Versuch 211 - Adiabatenkoeffizient

PAP 2.1

Teilnehmender Student: **Harish Mahendran**

Gruppe des Teilnehmenden: **14**

Kurs: **Vormittags**

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**
1.1 Motivation 1
1.2 Grundlagen aus der Physik 1
1.2.1 Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Clément & Desormes . . . 1
1.2.2 Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Rüchhard 3

2 Durchführung **5**
2.1 Versuchskizzen 6
2.2 Messprotokoll 7

3 Auswertung **9**
3.1 Clément & Desormes 9
3.2 Rüchardt 10

4 Zusamenfassung und Diskussion **12**

5 Python-Code **13**

1. Einleitung

1.1 Motivation

1.2 Grundlagen aus der Physik

1.2.1 Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Clément & Desormes

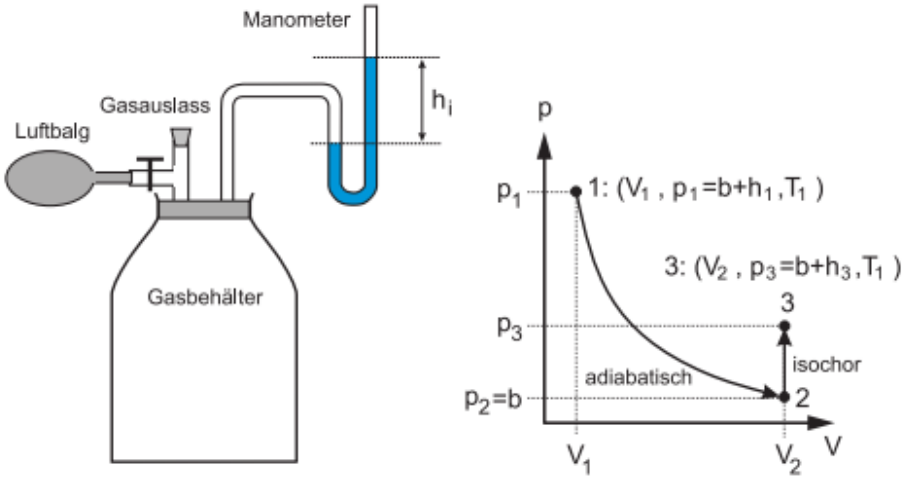


Abbildung 1.1: Links: Aufbau nach Clément und Desormes Rechts: Dazugehörige pV-Diagramm (Quelle: Jens Wagner, "Physikalisches Anfängerpraktikum PAP 2.1", Stand:2025)

Der Versuchsaufbau besteht aus einem Gasbehälter mit einem angeschlossenen Luftbalg und Gasauslass. Der Druck in dem Behälter kann mithilfe eines U-Rohr-Manometers gemessen werden (siehe Abbildung (1)). Erhöht man in einem ersten Schritt den Druck in dem Gasbehälter mithilfe des Luftbalgs, erhöht sich gleichzeitig die Temperatur der enthaltenen Luft. Nachdem die Temperatur nach einiger Zeit auf Zimmertemperatur abfällt, kann der Druck am Manometer abgelesen werden. Für diesen ersten Zustand gilt:

$$\textbf{Zustand 1}: \quad V_1, T_1, p_1 = b + h_1 \tag{1.1}$$

mit dem Volumen V_1, der Temperatur T_1 (Zimmertemperatur), dem Druck p_1, dem äußeren Luftdruck b und der Höhendifferenz h_1 der Wassersäulen des Manometers. Anschließend wird der Gasauslassstopfen für eine kurze Zeit geöffnet, wodurch sich der Druck im Behälter dem äußeren Luftdruck b angleicht. Dies entspricht einer Volumenunzunahme um ΔV, wobei in dieser kurzen Zeit kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet. Damit handelt es sich um eine adiabatische Zustandsänderung, mit einer Temperaturabnahme von ΔT:

$$\textbf{Zustand 2}: \quad V_2 = V_1 + \Delta V, \quad p_2 = b, \quad T_2 = T_1 - \Delta T \tag{1.2}$$

Bei gleichbleibendem Volumen steigt die Temperatur des Gases nach einiger Zeit zurück auf Zimmertemperatur. Damit handelt es sich um eine isochore Zustandsänderung, bei der der Druck p ansteigt:

$$\textbf{Zustand 3}: \quad V_3 = V_2 = V_1 + \Delta V, \quad p_3 = b + h_3, \quad T_3 = T_1 \tag{1.3}$$

Mithilfe der Adiabatengleichung ergibt sich:

$$p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa} \tag{1.4}$$

$$(b + h_1) V_1^{\kappa} = b(V_1 + \Delta V)^{\kappa} \tag{1.5}$$

Mit $\Delta V \ll V_1$ kann folgende Taylor-Näherung in erster Ordnung verwendet werden:

$$(V_1 + \Delta V)^{\kappa} = V_1^{\kappa} \left(1 + \kappa \frac{\Delta V}{V_1}\right) \approx V_1^{\kappa} \left(1 + \kappa \frac{\Delta V}{V_1}\right) \tag{1.6}$$

Damit lässt sich Gleichung (5) umformen zu:

$$\frac{h_1}{b} = \kappa \frac{\Delta V}{V_1} \tag{1.7}$$

Da in den Zuständen 1 und 3 die Gastemperatur gleich ist, gilt nach dem Gesetz von Boyle-Mariotte:

$$p_1 V_1 = p_3 V_3 \quad \Leftrightarrow \quad (b + h_1) V_1 = (b + h_3)(V_1 + \Delta V) \tag{1.8}$$

Mithilfe von $h_3 \ll b$ und $\Delta V \ll V_1$ erhält man:

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{h_1 - h_3}{b} \tag{1.9}$$

Eingesetzt in Gleichung (7) ergibt sich damit der Adiabatenkoeffizient κ zu:

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_3} \tag{1.10}$$

1.2.2 Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Rüchhard

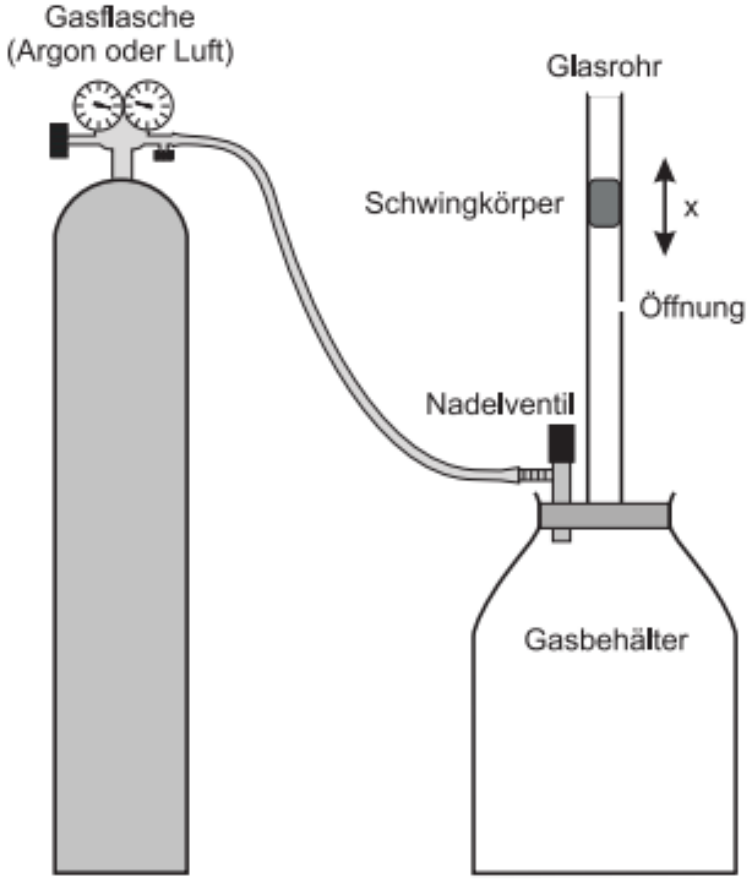


Abbildung 1.2: Versuchsaufbau nach Rüchardt

Auf einem Gasbehälter wird ein Glasrohr montiert, in welchem ein Schwingkörper mit nahezu gleichem Durchmesser auf und ab schwingen kann. Das Gas wird dabei adiabatisch komprimiert und expandiert. Um der Dämpfung der Schwingung aufgrund von Reibung entgegenzuwirken, befindet sich eine kleine Öffnung über der Mitte des Glasrohrs. Unterhalb des Lochs erfährt der Schwingkörper damit einen zusätzlichen Druck und in der Position oberhalb der Öffnung kann die Luft aus dem Rohr entweichen und der Druck sinkt. Im Gleichgewicht ist der Druck p im Gasgefäß gleich der Summe des Luftdrucks p_0 und des Schweredrucks des Schwingkörpers:

$$p = p_0 + \frac{mg}{A} \tag{1.11}$$

mit der Masse m und der Querschnittsfläche A des Schwingkörpers. Bei einer kleinen Auslenkung x oberhalb der Gleichgewichtslage verändert sich der Druck um dp, womit gilt:

$$m\ddot{x} = Adp \tag{1.12}$$

Aus der Adiabatengleichung erhält man nach Differenzierung nach V:

$$\frac{dp}{dV} = -\kappa V^{-\kappa-1} \cdot \text{const.} \tag{1.13}$$

$$\frac{dp}{dV} = -\kappa\frac{p}{V} \quad \Leftrightarrow \quad dp = -\kappa\frac{p}{V}dV \tag{1.14}$$

Eingesetzt in Gleichung (12) sowie mit $dV = Ax = \pi r^2 x$ erhält man:

$$\ddot{x} + \frac{\pi^2 r^4 \kappa p}{mV}x = 0 \tag{1.15}$$

Wobei r für den Radius des Glasrohrs steht. Hierbei handelt es sich um eine Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Kreisfrequenz w:

$$\omega^2 = \frac{\pi^2 r^4 \kappa p}{mV} \tag{1.16}$$

Mithilfe von $w = \frac{2\pi}{T}$ kann der Adiabatenkoeffizient κ wie folgt berechnet werden:

$$\kappa = \frac{4mV}{r^4 T^2 p} \tag{1.17}$$

Wir werden in diesem Versuchsteil einmal eine Messung an Luft und einmal an Argon. Der wesentliche Unterschied ist die Anzahl der Freiheitsgraden, da Argon ein Edelgas ist, ist das Gas 1-Atomig. Also einen Freiheitsgrad von $f = 3$ haben und damit einen Adiabatenkoeffizient von $\kappa = \frac{f+2}{f} = 1,\bar{6}$. Luft besteht größtenteils aus Stickstoff N_2 also ein 2-Atomiges Gas. Die haben ein Freiheitsgrad von $f = 5$, also ein Adiabtenkoeffizient von $\kappa = 1,4$. Diese Werte sind auch in der folgenden Tabelle aufgetragen:

Gas	κ
Ar	1,648
He	1,63
H_2	1,41
N_2	1,401
O_2	1,398
CO_2	1,293
Methan	1,308
Ethan	1,188
Propan	1,13

Abbildung 1.3: Tabelle der Adiabatenkoeffizienten

2. Durchführung

2.1 Versuchskizzen

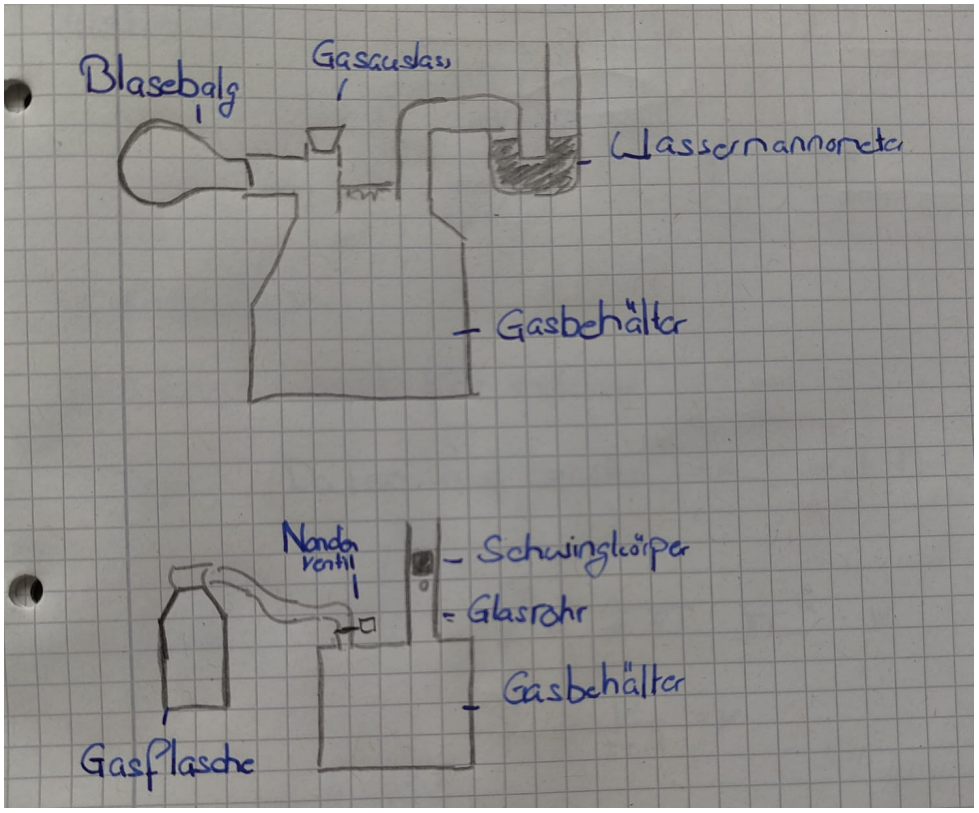


Abbildung 2.1: oben: Aufbau nach Clément & Desormes unten: Aufbau nach Rüchardt

2.2 Messprotokoll

Messprotokoll 221: Adiabatenkoeffizient

11.03.25
Harish Mahendran
Jonas Schweer

Messinstrumente:

A1: - Gasbehälter mit Manometeraufsatz und Luftbalg

A2: - Gasbehälter mit Rohransatz und Nadelventil
- Glasrohr mit zylindrischem Schwingkörper
- Stoppuhr
- Gasflaschen mit Argon und mit Luft

Aufgabe 1: Messung nach Clément und Desormes

Wir erzeugen einen Überdruck im Gasbehälter und warten, bis er auf Raumtemperatur ist. Wir notieren den Druck h_1. Anschließend öffnen wir kurz den Gasauslass und warten erneut Ausgleich auf Zimmertemperatur ab. Wir notieren h_3. Das Wiederholen wir 5 mal.

	Messung	1	2	3	4	5
links	h_1 [cm]	57,3	57,3	57,1	54,9	53,5
	h_3 [cm]	58,8	58,8	58,7	58,2	58,0
rechts	h_1 [cm]	61,2	61,3	61,5	63,6	65,0
	h_3 [cm]	59,8	59,8	59,8	60,5	60,6

Fehler: ± 0,2 cm

Tabelle 1: Druckmessung nach Clément und Desormes

$\vartheta = (21,7 \pm 0,5)°C$

Aufgabe 2: Messung nach Rüchardt

Wir stellen einen Druck von 0,4 bar ein und versuchen die Schwingung möglichst mittig zu platzieren. Wir notieren die Werte des Aufbaus:

Ag: $m = (26,116 \pm 0,002)\,g$
$V = (5370 \pm 5)\,cm^3$
$2r = (15,95 \pm 0,02)\,mm$

Luft: $m = (26,006 \pm 0,002)\,g$
$V = (5460 \pm 5)\,cm^3$
$2r = (15,97 \pm 0,05)\,mm$

Wir messen die Zeit für 50 Perioden:

$T_{Ag,1} = 47,48\,s$ $\quad T_{Ag,2} = 46,45\,s$ $\quad T_{Ag,3} = 46,65$

$T_{Luft,1} = 50,76\,s$ $\quad T_{Luft,2} = 50,70\,s$ $\quad T_{Luft,3} = 50,65$

$\Delta T = 0,3\,s$

$\vartheta = (22,2 \pm 0,5)°C$

$p = (990,7 \pm 0,3)\,mbar$

11.03.25 MMh

3. Auswertung

3.1 Clément & Desormes

Bevor man mit Gleichung (1.10) den Adiabatenkoeffizienten berechnen kann, muss man noch die Höhendifferenzen berechnen:

$$h_1 = h_{1_{\text{rechts}}} - h_{1_{\text{links}}} \tag{3.1}$$

und

$$h_3 = h_{3_{\text{rechts}}} - h_{3_{\text{links}}} \tag{3.2}$$

Der Fehler dieser Größen erhält man durch quadratisches Addieren der Ablesefehler

Messung	$h_1[cm]$	$\Delta h_1[cm]$	$h_2[cm]$	$\Delta h_2[cm]$	$\kappa[-]$
1	$3,9$		$1,0$		$1,34 \pm 0,14$
2	$4,0$		$1,0$		$1,33 \pm 0,13$
3	$4,4$	$0,28$	$1,1$	$0,28$	$1,33 \pm 0,12$
4	$8,7$		$2,3$		$1,36 \pm 0,06$
5	$11,5$		$2,0$		$1,21 \pm 0,04$

Tabelle 3.1: Adiabatenkoeffizienten der 5 Messungen

Bildet man nun den Mittelwert so erhält man

$$\kappa = 1,32 \pm 0,05$$

Wobei hier die Standardabweichung als Fehler verwendet wurde.
Vergleicht man nun diesen Wert mit der Literatur **??** ($\kappa = 1,401$) so erhält man eine σ-Abweichung von

$$1,62$$

Diese wurde mit der folgender Gleichung berechnet

$$\sigma = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}} \tag{3.3}$$

3.2 Rüchardt

Luft

Mit Gleichung (1.17) kann man anhand der Periodendauern den Adiabatenkoeffizient berechnen. Die benötigten Werte sind Messprotokoll unter *Aufgabe 2: Messung nach Rüchardt* zu finden:
Masse des Schwingkörpers: $m_L = (26,006 \pm 0,002)\, g$
Volumen des Gases: $V_L = (5460 \pm 5)\, cm^3$
Radius des Schwingkörpers: $r_L = (7,985 \pm 0,025) mm$
Luftdruck: $p_0 = (990,7 \pm 0,3)\, mbar$
Um den Gesamtdruck p auf den Schwingkörper auszurechnen verwenden wir Gleichung (1.11). Der Fehler des Gesamtdrucks ergibt sich nach Gauss wie folgt

$$\Delta p = \sqrt{(\Delta p_0)^2 + (\frac{m\, g}{\pi r^2})^2((\frac{\Delta m}{m})^2 + (\frac{2\Delta r}{r})^2)} \tag{3.4}$$

Für die Zeit t wird hier der Mittelwert aus den 3 Messungen verwendet. Dieser Wert wird noch durch die Anzahl der Perioden $n = 50$ dividiert. Man erhält dann

$$\bar{T} = (1,0141 \pm 0,0008) s$$

wobei hier wieder die σ-Abweichung als Fehler verwendet wurde.
Aus den Werten kann man nun erneut den Adiabatenkoeffizient von Luft berechnen:

$$\kappa = 1,35 \pm 0,03$$

Vergleicht man diesen Wert mit den Wert aus *3.1* so hat man eine σ-Abweichungen von

$$0,51\sigma$$

Vergleicht man diesen Wert mit den theoretisch zu erwartenden Wert (aus 1.3)

$$\kappa_{theo} = 1,401$$

so erhalten wir eine σ-Abweichung von

$$1,7\sigma$$

Argon

Die Rechnung folgt analog zur Berechnung von Luft und wird daher abgekürzt aufgeschrieben: Masse des Schwingkörpers: $m_A = (26,116 \pm 0,002)\, g$
Volumen des Gases: $V_A = (5370 \pm 5)\, cm^3$

Radius des Schwingkörpers: $r_A = (7,975 \pm 0,010)mm$
Luftdruck: $p_0 = (990,7 \pm 0,3)\,mbar$ die Periodendauer:

$$\bar{T} = (0,937 \pm 0,009)s$$

und damit einen Adiabatenkoeffizient von

$$\kappa = 1,57 \pm 0,05$$

der theoretisch zu erwartenden Wert beträgt

$$\kappa_{theo} = 1,648$$

Berechnet man nun die σ-Abweichung zu der Literatur so erhält man

$$1,56\sigma$$

4. Zusamenfassung und Diskussion

In diesem Versuch wurde der Adiabatenkoeffizient von Luft und Argon bestimmt. Für Luft wurden dabei zwei verschiedene Methoden angewendet: Zum einen die Methode von Clément und Desormes und zum anderen die Methode von Rüchard. Der Adiabatenkoeffizient von Argon wurde ausschließlich mit der Methode von Rüchard bestimmt.
Die Methode nach Clément und Desormes bestimmt den Adiabatenkoeffizienten κ durch eine Kombination aus adiabatischer Expansion und anschließender isochoren Zustandsänderung, wobei die Druckänderungen vor und nach der Expansion gemessen werden. Im Gegensatz dazu nutzt die Methode nach Rüchardt die Schwingungsfrequenz eines Körpers, der in einem mit Gas gefüllten Zylinder frei schwingt. Aus der Schwingungsperiode lässt sich κ bestimmen.
Bei der Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten von Luft mithilfe der Methode nach Clément und Desormes liegt nur eine $1,62\sigma$ Abweichung zum theoretischen Wert vor. Bei der Methode nach Rüchardt erhalten wir Abweichung von $1,7\sigma$ vom theoretischen Wert von Luft und $1,56\sigma$ vom theoretischen Wert von Argon ergeben sich keine signifikanten Abweichungen. Auffällig ist aber, dass bei beiden Methoden die bestimmten Werte unterhalb den Werten der Literatur liegen. Das heißt, dass trotz der geringen σ-Abweichungen man systematische Fehler vermuten kann.Bei der Messung nach Clément und Desormes konnte man feststellen, dass während der theoretischen adiabatischen Zustandsänderung es zu einem nicht vernachlässigbaren Verlust an Wärme an die Umgebung (z.B. durch den Blasbalg oder dem Gefäß) gekommen kann sein. Undichtigkeiten im Versuchsaufbau könnten ebenfalls zu fehlerhaften Messergebnissen beigetragen haben. Eine Fehlerquelle bei der Rüchardt Methode bleibt die Reibung, die auch mit Loch nicht völlig eliminiert werden kann. Für eine höhere Genauigkeit können noch mehr Perioden gemessen werden und zum Beispiel mit einer Lichtschranke automatisch die Zeiten gemessen werden.

5. Python-Code

Versuch 221

March 12, 2025

1 Versuch 221 - Adiabatenkoeffizient

[25]:
```
import numpy as np
```

1.1 Clément und Desormes

[26]:
```
h1_l = np.array([57.3,57.3,57.1,54.9,53.5])
h1_r = np.array([61.2,61.3,61.5,63.6,65.0])

h1 = h1_r - h1_l


h3_l = np.array([58.8,58.8,58.7,58.2,58.6])
h3_r = np.array([59.8,59.8,59.8,60.5,60.6])

h3 = h3_r - h3_l

Del_h3 = Del_h1 = np.sqrt(2*0.2**2)

# Berechnnung kappa

kappa = h1 / (h1-h3)

Del_kappa = 1/(h1-h3)**2 * np.sqrt( (h3*Del_h1)**2 + (h1*Del_h3)**2 )

# Mitelwert bilden

kappa_mean = np.mean (kappa)
Del_kappa_mean = np.std(kappa)
```

```
1.3162791137326066
0.05373568233300468
```

1.2 Rüchardt

Luft

[27]:
```
# Gegebene Konstanten
m_L = 26.006 * 10**(-3)
```

1

```
Del_m_L = 0.002  * 10**(-3)

V_L = 5460 * 10**(-6)
Del_V_L = 5 * 10**(-6)

r_L = 15.97 /2 * 10**(-3)
Del_r_L = 0.05 * 10**(-3)

g =9.81

# Gemessene Konstanten
p_0 = 990.7 *100
Del_p_0 = 0.3 *100

p = p_0 + m_L*g / (np.pi*r_L**2)
Del_p = np.sqrt(Del_p_0**2+ (g/(np.pi*r_L**2)*Del_m_L)**2 + (2*m_L*g/(np.
 ↪pi*r_L**3)*Del_r_L)**2)

n = 50
Del_n = 1 # Potenzieller Zählfehler

t = np.array([ 50.76 ,50.70 , 50.65])   # gemessene Zeit
Del_t = Del_t_A = 0.3

T = t/n
Del_T = T * np.sqrt( (Del_t/t)**2 + (Del_n /n)**2  )

T_L_mean = np.mean(T)
Del_T_L_mean = np.std(T)

#Berechnen von gamm

kappa2_L = (4*m_L*V_L)/(r_L**4*T_L_mean**2*p)
Del_kappa2_L = kappa2_L * np.sqrt( (Del_m_L / m_L)**2 + (Del_V_L /V_L )**2 +␣
 ↪(4* Del_r_L /r_L )**2 + (2*Del_T_L_mean / T_L_mean)**2 + (Del_p/p)**2  )
```

```
1.3539533257046967
```

Argon

[32]:
```
# Gegebene Konstanten
m_A = 26.116  * 10**(-3)
Del_m_A = 0.002  * 10**(-3)

V_A = 5370 * 10**(-6)
Del_V_A = 5 * 10**(-6)

r_A = 15.95 /2  * 10**(-3)
```

```
Del_r_A = 0.05 * 10**(-3)

n = 50
t_A = np.array([ 47.48 , 46.45 , 46.65])   # gemessene Zeit

p = p_0 + m_A*g / (np.pi*r_A**2)
Del_p = np.sqrt(Del_p_0**2+ (g/(np.pi*r_A**2)*Del_m_A)**2 + (2*m_A*g/(np.
 ↪pi*r_A**3)*Del_r_A)**2)

T_A = t_A/n
Del_T_A = T_A * np.sqrt( (Del_t_A/t_A)**2 + (Del_n /n)**2  )

T_A_mean = np.mean(T_A)
Del_T_A_mean = np.std(T_A)

#Berechnen von gamm

kappa2_A = (4*m_A*V_A)/(r_A**4*T_A_mean**2*p)
Del_kappa2_A = kappa2_A * np.sqrt( (Del_m_A / m_A)**2 + (Del_V_A /V_A )**2 +␣
 ↪(4* Del_r_A /r_A )**2 + (2*Del_T_A_mean / T_A_mean)**2 + (Del_p/p)**2  )
```

```
0.049558670859449594
```

3