Konstanten & Einheiten

$\hbar c \approx 197\,\text{MeV fm}$; $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$

$\hbar c \approx 1,973 \cdot 10^{-14}\text{GeV cm}$

$m_e c^2 = 511\,\text{keV}$; $m_p c^2 = 938\,\text{MeV}$;

$m_n c^2 = 940\,\text{MeV}$

$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5{,}79 \cdot 10^{-5}\,\text{eV/T}$

Ry= 13,6 eV; $a_0 = 0{,}529$ Å;

$1\,\text{b} = 10^{-28}\,\text{m}^2 = 10^{-28} m^2 = 100\text{fm}^2$

$fm = 10^{-15} m$

$1u \cdot c^2 = 931,5 MeV$

H-Atom / Bohr

$E_n = -\frac{Z^2}{n^2}\,\text{Ry}$, $r_n = \frac{n^2}{Z}\,a_0$

Entartung: n^2 (räumlich), $2n^2$ mit Spin

Summation über m, l

$\rightarrow \int \sum_m |\Psi_l^m|^2\, d\Omega = 2l+1 = g_l$

$\rightarrow \int \sum_{l,m} |\Psi_l^m|^2\, d\Omega = n^2$

Feinstruktur ($\sim \alpha^2 E_n$): Spin-Bahn + rel. Korrektur, spaltet nach j auf.

Relativistische Kinematik

EnergieImpulsBeziehung:

$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$

4rer-Imulsquadrad: $p^2 = m^2c^2$

Zerfall von $T_1 \Rightarrow T_2 + T_3$

Impulserhaltung:

$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\theta$ wobei θ der Winkel zwischen T_1, T_2 ist

Energieerhaltung: $E_3^2 = E_1^2 - E_2^2$

Massenbestimmung: $m_3^2 = E_3^2 - p_3^2$

Mndestenergie: $\sqrt{s_{min}} = \sum m_f$

$s = (p_{beam} + p_{target})^2$ Lorenz:

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{mc^2}$

$E \approx pc$, wenn $E \gg mc^2$

Hochenergienaeherug:

$\beta \approx 1 - \frac{m^2c^4}{2E^2}$

Im Laborsystem: $s = (p_1 + p_2)^2$

$\beta\gamma = \frac{pc}{mc^2}$

Mosley Law

$E_n = -E_R \cdot \frac{(Z-\sigma)^2}{n^2}$

$\Delta E = E_2 - E_1$

Serien + Abschirmung

K - in n=1 ($\sigma = 1$)

L - in n=2 ($\sigma = 7, 4$)

Alpha, von $\Delta = 1$ kommend, $\beta \hat{=} \Delta = 2$

Grundzustandsbestimmung

Termsymbol: $^{2S+1}L_J$ ($2S+1$ = Multiplizität, $L \in \{S, P, D, F, \ldots\}$)

Hundsche Regeln

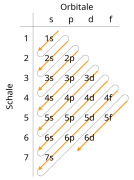
$\rightarrow$ **Regel 1:** Multiplizität maximieren (S maximal)

$\rightarrow$ **Regel 2:** Bei S gegeben, L maximieren

$\rightarrow$ **Regel 3:** $J = |L - S|$ (unter halvoll) ODER $J = L + S$ (über halvoll)

Anwendung (Bsp. Titan, $Z = 22$)

Schritt 1: Atom auffüllen



Mit max. Elektronen im jeweiligen Orbital:

s	2
p	6
d	10
f	14

Für Titan ($Z = 22$):

$(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(4s)^2(3d)^2$

e^- nach Hund in Orbitalen platzieren

d-Schale

Hund 1 maximiert S, also beide e^- Spin up, sodass $S = 1$.

$S = 3/2, 5/2 \rightarrow symm$

$S = 0 \rightarrow antisymm$

Bestimme L

Da $S = 1$, muss L ungerade sein (Antisymmetrie d. WF für äquiv. e^-).

Nach Hund 2 soll L maximal sein: nimm die m_l aus den Orbitalen und addiere zum größten ungeraden Wert. *Titan:* $L = 3$

Bestimme J: $J = |L - S|, \ldots, L + S$

und davon (unter halbvoll) das kleinste. Sobald halbvoll + statt -. *Für Titan:* $^3F_2$

aufspaltung grundzustand

Bei J spaltet sich ein zustand in $2J + 1$ Linien auf

$m_J = -J, -J + 1, \ldots J$

Addition Drehimpulse

$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$, $|l - s| \leq j \leq l + s$, $m_j = m_l + m_s$

LS/jj-Kopplung

Kleines Z = LS: WW$\sim l_i l_j, s_i s_j$ groß gegenüber WW$\sim l_i s_i$

$\vec{L} = \sum \vec{l}_i$, $\vec{S} = \sum \vec{s}_i$, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

Großes Z = jj: WW$\sim l_i l_j, s_i s_j$ klein gegenüber WW$\sim l_i s_i$

$\vec{J} = \sum \vec{j}_i$, $\vec{j}_i = \vec{l}_i + \vec{s}_i$

Clebsch-Gordan

CG geben an, wie häufig sich $|j_1, m_1\rangle$ und $|j_2, m_2\rangle$ zu $|J, M, j_1, j_2\rangle$ kombinieren. Werden null, wenn es aus Symmetriegründen nicht geht ($M \neq m_1 + m_2$ oder J verboten).

Lebensdauer angeregter Zustände

$N(t) = N_0\, e^{-t/\tau}$

Übergangs-WK (Dipol)

$|A_{fi}|^2 = |\langle f|\hat{H}_{ww}|i\rangle|^2 = e^2\, |\int \psi_f^* \vec{r}\, \psi_i\, dV|^2$

Große WK $\rightarrow$ kleine Lebensdauer

Auswahlregeln

Dipolübergänge

$\Delta L = \pm 1$, $\Delta M = 0, \pm 1$, $\Delta S = 0$, $\Delta J = 0, \pm 1$

($J = 0 \rightarrow J = 0$ verboten; Parität muss wechseln)

Linienbreiten

$\Delta E \cdot \tau = \hbar$

$\Delta\omega \cdot \tau = 1$ ($\Delta E = \hbar\,\Delta\omega$)

Linienform ist Lorentzprofil:

$P(\omega) = \frac{1}{\pi}\, \frac{\Gamma/2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2}$

Alkalis

$V_{eff} = -\frac{Z_{eff}\, e^2}{r} \Rightarrow$ Aufhebung der l-Entartung

$\rightarrow E_n(s) < E_n(p) < E_n(d) < E_n(f)$; Aufspaltung für kleine n am größten

LS-Kopplung

Operatoren:

$\rightarrow \hat{L}^2\psi = \hbar^2 L(L+1)\psi$, $\hat{L}_z\psi = \hbar M_L \psi$

$\rightarrow \hat{S}^2\psi = \hbar^2 S(S+1)\psi$, $\hat{S}_z\psi = \hbar M_S \psi$

Hamilton ohne SB-Kopplung

$\hat{H}_0 = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V_{eff}(r_i) + \hat{H}_{rest}(r_{ij})$

Gute Quantenzahlen:

$|n, L, M_L, S, M_S\rangle$

Mit SB-Kopplung

$\hat{H}_{SB} = c \cdot \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}$

Gute Quantenzahlen: $|n, L, S, J, M_J\rangle$

$E_{SB} = c \cdot [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)]$

$c > 0$: weniger als halb gefüllte Schale

$c < 0$: mehr als halb gefüllt

Intervallregel

$\Delta E_{SB} = E_{SB}(J) - E_{SB}(J-1) = 2cJ$

jj-Kopplung

$\rightarrow$ Anzahl Terme bleibt gleich

$\rightarrow$ Energieniveaus eindeutig durch J definiert

$\rightarrow$ Niveaus mit gleichem J können mischen

Auswahlregeln jj-Kopplung

$\Delta J = 0, \pm 1$, $\Delta M_J = 0, \pm 1$

Zeeman-Effekt

Magn. Moment: $\vec{\mu}_J = -g_J \mu_B \frac{\vec{J}}{\hbar}$,

$|\vec{\mu}_J| = g_J \mu_B \sqrt{J(J+1)}$

Landé-Faktor:

$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$

Schwaches Feld (LS bleibt gut):

$\Delta E = g_J\, \mu_B\, B\, m_J$, $m_J = -J, \ldots, J$

$\rightarrow$ Aufspaltung in $2J + 1$ Niveaus

Normal ($S = 0 \Rightarrow g_J = 1$): Triplett, $\Delta E = \mu_B B\, m_J$

Anomal ($S \neq 0$): $g_J \neq 1$

Paschen-Back (starkes Feld, L, S entkoppeln):

$\Delta E \approx (m_L + 2m_S)\, \mu_B B$

Kräfte

$\rightarrow$ El.-mag. – wirkt auf alle geladenen Teilchen

$\rightarrow$ Schwache WW – wirkt auf alle Fermionen

$\rightarrow$ Starke WW – wirkt nur zwischen Quarks (u. Gluonen)

WW nur durch Austausch von Feldquanten

Photon als Austauschteilchen

$e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ mit Impulsen p_1, p_1'

Photon überträgt Viererimpuls:

$q^2 = (p_1' - p_1)^2$

Photonpropagator: $\frac{1}{q^2}$

Austauschteilchen

El.-mag. – Photon γ (masselos)

Schwache WW – $W^\pm, Z^0$-Bosonen

Starke WW – Gluonen (g)

W-Propagator

$V_{weak}(q^2) = \frac{g^2}{q^2 - m_W^2 c^4}$,

$\beta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}}$

Massenmessung

$p = (\frac{E}{c}, \vec{p})$, **Rel imp**

$p = \gamma m v = \gamma m(\beta c)$

Über invariante Masse / Viererimpuls:

$m_x^2 c^4 = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - |\vec{p}_1 + \vec{p}_2|^2 c^2$

$= m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2\cos\theta)$

Umstellen nicht vergessen!

Fuer Photonen: $E = pc$,weil masse null

Sucht man zerfallsteilchenmasse:

$p_X^2 = m_X^2 c^2$ $p_{ini} = p_1 + p_X$

$m_X^2 c^2 = (p_{ini} - p_1)^2$

$p_x^2 = p_1^2 + p_{in}^2 - 2p_1 p_{in}\cos\theta$

Spin

Fermionen – halbzahliger Spin, Fermi-Dirac, Pauli-Prinzip

Pauli: 2 ident Ferm dürfen nicht den selben vollständigen quantenzustand besetzten.

Bosonen – ganzzahliger Spin, Bose-Einstein, keine Besetzungsbeschränkung

Quarks, Leptonen: Spin $\frac{1}{2}$; WW-Teilchen: Spin 1; Higgs: Spin 0

Zusammengesetzte Teilchen

Aus Quarks zusammengesetzt: Hadronen

Baryonen: 3 Quarks (qqq)

Mesonen: Quark + Antiquark ($q\bar{q}$)

Spin & Mag. Moment

$\vec{\mu}_s = -g_s\, \mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar}$, $g_s \approx 2$

Instabiles Teilchen

Zerfalls-/Energiebreite: $\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$

Breit-Wigner:

$P(E) = \frac{1}{2\pi}\, \frac{\Gamma}{(E - mc^2)^2 + \Gamma^2/4}$

Fermis Goldene Regel

Übergangswahrscheinlichkeit W_{fi}:

$W_{fi} = \frac{dP}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar}\, |\langle f|\hat{H}_{WW}|i\rangle|^2 \rho(E)$

Lebensdauer: $\tau = \frac{1}{W_{fi}}$

$\langle f|\hat{H}_{ww}|i\rangle = \int_V \psi_f^*\, \hat{H}_{ww}\, \psi_i\, d^3r$

Zustandsdichte (mögliche Endzustände bei E_f):

$\rho(E) = |\frac{dN}{dE_f}|_{E_i}$

Einteilchenphasenraum (V=1):

$\rho_1(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{V\, E\, p\, c}{2\pi^2(\hbar c)^3}$

Zweiteilchenphasenraum (V=1):

$\rho_2(E) = \frac{dN_2}{dE} = \frac{V}{(2\pi\hbar c)^3} \cdot \frac{E_1 E_2\, p_1 c}{E_1 + E_2} \int d\Omega_1$

Zerfallsbreite

$\Gamma_{fi} = W_{fi}\, \hbar = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_i)$

Verzweigungsverhältnis $\frac{\Gamma_i}{\Gamma} \propto \frac{|T_{fi}|^2}{|T_{fj}|^2}$

$T_{fi} \propto$ Clebsch Gordon Coeffizient

Mittlere freie Weglänge

$\lambda = \frac{1}{n\sigma}$

n = Dichte der Streuzentren im Target

σ = Wirkungsquerschnitt

Zahl ungestreuter Teilchen:

$N(x) = N_0\, e^{-x/\lambda}$

Wirkungsquerschnitt

Fixed Target:

$\sigma = \frac{\Gamma_{fi}}{\hbar v} = \frac{2\pi}{\hbar v}\, |T_{fi}|^2 \rho(E)$

Kollision: $\sigma = \frac{\Gamma_{fi}}{\hbar(v_a + v_b)}$

Mit Raumwinkel

$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v}\, |T_{fi}|^2 \rho(\Omega)\, d\Omega$

Differentieller Wirkungsquerschnitt (meist fm^2)

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2(\hbar c)^2}{4 \cdot E^2 \sin^4(\theta/2)} \cos^2(\theta/2)$

Totaler Wirkungsquerschnitt

$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega$

$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{inel} + \ldots$

Geometrischer Querschnitt

$\sigma_{geo} = \pi(r_t + r_p)^2$ (r_t, r_p = Target-/Projektilradius)

Luminosität

$R = \dot{N}_s = \phi_a N_b \cdot \sigma - R$: Streurate

$N_{gemessen} = \epsilon N_{erzeugt}$, ϵ = Effizienz

Luminosität (fixed target): $L = \phi_a N_b$

ϕ_a = Teilchenstrom = $n_a \cdot v$

$N_s = \sigma \int_0^T L\, dt$

Collider: $L = f_{umlauf} \cdot n\, \frac{N_1 N_2}{A}$

N_i: Teilchen pro Paket, n: Anzahl kollidierender Pakete

Collider mit 2 Protonstrahlen mit je E ergibt $\sqrt{s} = 2E$.

Feynman-Regeln

Externe Linien

Ein-/auslaufende Teilchen entlang der Zeitachse, reelle Teilchen mit $p^2 = m^2c^4$

Antiteilchen in negativer Zeitrichtung

Innere Linien

Austauschteilchen (virtuell): $q^2 = E^2 - \vec{p}^2c^2 \neq m^2c^4$

An jedem Vertex erhalten:

Viererimpuls, Ladung, Lepton-, Baryonzahl, Farbe

$T_{fi} \propto \frac{e^2}{q^2}$

Wirkungsquerschnitt (el.-mag. Streuung):

$\sigma \sim |T_{fi}|^2 \sim \frac{e^4}{q^4}$

Raumartig: $q^2 < 0$; es gibt System mit $\Delta E = q^0 = 0$

Zeitartig: $q^2 > 0$; es gibt System mit $\vec{q} = 0$

Mehrere mögliche Prozesse zum selben Endzustand $\Rightarrow$ Matrixelemente kohärent addieren.

Amplituden: bei el.mag, pro vertex ein e, also $\sqrt{\alpha}$

Teilchennachweis

$\rightarrow$ gel. Teilchen – Ionisation, Bremsstrahlung, Cherenkov-Strahlung

$\rightarrow$ Hadronen – Kernwechselwirkungen

$\rightarrow$ Photonen – Photo-, Compton-Effekt, Paarbildung

$\rightarrow$ Neutrinos – schwache Wechselwirkung

Ionisation

Bethe-Bloch (Energieverlust durch Ionis.)

$\langle \frac{dE}{dx} \rangle_{ion} = -\frac{4\pi n_e z^2 e^4}{m_e c^2 \beta^2} \left(\ln \frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I} - \beta^2 \right)$

$n_e = \rho N_A \frac{Z}{A}$

I = mittlere Anregungsenergie im Medium

(Bethe-Bloch gilt für schwere Teilchen)

Minimalionisierend, wenn $\beta\gamma \sim 3 - 4$

Dann gilt abschaetzing oder einfach $\approx 2MeVg^{-1}cm^2$

Abschaetzung:

$-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx} = 4 \cdot \frac{Z}{A}\text{MeV}cm^2/g$

A, Massenzahl, Z Kernladungz

nur geladene Teilchen Ionisieren

je größer die Masse desto höher der Energieverlust durch Ionisation.

E-Verlust von e^-

$\langle \frac{dE}{dx} \rangle = \langle \frac{dE}{dx} \rangle_{ion} + \langle \frac{dE}{dx} \rangle_{brems}$

$\langle \frac{dE}{dx} \rangle_{brems} \sim \frac{Z^2 e^6}{m_e^2} \cdot E = \frac{E}{X_0}$

$\rightarrow E(x) = E_0 \cdot e^{-\frac{x}{X_0}}$

Cherenkov-Bedingung

$\cos\theta = \frac{1}{n\beta}$

Strahlung wenn $n\beta > 1$

mit $\beta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}$

bei $p_1 = p_2$, $m_1 < m_2 \rightarrow$

$\frac{1}{\beta_1} < n < \frac{1}{\beta_2}$

Wenn $p >> m \rightarrow \beta = \frac{p}{E} \approx 1 - \frac{m^2}{2p^2}$

$\Delta\theta = \frac{\Delta\beta}{n\beta^2 sin(\theta)}$

$\sin\theta = \sqrt{1 - cos^2\theta} \approx \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$

Photonen mit Materie

$I(x) = I_0 e^{-\mu x}$, $\mu = n\sigma = \frac{1}{\lambda} = \mu_{ph} + \mu_{comp} + \mu_{paar}$

$\mu_i = n\sigma_i = \frac{N_A \rho}{A}\sigma_i$

Photoeffekt: $\sigma_{ph} \sim \frac{Z^5}{E^{7/2}}$

Compton-Streuung $\gamma + e^- \rightarrow \gamma' + e^-$

$E_{\gamma'} = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\theta_{\gamma'})}$

$\sigma_{comp} \sim \frac{\alpha^2 Z}{E_{cms}^2}$

Wenn $E_\gamma \gg m_e c^2$: $E_{cms} \approx E_\gamma$

Paarbildung

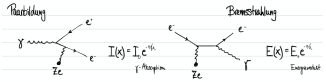
Energieschwelle: $E_\gamma \geq 1{,}022\,\text{MeV} = 2m_e c^2$

masse von ursprungsteilchen:

$m_x = \frac{E}{c^2}\sqrt{2(1 - \cos\theta)}$

$\sigma_{paar} = \frac{7}{9}\frac{A}{\rho N_A}\frac{1}{X_0}$

Dominiert ab 10–100 MeV; mfW: $\lambda_{paar} = \frac{9}{7}X_0$



Schauerbildung

Allg. $X_0 < \lambda_{int}$, d.h. el.-mag. Schauer sind kompakter als hadronische.

Schauertiefe (in X_0)

el.-mag.: $x_{max} = \log_2(\frac{E}{E_c})$ (E_c = krit. Energie)

Detektoren

Spurdetektor – Trajektorien gel. Teilchen

Spektrometer – Impulsmessung gel. Teilchen

Kalorimeter – Energiemessung

PID-Systeme – Teilchenidentifikation

Impulsmessung

$p_\perp = qBR$ (Ablenkung im B-Feld)

Energieauflösung im Kalorimeter

$\frac{\Delta E}{E} = \frac{C}{\sqrt{E}}$

Symmetrietrafos

Diskrete Symmetrien (Parität, Punktspiegelung) $\rightarrow$ multiplikative Erhaltungsgrößen

Kontinuierliche Symmetrien (Translation, Rotation ...) $\rightarrow$ additive Erhaltungsgrößen

Additive Erhaltungsgrößen

Ladung

Leptonzahlerhaltung

$\sum_i L_{e_i} = \text{const}$, $\sum_i L_{\mu_i} = \text{const}$, $\sum_i L_{\tau_i} = \text{const}$

$\sum_i L_i = \text{const}$, $L = L_e + L_\mu + L_\tau$

Teilchen $L = +1$, Antiteilchen $L = -1$

Baryonzahlerhaltung

Quarks $B = \frac{1}{3}$, Antiquarks $B = -\frac{1}{3}$

Hadronen: $B = \frac{n_q - n_{\bar{q}}}{3}$ (n_q = #Quarks, $n_{\bar{q}}$ = #Antiquarks)

Baryonen $B = 1$, Antibaryonen $B = -1$, Mesonen $B = 0$

Isospin

Proton: $|I=\frac{1}{2}, I_3=+\frac{1}{2}\rangle$ (Up-artig)

Neutron: $|I=\frac{1}{2}, I_3=-\frac{1}{2}\rangle$ (Down-artig)

Bsp: Pionen (π^+, π^0, π^-) mit $I=1$

Andere Quarks haben $I=0$

Isospin addiert wie Drehimpuls

z.b. koenen zwei quarks mit jeweils $I=1/2$ zu $I=1,0$ koppeln.

Vorgehen: $|I, I_3\rangle$bestimmen, I_3addieren -> I I kopplen

Isospin ist für die starke WW erhalten.

Strangeness

S bei starker WW erhalten, bei schwacher nicht

$\Rightarrow$ s-Quark: $S=-1$, $\bar{s}: S=+1$

Überblick Quarks

	I	I_3	S	C	B	T
d-Quark	1/2	−1/2	0	0	0	0
u-Quark	1/2	1/2	0	0	0	0
s-Quark	0	0	−1	0	0	0
c-Quark	0	0	0	+1	0	0
b-Quark	0	0	0	0	−1	0
t-Quark	0	0	0	0	0	+1

	I	I_3	S	C	B	T
Starke WW	ja	ja	ja	ja	ja	ja
El.-mag. WW	nein	ja	ja	ja	ja	ja
Schwache WW	nein	nein	nein	nein	nein	nein

Produktion von Quark ab $E > 2m_{quark}$

Multiplikative Quantenzahlen

Parität:

starke und el.-mag. WW $\rightarrow \hat{P}$ erhalten

schwache WW: $\hat{P}$ nicht erhalten

$\eta_p(p)=\eta_p(n)=\eta_p(\Lambda)=+1$

$\eta_p(\text{Fermion}) = +1$, $\eta_p(\text{Antifermion})=-1$

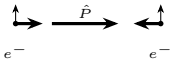
$\eta_p(\text{Eichboson})=-1$

Sei $\psi=\psi_\alpha\psi_\beta\,\phi(r_\alpha-r_\beta)$ mit

$\hat{P}\psi_\alpha=\eta_\alpha\psi_\alpha$ etc.

$\Rightarrow \hat{P}\psi=\eta_\alpha\eta_\beta(-1)^l\psi$

l = Bahndrehimpuls d. Relativbewegung



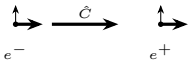
($\rightarrow=\vec{p}$, $\uparrow=\vec{s}$); p flippt, s bleibt

$\Rightarrow h \rightarrow -h$

C-Parität

starke und el.-mag. WW $\rightarrow \hat{C}$ erhalten

schwache WW: $\hat{C}$ nicht erhalten

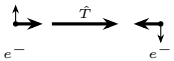


Teilchen$\rightarrow$Antiteilchen, p, s bleiben $\Rightarrow h$ gleich

Zeitumkehr

starke und el.-mag. WW $\rightarrow \hat{T}$ erhalten

schwache WW: $\hat{T}$ nicht erhalten



p und s flippen $\Rightarrow h$ gleich

$\Rightarrow$ nur $\hat{C}\hat{P}$ bildet $\nu_L \rightarrow \bar{\nu}_R$ ab (beobachtet, s.u.)

Eigenschaften Neutrinos

Helizität: $h=\frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{\hbar|\vec{p}|}$

$\nu: h=-\frac{1}{2}$ immer linkshändig

$\bar{\nu}: h=+\frac{1}{2}$ immer rechtshändig

Wu-Experiment

Relevante Größen

Zerfall: $^{60}\text{Co} \rightarrow {}^{60}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e$

(Schwache Wechselwirkung)

Kernspin $\vec{J}$: Ausgerichtet durch externes Magnetfeld $\vec{B}$ bei $T<0{,}01\,\text{K}$

(Vermeidung von Wärmebewegung)

Elektronenimpuls $\vec{p}_e$: Flugrichtung der emittierten β-Teilchen

Beobachtung:

Asymmetrie: Deutlich mehr Elektronen fliegen *entgegen* der Richtung des Kernspins ($\vec{p}_e \uparrow\downarrow \vec{J}$)

Messgröße: Die Intensität hängt direkt vom Winkel zwischen Spin und Impuls ab ($\propto 1-\frac{v}{c}\cos\theta$)

Aussagekraft:

Beweis der maximalen Paritätsverletzung (P-Verletzung) in der Schwachen Wechselwirkung

Symmetrie-Check: Unter Raumspiegelung spiegelt sich der Impuls ($\vec{p}_e \rightarrow -\vec{p}_e$), der Drehimpuls/Spin bleibt als axialer Vektor gleich ($\vec{J}\rightarrow\vec{J}$)

Das Spiegelexperiment müsste das umgekehrte Verhalten zeigen – da die Natur aber eine Richtung real bevorzugt, ist die Spiegelsymmetrie kollabiert

Die Helizitaet muesste im Mittel verschwinden

Rutherford-Streuung

$\rightarrow$ Streupartner punktförmig, geladen

$\rightarrow E_{kin}=T$ klein gegenüber Masse des Targets

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ruth} = \frac{(Z_1Z_2e^2)^2}{16T^2}\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{m^2}{4\pi^2\hbar^2}|T_{fi}|^2$

relativistische Form

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ruth} = \frac{(Z_1Z_2e^2)^2}{4p^2c^2\beta^2}\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$

$\beta=\frac{v}{c}$, $(pc)^2=E^2-m^2c^4$

α-Teilchen$\rightarrow Z=2$

Mott-Streuung

Streuung von Spin-$\frac{1}{2}$-Elektronen an schwerem Target ohne Spin.

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ruth}(1-\beta^2\sin^2(\theta/2))$

Ausgedehntes Target

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{ext}_{mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{mott}\cdot|F(q^2)|^2$

Formfaktor: $F(q^2)=\int\rho(\vec{r})\,e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar}\,d^3r$

$\rightarrow$ Wirkungsquerschnitt an ausgedehntem Target immer kleiner als bei punktförmigem ($|F|\le 1$)

Dirac-Streuformel

Für Spin $\frac{1}{2}$ an Spin $\frac{1}{2}$ (Punktproton):

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{dirac} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{mott}\cdot\left(1+\frac{Q^2}{2M_p^2c^4}\tan^2(\theta/2)\right)$

$Q^2=-q^2$

Rosenbluth-Formel

Mit Formfaktoren G_E, G_M (Funktion von Q^2):

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{mott}\cdot\left[\frac{G_E^2+\tau G_M^2}{1+\tau}+2\tau G_M^2\tan^2\frac{\theta}{2}\right]$

$\tau=\frac{Q^2}{4M_p^2c^4}$

Protonradius

Formfaktor:

$G_E(Q^2)=(1+\frac{Q^2}{0{,}71\,\text{GeV}^2})^{-2}$

$\langle r^2\rangle = -6\hbar^2\left.\frac{dG_E(Q^2)}{dQ^2}\right|_{Q^2=0}$

Kernradien

Fuers erste minimum: $|q|R/\hbar\approx 4.49$

Mit $q=2p\sin(\theta/2)$, wenn $E_i\approx E_f$

Impulsuebrtrag:

$q=(E_i-E_f, \vec{p}_i-\vec{p}_f)$

Rückstoß bei Streuung

Fixed target

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{\text{rück}} = \frac{E_f}{E_i}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$

Elastische Streuung (fixed target)

$E_f=E_i\left(1+\frac{2E_i}{Mc^2}\sin^2(\theta/2)\right)^{-1}$

Tiefinelastischer Stoß

Fixed Target, Proton vor dem Stoß: $P=(M_pc^2,\vec{0})$

Neg. Viererimpulsübertrag: $Q^2=-q^2=4E_iE_f\sin^2(\theta/2)$

Impulsuebrtrag kurz: $q=2p\sin(\theta/2)$

Energieübertrag im Labor: $\nu=E_i-E_f$

Bjorken-x (Impulsanteil des Quarks):

$x=\frac{Q^2}{2M_pc^2\nu}=\frac{Q^2}{2P\cdot q}$

Elastisch: $x=1$; inelastisch: $x<1$

Invariante Masse des Endzustands: $W^2c^4=M_p^2c^4+2M_pc^2\nu-Q^2$

Wirkungsquerschnitte

$\frac{d^2\sigma}{d\Omega\,dE_f} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{mott}\cdot(W_2+2W_1\tan^2(\theta/2))$

$F_1=M_pc^2W_1$, $F_2=\nu W_2$

Callan-Gross-Relation:

$2xF_1(x)=F_2(x)$

$\rightarrow$ bestätigt, dass Quarks Spin $\frac{1}{2}$ haben

$F_2(x)=x\cdot\sum_{q_i}e_{q_i}^2\,(q_i(x)+\bar{q}_i(x))$

$R\equiv\frac{\sigma(e^+e^-\rightarrow\text{Hadrons})}{\sigma(e^+e^-\rightarrow\mu^+\mu^-)}=3\sum_{\text{aktive }q}Q_q^2$.

Q=Ladung d. quarks

Starke WW – Farbladung

Quarks tragen 3 Farbladungen, Antiquarks Antifarbe

Gluonen tragen je eine Farbe und eine Antifarbe

Schwache WW

reichweite – $L=\tau c$ mit $\tau=\Delta c\ge\frac{\hbar}{2E}$

Leptonen – keine Generationsmischung

$\nu_e\leftrightarrow e$, $\nu_\mu\leftrightarrow\mu$, $\nu_\tau\leftrightarrow\tau$

Quarks – Mischung möglich (CKM)

$u\leftrightarrow d$, $c\leftrightarrow s$, $t\leftrightarrow b$

Proton-Antiproton-Kollision

$u\bar{d}\rightarrow W^+$, $d\bar{u}\rightarrow W^-$

$u\bar{u}\rightarrow Z^0$, $d\bar{d}\rightarrow Z^0$

Kopplung von W und Z

$\psi=\psi_L+\psi_R$, $e=e_L+e_R$

$\rightarrow W^\pm$: Kopplung nur an linkshändige Fermionen (bzw. rechtshändige Antifermionen)

$\rightarrow Z$: an beide, unterschiedlich stark

Bindungsenergie

$B(N,Z)=Zm_pc^2+Zm_ec^2+Nm_nc^2-M(N,Z)c^2$

M = Masse des Atoms, N = Anzahl Neutronen

Bindungsenergie pro Nukleon: $\frac{B}{A}$, $A=N+Z$

Weizsäcker-Formel

$B=a_vA-a_0A^{2/3}-a_c\frac{Z^2}{A^{1/3}}-a_{sym}\frac{(N-Z)^2}{A}\pm\frac{\delta}{A^{1/2}}$

(a_v Volumen, a_0 Oberfläche, a_c Coulomb, a_{sym} Asymmetrie, δ Paarung)

Kernzerfälle

β-Zerfall

$n\rightarrow p\,e^-\bar{\nu}_e$

β^--Zerfall

$^A_ZX\rightarrow{}^A_{Z+1}Y+e^-+\bar{\nu}_e$

Verlangsamung des e^- durch Anziehung (Z+1)

β^+-Zerfall

$^A_ZX\rightarrow{}^A_{Z-1}Y+e^++\nu_e$

Beschleunigung des e^+ durch Abstoßung

Q-Wert: $Q=(M_i-\sum_f M_f)c^2$; Zerfall möglich wenn $Q>0$, ca. ab A=90

$Q=\sum B_{vor}-\sum B_{nach}$

α: $^A_ZX\rightarrow{}^{A-4}_{Z-2}Y+\alpha$

γ: Abregung des Kerns, kein Wechsel von Z, A

$\beta^-: A=const, Z\rightarrow Z+1, N\rightarrow N-1, Q=M_x-M_y$

$\beta^+: A=const, Z\rightarrow Z-1, N\rightarrow N+1, Q=M_x-M_y-2m_e$

$\alpha: A\rightarrow A-4, Z\rightarrow Z-2, N\rightarrow N-2, Q=M_x-M_y-M_\alpha$

$\gamma: A=const, Z=const, N=const, Q=M_{x*}-M_x$

Lebensdauer Alpha Zerfall:

$\frac{1}{\tau}\sim e^{-2/\sqrt{E_\alpha}}$

Zerfallsrate bei gegebenen Massen

m_x, m_a, m_b: $p_i=\frac{1}{2}\sqrt{m_x^2-4m_i^2}$, bei größerem Impuls ist die Häufigkeit größer.

Schalenmodelldinge

$j=l\pm\frac{1}{2}$, Symbol :nl_j, $P=(-1)^l$

Jedes Nivau nimmt $2j+1$Nukleonen auf

Orbital	l	j	$2j+1$
$1s_{1/2}$	0	1/2	2
$1p_{3/2}$	1	3/2	4
$1p_{1/2}$	1	1/2	2
$1d_{5/2}$	2	5/2	6
$2s_{1/2}$	0	1/2	2
$1d_{3/2}$	2	3/2	4
$1f_{7/2}$	3	7/2	8
$2p_{3/2}$	1	3/2	4
$1f_{5/2}$	3	5/2	6
$2p_{1/2}$	1	1/2	2
$1g_{9/2}$	4	9/2	10

Fundamentale Teilchen (SM)

Quarks (alle Spin $\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{3}$):

q	Q	m	q	Q	m
u	$+\frac{2}{3}$	2,2 M	c	$+\frac{2}{3}$	1,27 G
d	$-\frac{1}{3}$	4,7 M	s	$-\frac{1}{3}$	95 M
t	$+\frac{2}{3}$	173 G	b	$-\frac{1}{3}$	4,2 G

alle Quarks: $B=\frac{1}{3}$, $L=0$, $\eta_P=+1$; Antiquark: $Q, B, S, C, B, T, \eta_P\rightarrow$ Vorzeichen. u, d sind Isospin duplett

Leptonen (Spin $\frac{1}{2}$, $L=+1$):

ℓ	Q	m	τ / Zerfall
e	−1	0,511 M	stabil
μ	−1	105,7 M	2,2 μs, $e\bar{\nu}_e\nu_\mu$
τ	−1	1777 M	$2{,}9\cdot10^{-13}$s
$\nu_{e,\mu,\tau}$	0	<1 eV	(stabil)

alle Leptonen: $B=0$, $S=C=\ldots=0$; Antilepton: $L=-1$, $Q\rightarrow$ Vorzeichen

Eichbosonen & Higgs:

	WW	Q	J	m
γ	e.m.	0	1	0
g (×8)	stark	0	1	0
$W^\pm$	schwach	±1	1	80,4 G
Z^0	schwach	0	1	91,2 G
H^0	—	0	0	125 G

alle Bosonen & H^0: $B=0$, $L=0$, $S=C=\ldots=0$; $\eta_P(\gamma,g)=-1$, H^0: $J^P=0^+$

Wichtige Hadronen

WW-Tag: st=stark, em=e.m., s=schwach.

Mesonen ($q\bar{q}$, $B=0$; $P=(-1)^{L+1}$):

	$q\bar{q}$	Q	I	S	m	τ/s	Zerfall
$\pi^\pm$	$u\bar{d}$	±1	1	0	140	$2{,}6\cdot10^{-8}$	$\mu\nu$ (s)
π^0	$\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$	0	1	0	135	$8{,}5\cdot10^{-17}$	$\gamma\gamma$ (em)
$K^\pm$	$u\bar{s}$	±1	$\frac{1}{2}$	±1	494	$1{,}2\cdot10^{-8}$	$\mu\nu, \pi\pi$ (s)
K^0	$d\bar{s}$	0	$\frac{1}{2}$	+1	498	$\bar{S}$:0,9e-10 L:5,1e-8	$\pi\pi/3\pi$ (s)
η	$\frac{u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}}{\sqrt{6}}$	0	0	0	548	$5\cdot10^{-19}$	$\gamma\gamma, 3\pi$ (em)
J/ψ	$c\bar{c}$	0	0	0	3097	$7\cdot10^{-21}$	$\ell\ell$,Had (em/st)
Υ	$b\bar{b}$	0	0	0	9460	$1{,}2\cdot10^{-20}$	$\ell\ell$ (em)

$J^P=0^-$ (pseudoskalar, $L=0$), 1^- (Vektor: $\rho, J/\psi, \Upsilon$)

alle Mesonen: $B=0$, $L=0$; Antimeson = Ladungs-/Flavour-Konj.

Baryonen (qqq, $B=1$, $P=+1$):

	qqq	Q	I	S	m	τ/s	Zerfall
p	uud	+1	$\frac{1}{2}$	0	938	stabil	—
n	udd	0	$\frac{1}{2}$	0	940	880	$pe\nu_e$ (s)
Λ	uds	0	0	−1	1116	$2{,}6\cdot10^{-10}$	$p\pi^-$ (s)
Σ^+	uus	+1	1	−1	1189	$8\cdot10^{-11}$	$p\pi^0, n\pi^+$ (s)
Σ^0	uds	0	1	−1	1193	$7\cdot10^{-20}$	$\Lambda\gamma$ (em)
Σ^-	dds	−1	1	−1	1197	$1{,}5\cdot10^{-10}$	$n\pi^-$ (s)
Ξ^0	uss	0	$\frac{1}{2}$	−2	1315	$2{,}9\cdot10^{-10}$	$\Lambda\pi^0$ (s)
Ξ^-	dss	−1	$\frac{1}{2}$	−2	1322	$1{,}6\cdot10^{-10}$	$\Lambda\pi^-$ (s)
Δ	$uuu..ddd$	2..−1	$\frac{3}{2}$	0	1232	$6\cdot10^{-24}$	$N\pi$ (st)
Ω^-	sss	−1	0	−3	1672	$8\cdot10^{-11}$	ΛK^- (s)

Oktett $J^P=\frac{1}{2}^+$; Dekuplett $(\Delta,\Sigma^*,\Xi^*,\Omega)$ $J^P=\frac{3}{2}^+$

alle Baryonen: $B=1$, $L=0$; Antibaryon: $B=-1$, $Q, S, \cdots\rightarrow$ Vorzeichen

(K^0: Masseneigenzustände K_S/K_L; m in MeV)

Erhaltungssätze

Größe	stark	e.m.	schwach
Q, B, L	ja	ja	ja
Energie/Impuls, J	ja	ja	ja
P (Parität)	ja	ja	**nein**
C	ja	ja	**nein**
CP, T	ja	ja	fast
I (Isospin)	ja	**nein**	**nein**
I_3	ja	ja	**nein**
S, C, B, T (Flavour)	ja	ja	**nein**

Bei schwacher WW: $|\Delta S|\le 1$, $\Delta S=\Delta Q$ (gel. Strom)

stark/e.m.: $\Delta S=\Delta C=0$

Zerfall / WW erkennen

Aus Lebensdauer auf WW schließen:

$\rightarrow$ **stark**: $\tau\sim10^{-23}$ s (breite Resonanz), $\Delta S=0$

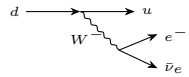
$\rightarrow$ **e.m.**: $\tau\sim10^{-16}$–10^{-19} s, γ im Endzustand

$\rightarrow$ **schwach**: $\tau\gtrsim10^{-13}$ s, Neutrino / $\Delta S\ne0$

Reaktion erlaubt, wenn *alle* erhaltenen Größen der jeweiligen WW balancieren (Q, B, L, ggf. S, I. . .).

Feynman: β^- (Quarkebene)

$d\rightarrow u+W^-$, $W^-\rightarrow e^-\bar{\nu}_e$



(Spektatorquarks: $n=udd\rightarrow p=uud$)

Rydberg / Spektralserien

$\frac{1}{\lambda}=R_\infty Z^2\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)$, $n_2>n_1$

$R_\infty\approx1{,}097\cdot10^7\,\text{m}^{-1}$, hcR_∞ = Ry = 13,6 eV

Lyman (n_1=1, UV), Balmer (n_1=2, sichtbar), Paschen (n_1=3, IR)

Prozess erlaubt? + Feynman

1) IMMER erlaten (jede WW) – sonst verboten:

$\rightarrow$ Energie/Impuls: Zerfall nur wenn $Q>0$ ($m_i\ge\sum m_f$); Erzeugung: genug $\sqrt{s}$

$\rightarrow$ Ladung Q

$\rightarrow$ Baryonzahl B

$\rightarrow$ Leptonzahl L_e, L_μ, L_τ *je Familie*

$\rightarrow$ Drehimpuls J (Spin + Bahn)

2) Welche WW?

ν dabei oder Flavour ändert ($\Delta S, \Delta C\ldots\ne0$) $\Rightarrow$ **schwach**

nur γ (kopelt nur an geladene Teilchen), kein Flavourwechsel $\Rightarrow$ **e.m.**

sonst (Hadronen, schnell, ΔS=0) $\Rightarrow$ **stark**

3) WW-spezifisch prüfen

(Erhaltungstabelle):

stark: zusätzl. I, I_3, S, C, B, T, P, C

e.m.: I_3, Flavour, P, C (aber I verletzt)

schwach: darf P, C, I verletzen;

$|\Delta S|\le1$, $\Delta S=\Delta Q$

$\Rightarrow$ **verboten**, wenn *keine* WW alle Regeln erfüllt; sonst schnellste erlaubte WW dominiert.

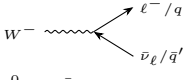
Zerfälle der Eichbosonen

Eichboson $\rightarrow$ Fermion-Antifermion-Paar $f\bar{f}'$; nur wenn $m_f+m_{f'}<m_{Boson}$ ($\Rightarrow$ *kein t*).

$W^-\rightarrow f\bar{f}'$ ($\sum Q=-1$; W^+ ladungskonj.):

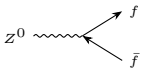
leptonisch: $e^-\bar{\nu}_e$, $\mu^-\bar{\nu}_\mu$, $\tau^-\bar{\nu}_\tau$ ($\sim$11% je)

hadronisch: $d\bar{u}$, $s\bar{u}$, $s\bar{c}$, $d\bar{c}$ ($\sim$68%, CKM, ×3 Farbe)



$Z^0\rightarrow f\bar{f}$ (*gleicher*! Flavour, neutral): $\nu\bar{\nu}$ (unsichtbar, ×3 $\Rightarrow N_\nu$=3), $\ell^+\ell^-$, $q\bar{q}$ (u, d, s, c, b)

kein $t\bar{t}$; keine FCNC ($f=\bar{f}$-Sorte)



γ: masselos $\Rightarrow$ real stabil; virtuell

$\gamma^*\rightarrow f\bar{f}$ (Paar, geladen)

g: $\rightarrow q\bar{q}$ oder gg (Selbstkopplung); nur gebunden

H^0: $\rightarrow b\bar{b}$ (dom.), $\tau^+\tau^-$, WW^*, ZZ^*, $\gamma\gamma$; Kopplung $\propto m_f$

Achten auf:

$\rightarrow W$: $\Delta Q=\pm1$; genau 1 up- + 1 down-artig (bzw. $\ell^-\bar{\nu}_\ell$);

Generationswechsel via CKM

$\rightarrow Z, \gamma$: flavourerhaltend, $f\bar{f}$ gleicher Sorte

$\rightarrow$ Quarkkanäle ×3 (Farbe); an jedem Vertex Q, B, L erhalten

Nice to Knows

$\rightarrow$ Radius: $\uparrow$ in Gruppe, $\downarrow$ in Periode

$\rightarrow$ Ionisierungsenergie: max. bei Edelgasen, min. bei Alkalimetallen

$\rightarrow$ Quarks kommen nur gebunden vor (Confinement)

$\rightarrow$ α-Teilchen hat Spin $S=0$

CoulombWW will $s_i\rightarrow S, l_i\rightarrow L$ koppeln

SpinbahnWW will $l_i+s_i\rightarrow j_i$ koppeln

$\rightarrow$ Flächendichte eines Targets:

$n_\rho=\frac{2\rho d}{M}N_A$,

$N_A=6{,}022\cdot10^{-23}\text{mol}^{-1}$

Z	Symbol	Termsymbol
18	Ar	$^1S_0$
19	K	$^2S_{1/2}$
20	Ca	$^1S_0$
21	Sc	$^2D_{3/2}$
22	Ti	$^3F_2$
23	V	$^4F_{3/2}$
24	Cr*	$^7S_3$
25	Mn	$^6S_{5/2}$
26	Fe	$^5D_4$
27	Co	$^4F_{9/2}$
28	Ni	$^3F_4$
29	Cu*	$^2S_{1/2}$
30	Zn	$^1S_0$

symmetrischer Collider: $q^2=s$ (s ist Schwerpunktenergie) übergang it virtuellem Photon