Versuch 223 - Brownsche Bewegung

PAP 2.1

Teilnehmender Student: **Harish Mahendran**

Gruppe des Teilnehmenden: **14**

Kurs: **Vormittags**

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**
1.1 Motivation 1
1.2 Grundlagen aus der Physik 1

2 Durchführung **4**
2.1 Versuchsaufabau 4
2.2 Messprotokoll 5

3 Auswertung **6**
3.1 Importieren und grafische Dartsellung der Messdaten 6
3.2 Berechnung des mittleren Verschiebungsquadrates und dessen Fehler 7
3.3 kontrollverteilung 8
3.4 Kumulative Verteilung der Wahrscheinlichkeitsquadrate 9
3.5 Vergleich der Werte 10

4 Zusamenfassung und Diskussion **11**
4.1 Zusammenfassung 11
4.2 Diskussion und Kritik 11
4.3 Fazit 11

5 Python-Skript **13**

1. Einleitung

1.1 Motivation

Die Brownsche Teilchenbewegung ist die quasi zufällige Bewegung kleiner Partikel auf Mikroskalen und darunter. Da sie durch die thermische Bewegung der Partikel induziert wird, ist sie natürlicherweise an thermodynamische Konzepte und Größen wie den Irrflug und die Boltzmannkonstante gekoppelt. Gelingt es die Brownsche Teilchenbewegung zu beobachten und zu vermessen, können die so erhaltenen Werte zur Bestimmung der Boltzmannkonstante und anderer relevanter Größen für diesen Skalenbereich genutzt werden.

1.2 Grundlagen aus der Physik

Die Brownsche Bewegung kann mit dem Randomwalk-Prinzip modelliert werden. Das heißt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen in eine Richtung bewegt gleich groß ist unabhängig von der Richtung. Betrachtet man den eindimensionalen Fall, so lässt sich diese Bewegung wie folgt darstellen:

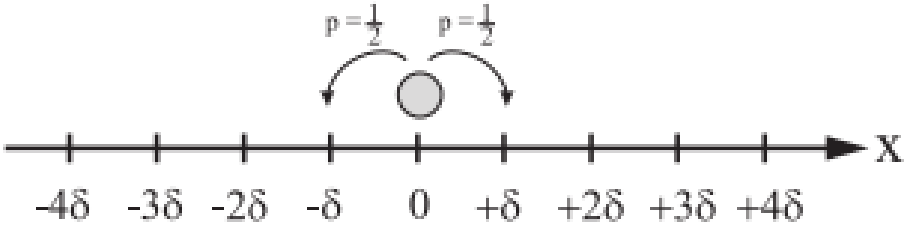


Abbildung 2: Eindimensionaler Random-Walk (Quelle: Jens Wagner, "Physikalisches Anfängerpraktikum PAP 2.1", Stand:2025

Betrachtet man ein Teilchen, dass sich nach n Stößen an einem Ort $x = m\delta$ $(m > 0)$ befindet. So muss das Teilchen $\frac{n+m}{2}$ mal in die positive Richtung und $\frac{n-m}{2}$ in die negative Richtung gestoßen werden. Die Wahrscheinlich lässt sich dann wie folgt berechnen

$$P(n:m) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+m)} p^{\frac{n+m}{2}} (1-p)^{\frac{n-m}{2}} \tag{1}$$

da die Wahrscheinlichkeit gegeben ist als $p = \frac{1}{2}$ erhält man

$$P(n:m) = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{[\frac{1}{2}(n+m)]![\frac{1}{2}(n-m)]!} \tag{2}$$

Da die Zeit zwischen den Stößen τ sehr gering ist, finden sehr viele Stöße innerhalb unserer Beobachtungsdauer, die ungefähr bei $1s$ leigt. Man kann dann die Stirling-Näherungsformel

verwenden, die gegeben sit als

$$a! = (2\pi a)^{\frac{1}{2}} a^a e^{-a} \tag{3}$$

daraus folgt für (2):

$$P(n:m) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{\frac{-m^2}{2n}} \tag{4}$$

Da die Messung von n und m sehr schwierig sind, ersetzen wir diese durch die Größen x und t . Da in einem Zeitschritt immer ein Stoß erfolgt, heißt dass das nach gleich vielen Zeitschritten entweder beide gerade oder beide ungerade sind, daher gilt für Δm:

$$\Delta m = \pm 2 \tag{5}$$

Es folgt dadurch für die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen im Intervall $[x, x + \Delta x]$ zu finden:

$$P(n:m)\frac{\Delta x}{\delta} = P(x;m)\Delta x \tag{6}$$

Man definiert noch den Diffusionskoeffizient D

$$D = \frac{\delta^2}{2\tau} \tag{7}$$

Substituiert man noch $n = \frac{t}{\tau}$ und $m = \frac{x}{\delta}$ so erhält man

$$P(x;t)\Delta x = \frac{\Delta x}{\sqrt{4\pi D t}} e^{\frac{-x^2}{4Dt}} \tag{8}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist Gauß-verteilt. Berechnet man das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle x^2 \rangle$ so erhält man

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x;t) = 2Dt \tag{9}$$

Da wir hier den 2-Dimensionalen Fall, so verwendet man

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle \tag{10}$$

So ergibt sich analog zu (9)

$$\langle r^2 \rangle = 4Dt \tag{11}$$

Der Diffusionskoeffizient lässt sich auch nach Stokes-Einstein wie folgt ausdrücken

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a} \tag{12}$$

Hier ist T die Temperatur, *eta* die Viskosität und a der Radius des zu beobachtenden Teilchen. k ist die Boltzmannkonstante, an der wir in diesem Versuch interessiert sind. Durch umstellen und vernwenden von Gleichung (11) erhält man

$$k = \frac{6\pi\eta a}{4tT}\langle r^2 \rangle \tag{13}$$

2. Durchführung

2.1 Versuchsaufabau

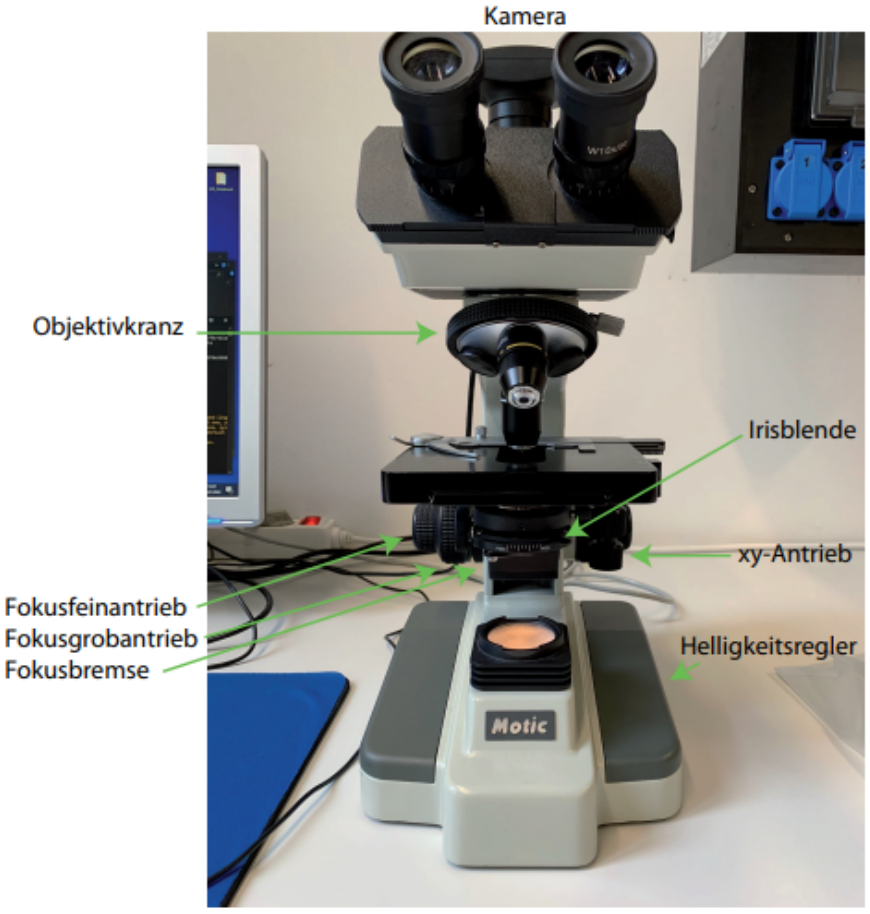


Abbildung 2:Versuchsaufabau (Quelle: Jens Wagner, "Physikalisches Anfängerpraktikum PAP 2.1", Stand:2025

2.2 Messprotokoll

Messprotokoll 223: Brownsche Bewegung

17.02.25
Harish Mahendran
Jonas Schweer

Messaufbau:

- Durchlichtmikroskop Motic B1 mit CCD-Kamera
- Kugelförmige Partikel suspendiert in Wasser
- PC mit Messprogramm, Jupyternotebook und Excel
- Thermometer
- Objektmikrometer

Aufgabe 1: Herstellung der Probe

Wir stellen die Probe nach Anleitung her. Wir legen sie in das Mikroskop und stellen dessen Fokus so ein, dass wir die Partikel beobachten können. Außerdem notieren wir die Daten zum Durchmesser der Partikel auf der Flasche:

$$d = (755 \pm 30)\,\text{nm}$$

Aufgabe 2: Aufnehmen der Bildreihe

Wir starten das Programm und nehmen eine Bildfolge von 150 Bildern auf. Nachdem das Programm die Bilder geschossen hat, notieren wir die Raumtemperatur.

$$T = (21{,}90 \pm 0{,}10)\,^\circ\text{C} = (295{,}05 \pm 0{,}10)\,\text{K}$$

Aufgabe 3: Eichung des Ausschnittes

Mit Hilfe eines Mikrometermaßstabs wollen wir nun das Bild eichen. Dafür nutzen wir den "Calibration" - Tab innerhalb des Programms. Unsere Eichung lautet:

$$E = 0{,}0909\,\mu\text{m/pixel}$$

Aufgabe 4: Vermessung der Partikelpositionen

Mit dem Tracking - Tab des Programms können wir nun anfangen, auf jedem Bild die Position des Partikels zu markieren. Sind wir fertig damit, speichern wir alle wichtigen Messergebnisse in einen Ordner zur Auswertung ab.

3. Auswertung

3.1 Importieren und grafische Dartsellung der Messdaten

Zunächst werden die Messdaten entsprechend importiert und umformatiert. Nun wird der Bewegungsverlauf des Teilchens durch Auftragung der Positionen auf ein zweidimensionales Raster visualisiert:

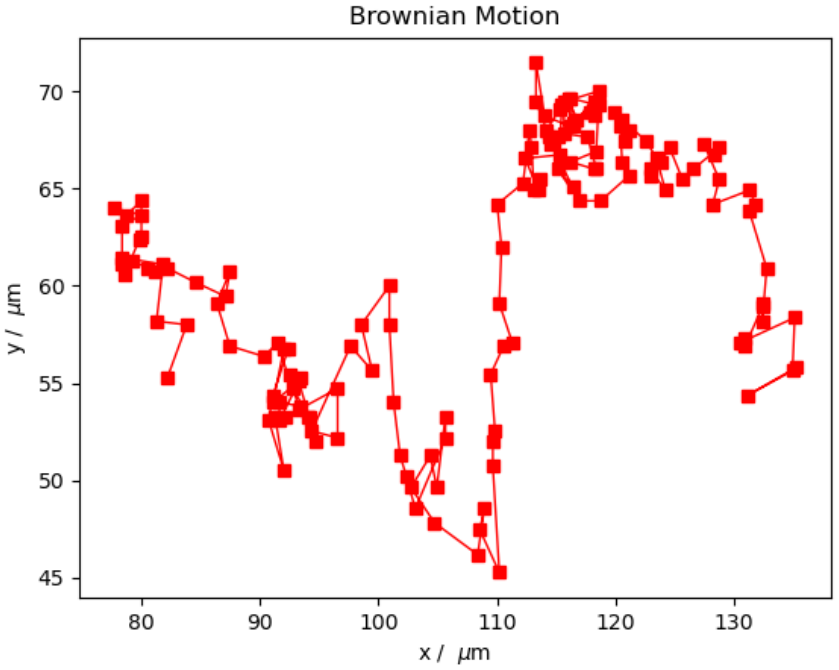


Abbildung 3: Zeitlicher Verlauf der Teilchenposition

man kann hier noch ein Farbverlauf anlegen der die Brownschen Bewegung besser visualisiert:

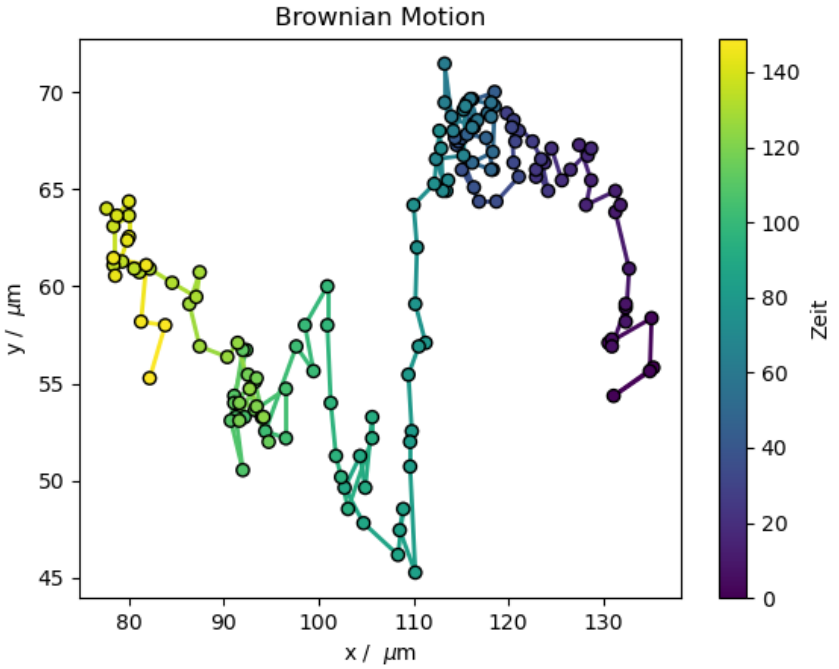


Abbildung 4: Zeitlicher Verlauf der Teilchenposition mit Farbgradient

3.2 Berechnung des mittleren Verschiebungsquadrates und dessen Fehler

Das mittlere Verschiebungsquadrat lässt sich aus der Messung zuvor berechnen. Mittelt man diesen Wert so erhält man

$$\langle r^2 \rangle = (2,52 \pm 0,22)\mu m^2$$

wobei hier die Standardabweichung als Fehler verwendet wurde. Das Zeitintervall beträgt $t = 1s$, da dies Bildaufnehmrate war. Es wird hier ein Fehler von $\Delta t = 0,05$ geschätzt. Mit Gleichung (13) kann man nun die Boltzmannkonstante berechnen. Dafür braucht man jedoch die Viskosität von Wasser. Dies lässt sich auf Seite 61 im PAP2.1 Skript ablesen. Hierbei erhält man eine Viskosität von $\eta = 9,54 \pm 0,15 * 10^{-4} Pas$, auch hier wurde der Ablesefehler geschätzt. Man erhält also folegden Wert für die Boltzmannkonstante

$$k = (1.44 \pm 0,14)10^{-23} \frac{J}{k}$$

Der Fehler lässt sich dann mit folgender Fehlerformel berechnen

$$\Delta k = k \sqrt{(\frac{\Delta \eta}{\eta})^2 + (\frac{\Delta a}{a})^2 + (\frac{\Delta t}{t})^2 + (\frac{\Delta T}{T})^2 + (\frac{\Delta \langle r^2 \rangle}{\langle r^2 \rangle})^2} \tag{14}$$

Mit Gleichung (11) folgt folgende Gleichung

$$D = \frac{\langle r^2 \rangle}{4t} \tag{15}$$

und daraus die Fehlerformel

$$\Delta D = D\sqrt{(\frac{\Delta\langle r^2\rangle}{\langle r^2\rangle})^2 + (\frac{\Delta t}{t})^2} \tag{16}$$

Es folgt für den Diffusionskoeffizienten

$$D = (6,29 \pm 0,6) \cdot 10^{-13}\frac{m^2}{s}$$

3.3 kontrollverteilung

Um zu überprüfen ob die Verrückungswahrscheinlichkeit tatsächlich Gaußförmig ist tragen wir die Verrückungen in einem Histogramm auf. Da Verrückungen in x und y Richtung isotrop ist, werden diese Gemeinsam im folgenden Hsitogramm eingetragen

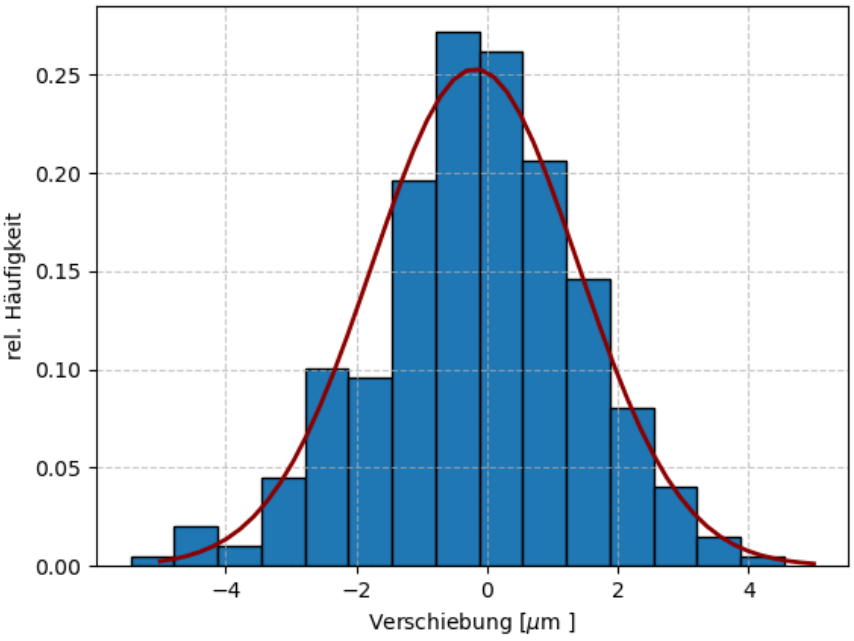


Abbildung 5: Histogramm der Partikelverschiebungen in x- und y-Richtung

Man sieht hier, dass sich das Histogramm einer Gausskurve ähnelt. Bei einer größeren Anzahl von Messungen, wäre dieser Verlauf besser erkennbar.

3.4 Kumulative Verteilung der Wahrscheinlichkeitsquadrate

Nach Gleichung (11) ist das mittlere Verschiebungsquadrat proportional zur Zeit t. Dies wird im folgenden Diagramm überprüft in dem man die kummulative Verschiebung gegenüber die Zeit geplottet.

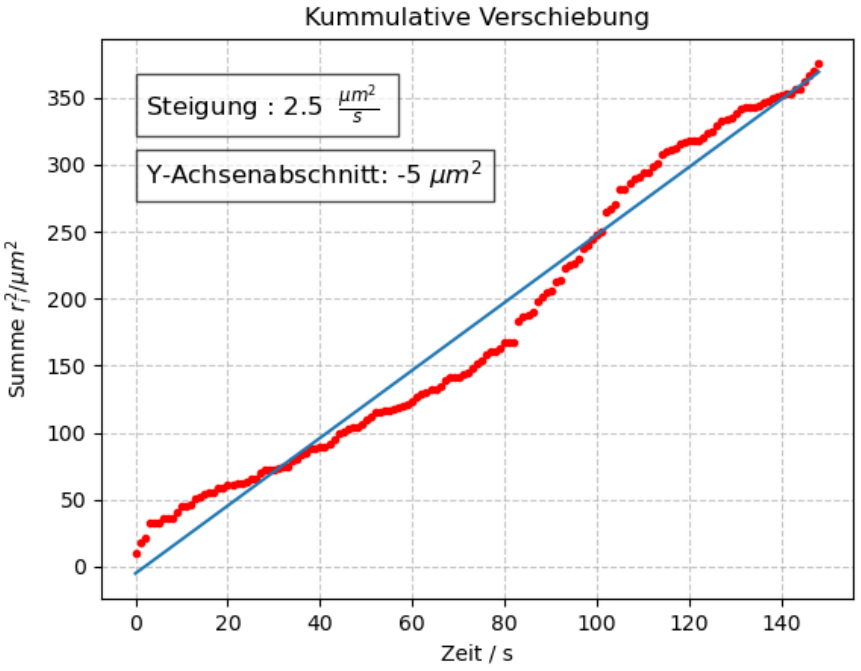


Abbildung 6: Kummulative Verschiebung desPartikels

Die Steigung c ist gegeben als

$$c = \frac{D}{4} = \frac{4kT}{6\pi\eta a} \tag{17}$$

Die Boltzmannkonstante lässt sich dann wie folgt berechnen

$$k = \frac{6\pi\eta a}{4T} \cdot c \tag{18}$$

Die Fehlerformel lautet

$$\Delta k = k\sqrt{(\frac{\Delta\eta}{\eta})^2 + (\frac{\Delta a}{a})^2 + (\frac{\Delta c}{c})^2 + (\frac{\Delta T}{T})^2} \tag{19}$$

Die Fehlerformel für die Diffsionskoeffizienten ist

$$\Delta D = \frac{\Delta c}{4} \tag{20}$$

Man erhält für die Boltzmannkonstante

$$k = (1,45 \pm 0,06) \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$$

und für den Diffusionskoeffizienten

$$D = (6,3198 \pm 0,0019) \cdot 10^{-13} \frac{m^2}{s}$$

Vergleichen wir diesen Werte mit den Werten aus 3.2 so erhalten wir folgende σ-Abweichungen:
Boltzmannkonstante k:

$$0,07$$

Diffusionskoeffizienten D:

$$0,05$$

3.5 Vergleich der Werte

Die σ-Abweichung von k zum Literaturwert ergibt für 3.2 $0,43$ und für 3.4 für $1,17$. Der theoretisch zu erwartende Diffusionskoeffizient lässt sich mit Gleichung (12) berechnen. Dies ergibt einen Wert von

$$D_{theo} = 5,9983 \cdot 10^{-13} \frac{m^2}{s}$$

Der Fehler lässt sich mit folgender Formel berechnen

$$\Delta D_{theo} = 0,25 \cdot 10^{-13} \frac{m^2}{s}$$

also insgesamt

$$D_{theo} = (6,00 \pm 0,25) \cdot 10^{-13} \frac{m^2}{s}$$

Berechnet man nun die σ-Abweichung erhält man für 3.2 $0,45$ und für 3.4 $1,28$.

4. Zusamenfassung und Diskussion

4.1 Zusammenfassung

Im Versuch wurde die Brownsche Bewegung von kleinen Mikropartikeln beobachtet, vermessen und visualisiert. Es konnten aus diesen Messdaten durch zwei verschiedene Verfahren Werte für den Diffusionskoeffizienten und die Boltzmannkonstante gewonnen werden. Außerdem wurden die beobachteten Partikelverschiebungen auf ihre Kompatibilität mit der erwarteten Gaußverteilung uberprüft. Bei den Methoden der Bestimmung der Boltzmann- und der Diffusionskonstante ergaben sich durch die Auswertung des Verschiebungsquadrates direkt, und der Steigung der kumulativen Verschiebung die Werte:

	Verschiebungsquadrat	Steigung
Boltzmannkonstante k $[10^{-23}\frac{J}{K}]$	$(1.44 \pm 0,14)$	$(1,45 \pm 0,06)$
Diffusionskonstante D $[10^{-13}\frac{m^2}{s}]$	$(6,29 \pm 0,6)$	$(6,3198 \pm 0,0019)$

Tabelle 1: : Zusammenfassende Tabelle der Ergebnisse beider Methoden

4.2 Diskussion und Kritik

Beim Vergleich der Ergebnisse untereinander fallen geringe Sigmaabweichungen von unter eins auf, was die Kompatibilität der Ergebnisse der Methoden untereinander bestätigt. Tatsächlich fallen die Fehler der Steigungsmethode jedoch etwas geringer aus als die der zuerst angewendeten, was auf eine höhere Genauigkeit hindeutet.
Abweichung vom Literaturwert ist auch sehr gering. Beide werte weichen jedoch nach oben ab. Ein möglicher Grund ist, dass der Durchmesser des Latex-Partikels, das wir beobachtet haben, größer ist als auf der Flasche angegeben. Um diese potentielle Fehlerquelle zu vermeiden könnte man die Messung mehrere Male durchführen mit verschiedenen Partikeln. Dies würde auch die Gauss-Verteilung besser annähern in Abbildung 5. Auch ist verwunderlich, dass man in 3.1 in Abbildung (4), dass bei $t \approx 70s$ das Teilchen durch mehrere Stöße nach unten wandert. In diesem Zeitbereich liegen kummulativen Verschiebungen auch unter der Geraden. Dadurch könnte man hier vermuten, dass durch äußere Faktoren die Bewegung beeinflusst worden ist. Temporäre Störungen wie das Rütteln am Tisch kann man aussortieren, da das Wandern sich über eine längere Zeitperiode erstreckt. Eine Möglichkeit ist, dass durch Temperaturdifferenzen, Konvexströme im Probebehälter entstanden sind. Dies kann dran liegen, dass die $2min$ die als Zeit in der die Temperatur sich ausgleicht zu klein war. Um diesen Fehler zu überprüfen wäre eine Messung mit einem anderen Partikel sinnvoll gewesen.

4.3 Fazit

In diesem Versuch konnten wir die Brownsche Bewegung von Partikel beobachten und damit die Boltzmannkonstante bestimmen. Die bestimmten Werte liegen dem Literaturwert sehr

nahe. Jedoch kann man die Genauigkeit der Messung deutlich erhöhen, wenn man mehrere Messungen mit verschiedenen Partikeln macht.

5. Python-Skript

Untitled

April 12, 2025

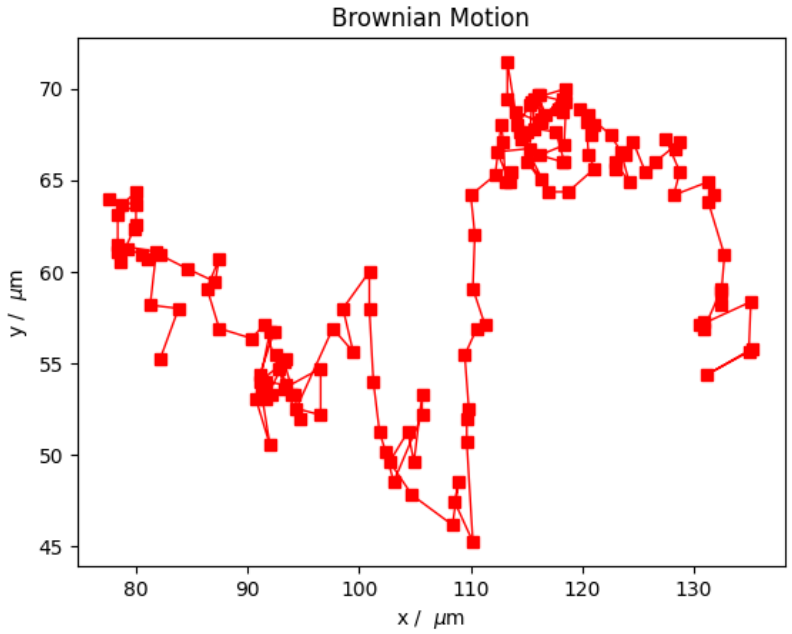
[1]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.mlab as mlab
import numpy as np
from scipy.stats import norm
from scipy.optimize import curve_fit
```

[2]:
```
t,x,y=np.loadtxt('position_data.txt', delimiter=",",
dtype="float", unpack=True)

plt.plot(x*2, y*2, marker='s', color='red', linewidth=1)
plt.xlabel('x / '+' $\mu$'+'m')
plt.ylabel('y / '+' $\mu$'+'m')
plt.title('Brownian Motion')

plt.savefig('plot1_223.png')
plt.show()
```

1



[3]:
```
dt=np.array([])
dx=np.array([])
dy=np.array([])
i=0
while i < len(t)-1:
    dx=np.append(dx,x[i+1]-x[i])
    dy=np.append(dy,y[i+1]-y[i])
    i = i + 1
r_squared=dx**2+dy**2

r_squared_mean=np.mean(r_squared)*2
print("r_squared_mean= " ,r_squared_mean)
r_squared_mean_std=np.std(r_squared)/np.sqrt(len(r_squared)) *2
print("r_squared_mean_std= " ,r_squared_mean_std)


#Berechnung der Boltzmannkonstante

Temp = 21.9 + 273.15
```

2

```
Delta_Temp = 0.1

a = 755 * 10**(-9) /2
Delta_a = 30 * 10**(-9) /2

eta = 9.544 * 10**(-4)
Delta_eta = 0.1 *10**(-4)

t_average = 1
Delta_t_average = 0.05  #Fehler wurde geschätzt


k = (6 * np.pi * eta * a)/ (4 * Temp * t_average) * r_squared_mean * 10**(-12)
Delta_k = k * np.sqrt((Delta_eta/eta)**2 + (Delta_a/a)**2 + (r_squared_mean_std/
 ↪r_squared_mean)**2+ (Delta_Temp/Temp)**2)

D = r_squared_mean / (4*t_average) * 10**(-12)
Delta_D = D * np.sqrt((r_squared_mean_std/r_squared_mean)**2+(Delta_t_average/
 ↪t_average)**2)

print(f'Boltzmannkonstante: {k} \pm {Delta_k:.2g} ')
print(f'Diffusionkonstante: {D} \pm {Delta_D :.2g}')
```

```
r_squared_mean=  2.5176608688523503
r_squared_mean_std=  0.21609008060045914
Boltzmannkonstante: 1.4487389259240583e-23 \pm 1.4e-24
Diffusionkonstante: 6.294152172130875e-13 \pm 6.3e-14
```

[4]:
```
#Gauss Fit funktioniert nicht wenn man die Color Map davor hat, deswegen erst␣
 ↪danach laufen lassen

all_data = np.append(dx, dy) *2
binwidth = 2/3  # Set the bin width to 0.5

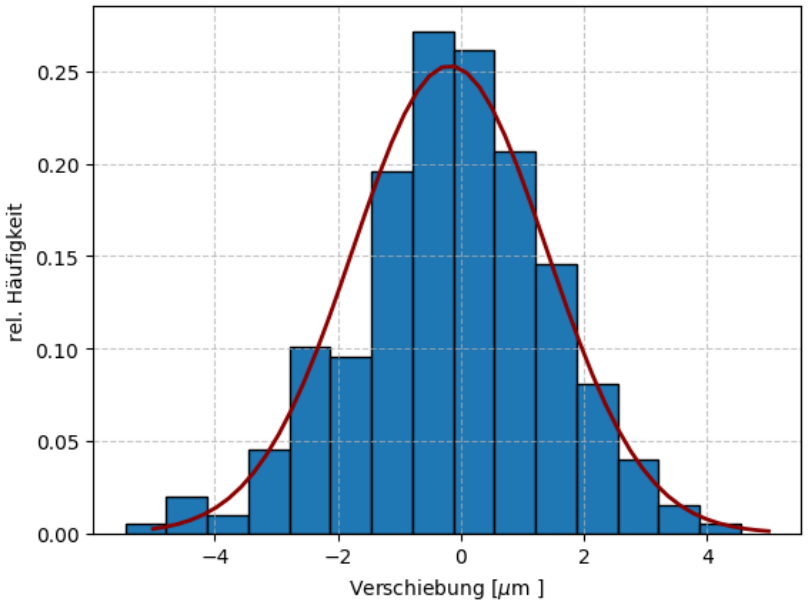
# Use np.arange() to generate bin edges with step size of 0.5
bins = np.arange(min(all_data), max(all_data) + binwidth, binwidth)

plt.hist(all_data, bins=bins, density=True ,edgecolor ='black')
mu=np.mean(all_data)
sigma=np.std(all_data)
gauss = norm.pdf(np.linspace(-5,5), mu , sigma )
plt.plot(np.linspace(-5,5), gauss, 'b-', linewidth=2 ,color = 'darkred')


plt.grid(True, linestyle="--", alpha=0.7)
plt.xlabel('Verschiebung [$\mu $m ]')
plt.ylabel('rel. Häufigkeit')
```

```
plt.savefig('plot3_223.png')
plt.show()
```

```
/tmp/ipykernel_3895750/516427397.py:13: UserWarning: color is redundantly
defined by the 'color' keyword argument and the fmt string "b-" (-> color='b').
The keyword argument will take precedence.
  plt.plot(np.linspace(-5,5), gauss, 'b-', linewidth=2 ,color = 'darkred')
```



[5]:
```
cmap = plt.get_cmap("viridis")
norm = plt.Normalize(t.min(), t.max())

fig, ax = plt.subplots()

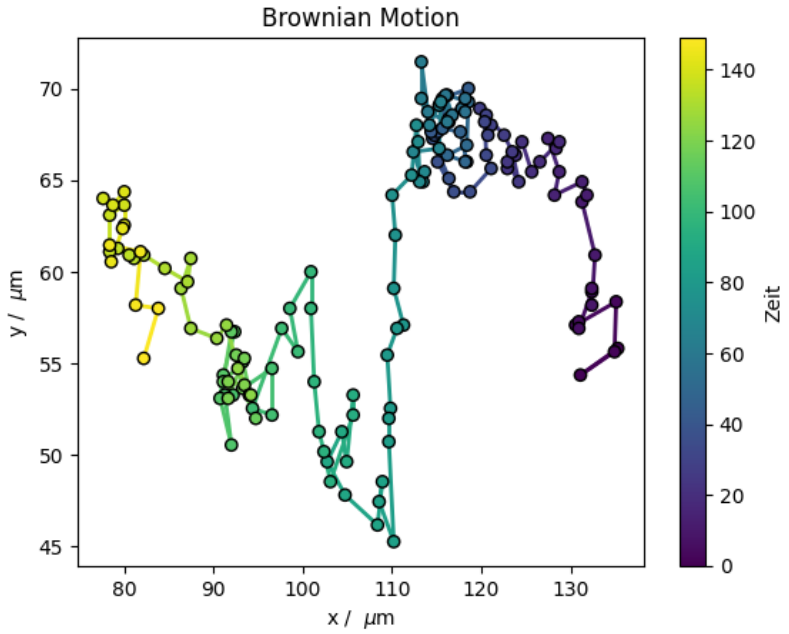

for i in range(len(x) - 1):
    color = cmap(norm(t[i]))
    ax.plot(x[i:i+2]*2, y[i:i+2]*2, color=color, linewidth=2)

# Punkte extra zeichnen
```

```
sc = ax.scatter(x*2, y*2, c=t, cmap=cmap, edgecolor="black", zorder=2)


plt.colorbar(sc, label="Zeit")
plt.xlabel('x / '+' $\mu$'+'m')
plt.ylabel('y / '+' $\mu$'+'m')
plt.title('Brownian Motion')

plt.savefig('plot2_223.png')
plt.show()
```



[6]:
```
r_kumm=np.cumsum(r_squared*2)

def linear(x,a,b):
    return a*x+b

popt, pcov = curve_fit(linear, t[:-1], r_kumm)

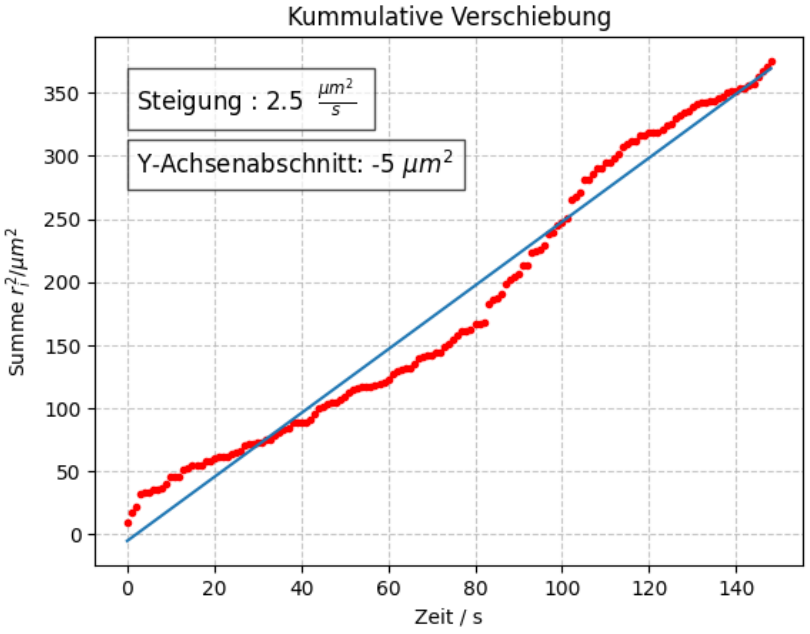
plt.plot(t[:-1], r_kumm, marker='.', color='red', linewidth=0)
```

```
plt.plot(t[:-1], linear(t[:-1],*popt) )

plt.text(2, max(y)  +300, fr"Steigung : {popt[0]:.2g}  $\frac{{\mu m^2}}{{s}} $␣
↪ ",
         fontsize=12, bbox=dict(facecolor='white', alpha=0.7))
plt.text(2, max(y)  +250, fr"Y-Achsenabschnitt: {popt[1]:.2g} $\mu m^2$ ",
         fontsize=12, bbox=dict(facecolor='white', alpha=0.7))

plt.xlabel('Zeit / s')
plt.ylabel('Summe $r_i^2 /\mu m^2$')
plt.grid(True, linestyle="--", alpha=0.7)
plt.title('Kummulative Verschiebung')

plt.savefig('plot4_223.png')
plt.show()
```



[7]:
```
#Berechnung der Boltzmannkonstante
```

```
k = popt[0] *6 * np.pi * eta * a / (4 * Temp) * 10**(-12) # Multilplikation von 10^-12 da popt[0] in \mu m
Delta_k = k * np.sqrt( (pcov[0,0]/popt[0])**2 + (Delta_eta/eta)**2 + (Delta_a/a)**2  + (Delta_Temp/Temp)**2  )

D = popt[0] /4 * 10**(-12)
Delta_D = D * pcov[0,0] /4
print(f'Boltzmannkonstante: {k} \pm {Delta_k:.2g}')
print(f'Diffusionkonstante: {D} \pm {Delta_D :.2g}')
```

```
Boltzmannkonstante: 1.4546493370031284e-23 \pm 6e-25
Diffusionkonstante: 6.319830385137948e-13 \pm 1.9e-16
```