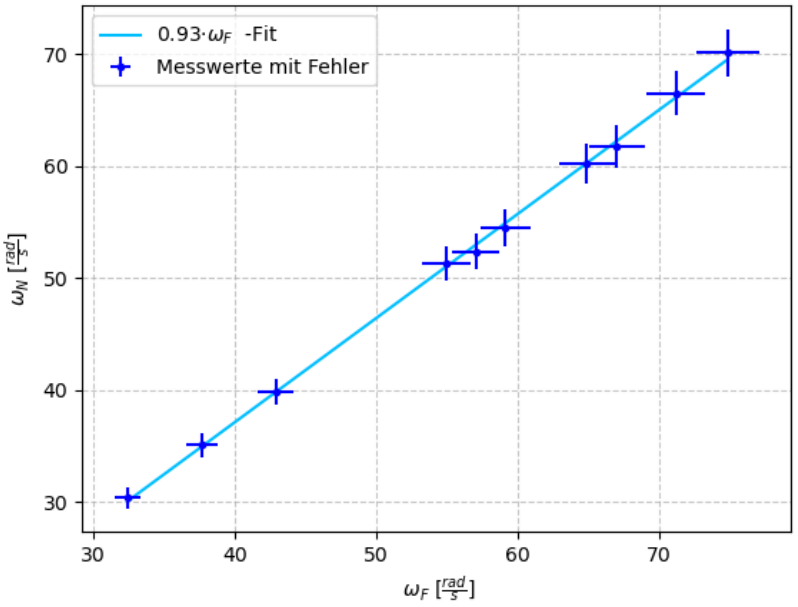
omega_F =2*np.pi* np.array([715, 680, 640, 620, 565, 545, 525, 410, 360, 310]) /
↪60
Del_omega_F =2*np.pi * np.array([21 ,20 ,19 ,19 ,17 ,16 ,16 ,12 ,11 ,9]) /60
```

```
popt, pcov = curve_fit(lin,omega_F ,omega_N )

plt.plot(omega_F,lin(omega_F,*popt), color='deepskyblue' ,label = fr'{popt[0]:.
  ↪2g}$\cdot \omega_F$  -Fit')
plt.errorbar(omega_F,omega_N ,xerr=Del_omega_F, yerr = Del_omega_N ␣
  ↪,color='blue',fmt='.' ,label ='Messwerte mit Fehler' )

plt.xlabel(r' $\omega_F$ [$\frac{rad}{s}$]')
plt.ylabel(r'$\omega_N $ [$\frac{rad}{s}$]')
plt.grid(True, linestyle="--", alpha=0.7, which="both")
plt.legend()
plt.savefig('plot4_213.png')
```

```
[ 0.93069395 -0.13431863] [[ 1.01563113e-04 -5.71135664e-03]
 [-5.71135664e-03  3.40065960e-01]]
```



[69]:
```
# Berechnung des Trägheitsmomentes

I_x2 = I / popt[0]
Del_I_x2 = I_x2 * np.sqrt((Del_I/I)**2 + (pcov[0,0]/popt[0])**2)
```