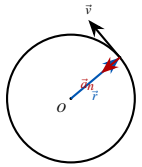
# Kinematik

**Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung:**
$v(t) = \dot{r}(t), \quad a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{r}(t)$
**Relativgeschwindigkeit:**
$v_b = v_a + v_{a\to b}$
$v_b$: Geschwindigkeit im Bezugssystem b, $v_a$: im Bezugssystem a, $v_{a\to b}$: Geschwindigkeit der beiden Bezugssysteme zueinander.
**SUVAT (konstante Beschleunigung):**
$s$: Strecke, $u$: Anfangsgeschw., $v$: Endgeschw., $a$: Beschleunigung, $t$: Zeit
$v = u + at$
$s = \frac{u+v}{2} \cdot t$
$v^2 = u^2 + 2as$
$s = ut + \frac{1}{2}at^2, \quad s = vt - \frac{1}{2}at^2$
**Bewegung auf schiefer Ebene (Neigungswinkel $\beta$):**
reibungsfrei: $a = g\sin\beta$
mit Reibung: $a = g(\sin\beta - \mu\cos\beta)$
Kraft zum Beschleunigen an Steigung: $F = Ma + Mg\sin\beta$
(1. Term für Endgeschwindigkeit, 2. Term kompensiert $F_g$)

# Kreisbewegung (Kinematik)

$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{|\vec{v}|}{R}, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a_t}{R}$
$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v_t}{R}, \quad \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_t$
$\vec{a}_n = \frac{v^2}{r}\hat{n} = R\omega^2\hat{n}, \quad \vec{a}_t = \dot{v}\hat{t} = r\alpha\hat{t}$
Ortsvektor auf Kreisbahn: $\vec{r}(t) = R\begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ \sin(\omega t)\end{pmatrix}$




*Tipp: Wechsle bei Relativbewegungen ins Bezugssystem, in dem die Rechnung am einfachsten wird (z.B. Schwerpunktsystem).*

# Kräfte & Dynamik

**Newton'sche Axiome:**
$\vec{F} = m\vec{a} = \dot{\vec{p}}$
Actio = Reactio: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
Die Newton'schen Axiome gelten nur in Inertialsystemen. Jedes Bezugssystem, das sich mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber einem Inertialsystem bewegt, ist selbst ein Inertialsystem; jedes beschleunigte Bezugssystem nicht. Die Erdoberfläche ist in guter Näherung ein Inertialsystem.

# Kraftgesetze

Hebelgesetz: $l_1 m_1 g = l_2 m_2 g$
Zentripetalkraft: $\vec{F}_z = -\frac{mv^2}{r} e_r = m\omega^2 r$
Reibungskraft: $|\vec{F}_r| = \mu|\vec{F}_n|$, $F_n$: Normalkraft, $\mu$: Reibungskoeffizient
Federkraft (Hooke): $F(\Delta x) = -k\Delta x$, $k$ = Federkonstante
Gravitationskraft: $\vec{F}_G = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} e_r$
Rückstoßkraft (Näherung, z.B. auslaufendes Faß): $F_{Rück} = \dot{m} \cdot v$

# Gravitation & Umlaufbahnen

Fallbeschleunigung: $g = \frac{GM}{R^2}$
Kreisbahngeschw. (aus $F_G = F_z$): $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$
Fluchtgeschwindigkeit: $v_{flucht} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$
3. Kepler'sches Gesetz: $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = const$

# Atwood'sche Maschine

ideal (masselose Rolle & Seil): $a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2}, F_S = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$
Rolle mit Trägheitsmoment $I$, Radius $r$: $a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + I/r^2}$

*Tipp: Kräftegleichgewicht/Bewegungsgleichung getrennt pro Masse & Richtung aufstellen, dann über Zwangsbedingung ($a_1 = a_2$ oder $a_1 = 2a_2$ bei Flaschenzug) koppeln und nach gesuchter Größe auflösen.*
*Tipp: Waage/Beschleunigung im Fahrstuhl: $F_N - F_g = \pm ma$ (Vorzeichen je nach Richtung von $a$).*

# Arbeit, Energie & Impuls

**Arbeit (allg.):** $W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$
**Leistung:** $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = M\omega$
**Kinetische Energie:** $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$
Zusammenhang: $W = \Delta E_{kin}$
**Konservative Kräfte:** Arbeit entlang geschlossenem Weg verschwindet: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \vec{F} = 0$
**Potentielle Energie:** $\vec{F} = -\nabla E_{pot}(r), dE_{pot} = -\vec{F} \cdot d\vec{s}$
$E_{pot} = mgh, \quad E_{pot} = -G \cdot \frac{m_E m}{r}$
Federenergie: $E_{fed} = \frac{1}{2}kx^2$
**Mechanische Energie:** $E_{mech} = E_{kin} + E_{pot} = const$
gilt, wenn keine äußeren Kräfte wirken und alle inneren Kräfte konservativ sind.

# Impuls & Stöße

$\vec{p} = m\vec{v}$
**Impulserhaltung (keine äußere Kraft):** $\sum_i \vec{p}_i = const$
Kraftstoß: $\vec{J} = \int \vec{F}\, dt = \Delta\vec{p}$
Reduzierte Masse (Zweikörperproblem): $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
**Inelastischer Stoß** (Stoßpartner bleiben aneinander hängen, nur Impuls erhalten):
$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_E$
**Elastischer Stoß** (Impuls *und* Energie erhalten):
$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$
$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2'^2$
kolinear, $M = m_1 + m_2$: $\vec{v}'_1 = \frac{1}{M}(v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2)$, analog $v'_2$
Spezialfall $K_2$ ruht: $\vec{v}'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1, \quad \vec{v}'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1$
Relativgeschw. vor = nach dem Stoß (elastisch, Annäherung = Trennung).

# Mehrteilchensysteme & Schwerpunkt

$\vec{r}_S = \frac{1}{M}\sum_i m_i r_i = \frac{1}{M}\int r\, dm$
bewegt sich ohne äußere Kräfte nicht.
Gesamtimpuls: $P = Mv_S$, innere Kräfte: $\sum_i \vec{F}_i = 0$
$E_{kin} = \frac{1}{2}Mv_S^2 + E_{rel}$
Schwerpunktsystem: Geschw. des Massenmittelpunkts & Gesamtimpuls sind darin null.
Transformation: $\vec{v}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_S$

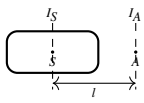
*Tipp: Impulsübertrag bei Stoß gegen Fläche/Wand meist nur senkrecht zur Kontaktfläche – Impuls komponentenweise (z.B. tangential/normal) betrachten.*
*Tipp: Bei Absprung + späterer Landung (z.B. auf beweglicher Plattform) zweimal getrennt Impulserhaltung ansetzen.*
*Tipp: Wenn Reibungsverluste ins Spiel kommen: $E_{ges} = E_{kin}^{vorher} = E_{kin,1} + E_{kin,2} + E_{Wärme}$.*

# Rotation

Kreuzprodukt-Erinnerung: $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab\sin\varphi$, Richtung nach Rechte-Hand-Regel.
$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}, \quad |\vec{a}| = R\omega^2$

# Trägheitsmoment & Satz von Steiner

$I = \sum_i m_i r_i^2, \quad I = \int r^2\, dm \quad mit\ dm = \rho\, dV$
**Steiner:** $I = I_S + ml^2$ ($m$: Gesamtmasse, $l$: Abstand zur Schwerpunktachse)
Trägheitsmomente sind additiv, aber nur bezüglich *derselben* Drehachse – im Zweifel erst Steiner anwenden!

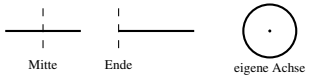



# Drehmoment, Drehimpuls, Rotationsenergie

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}\ (= rF\sin\varphi), \quad \vec{M} = I\vec{\dot{\omega}}$
Externes Drehmoment: $M_{ext} = I\alpha$
Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\ (= rmv = mr^2\omega)$, für symmetrische Achsenrotation: $\vec{L} = I\vec{\omega}$
**Drehimpulssatz:** $\vec{M}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$; sind alle äußeren Drehmomente null, ist $\vec{L} = const$
Rotationsenergie: $E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}$
Schlupffreie Drehung: $v_t = r\omega$, $a_t = r\alpha$; Rollen ohne Gleiten: $v_S = r\omega$

*Tipp: Rollende Körper: entweder Drehmoment bezüglich Auflagepunkt (Rotationspunkt) betrachten, oder Energieerhaltung $E_{pot} = E_{trans} + E_{rot}$ nutzen.*
*Tipp: Drehimpuls ist additiv ($L = L_1 + L_2$) – Vorsicht wenn Rotationen nicht in derselben Ebene liegen (z.B. Unwucht/Hantel): dann zeitabhängige Vektorkomponenten beachten.*
*Tipp: Drehmomentsbilanz immer bezüglich der tatsächlichen Drehachse aufstellen (klare Wahl des Bezugspunkts erspart Rechenarbeit).*

# Wichtige Trägheitsmomente




Punktmasse: $I = mr^2$
Dünner Stab (Mittelachse): $I = \frac{1}{12}mL^2$
Dünner Stab (Achse am Rand): $I = \frac{1}{3}mL^2$
Dünner Ring/Hohlzylinder (eigene Achse): $I = mR^2$
Dünner Ring (Durchmesserachse): $I = \frac{1}{2}mR^2$
Zylindermantel (eigene Achse): $I \approx mr^2$ (dünnwandig)
Zylindermantel (Achse senkr. durch Mitte): $I = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$
Vollzylinder/Scheibe (eigene Achse): $I = \frac{1}{2}mR^2$
Vollzylinder (Achse senkr. durch Mitte): $I = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$
Vollkugel: $I = \frac{2}{5}mR^2$
Kugelschale ($d \ll r$): $I \approx \frac{2}{3}mr^2$
Hohlkugel ($r_a > r_i$): $I = \frac{2}{5}m\frac{r_a^5 - r_i^5}{r_a^3 - r_i^3}$
Quader (Achse durch Schwerpunkt, parallel zu Kante $c$): $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Massiver Kegel (Symmetrieachse): $I = \frac{3}{10}mr^2$
Kegelmantel (Symmetrieachse): $I = \frac{1}{2}mr^2$

# Schwingungen

Federschwingung: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, $\omega = \sqrt{k/m}$
Lösung: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi), T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
Energie: $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const$
Fadenpendel (kleine Winkel): $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
Physikalisches Pendel: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$, $l$: Abstand Drehachse–Schwerpunkt
Gedämpfte Schwingung: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

# Fluide & Gase

Flüssigkeiten: Oberfläche steht im Gleichgewicht immer senkrecht zur resultierenden Kraft.
Dichte: $\rho = \frac{m}{V}$, Druck: $p = \frac{F}{A}$
Druck in unbewegter Flüssigkeit: $p = p_0 + \rho g \Delta h$
Barometrische Höhenformel: $p(h) = p_0 e^{-(h-h_0)/h_e}$, $h_e = \frac{p_0}{\rho_0 g}$ (analog für $\rho$)
Pascal-Prinzip: Druck in geschlossenem Behälter pflanzt sich unverändert an jeden Ort fort.
**Archimedisches Prinzip:** $F_A = \rho_{Fluid}\, g\, V_{verdrängt}$

# Strömende Fluide

Volumenstrom: $I_{vol} = A \cdot v$, Massenstrom: $\dot{m} = Av\rho$
Kontinuitätsgleichung: $v_1 A_1 = v_2 A_2$
**Bernoulli-Gleichung:** $p + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = const$
Venturieffekt: Engstelle $\Rightarrow v \uparrow, p \downarrow$ (Spezialfall Bernoulli, $h = const$).

# Ideales Gas

Zustandsgleichung: $pV = nRT$
gleiche Gasmenge: $\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$
Energie pro Freiheitsgrad: $\frac{1}{2}k_B T$ pro Teilchen, $\frac{1}{2}RT$ pro Mol

*Tipp: Fluide stehen senkrecht zur wirkenden Kraft – bei geneigten/rotierenden Oberflächen daraus die Form ableiten.*
*Tipp: Bei Ausfluss-/Strömungsaufgaben: erst Kontinuität, dann Bernoulli einsetzen; bei sinkendem Füllstand ergibt das eine DGL für $h(t)$.*

# Wärmelehre

**Hauptsätze:**
1: Innere Energie ändert sich durch Wärme/Arbeit. 2: Wärme fließt nur von warm nach kalt (Entropie steigt). 3: absoluter Nullpunkt wird nicht erreicht.
$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$
$U = N \cdot \frac{f}{2}k_B T = \frac{f}{2}nRT$
Spez. Wärmekapazität: $Q = cm\Delta T, c = \frac{Q}{m\Delta T}$
Molare Wärmekap.: $C_V = \frac{3}{2}R$ (einatomig), $C_V = \frac{5}{2}R$ (zweiatomig); ideales Gas: $C_p = C_V + R$
Latente Wärme ($T = const$): $Q = m\lambda$
$dU = nC_V\, dT$ (bei $V = const$)

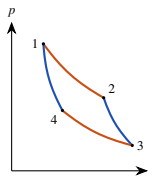
# Zustandsänderungen

| Typ | $\Delta W$ | $\Delta U$ | Bem. |
|---|---|---|---|
| isochor ($V = const$) | 0 | $nC_V\Delta T$ | $\Delta U = \Delta Q$ |
| isobar ($p = const$) | $-p\Delta V$ | $nC_V\Delta T$ | $\Delta Q = nC_p\Delta T$ |
| isotherm ($T = const$) | $-nRT\ln\frac{V_2}{V_1}$ | 0 | $\Delta W = -\Delta Q$ |
| adiabatisch ($Q = 0$) | $nC_V\Delta T$ | $= \Delta W$ | $pV^\gamma = const$ |

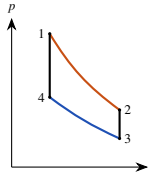
$TV^{\gamma-1} = const, \quad \frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = const$ mit $\gamma = C_p/C_V = \frac{(f/2)+1}{f/2}$
Arbeit am Gas allgemein: $W = -\int_{V_a}^{V_e} p\, dV$

# Kreisprozesse

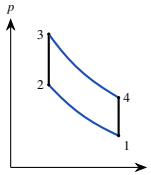
Wirkungsgrad allg.: $\varepsilon = \frac{|\Delta W|}{\Delta Q_{zu}}$; Leistungszahl Wärmepumpe: $\varepsilon_{wp} = \frac{|Q_w|}{W} = \frac{T_w}{\Delta T}$, Kältepumpe: $\varepsilon_{kp} = \frac{|Q_k|}{W} = \frac{T_k}{\Delta T}$
**Carnot:** 1 isotherme Expansion (warm) ⟶ 2 adiabatische Expansion ⟶ 3 isotherme Kompression (kalt) ⟶ 4 adiabatische Kompression.
$\varepsilon_{Carnot} = 1 - \frac{T_k}{T_w}$ (Maximalwert für jede Wärmekraftmaschine zw. $T_k, T_w$)




orange = isotherm, blau = adiabat
**Stirling:** isotherme Wärmeaufnahme, isochore Abkühlung, isotherme Wärmeabgabe, isochore Erwärmung.
$\eta_{Stirling} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ (nur wenn Regenerator ideal)




**Otto:** adiabatische Kompression, isochore Wärmezufuhr, adiabatische Expansion, isochore Wärmeabgabe.




# Entropie

$dS = \frac{dQ_{rev}}{T}$
$\Delta S = mc_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + mR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$
2. Hauptsatz: $\Delta S \geqslant 0$ (Gleichheit nur reversibel)
Bei irreversiblem Prozess verlorene Arbeit: $W_{verloren} = T\Delta S$

Temperatur immer in **KELVIN** rechnen!
$0\,°C = 273.15\,K$

# Mathematische Werkzeuge

## Bogenmaß & Vektorwinkel

$\frac{b}{2\pi R} = \frac{\varphi}{360°} \Rightarrow \varphi = \frac{b}{R}$ (in rad)
Winkel zwischen Vektoren: $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}$

## Trigonometrische Identitäten

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
kleine Winkel ($\alpha$ in rad): $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, $\tan\alpha \approx \alpha$

## Ableitungen

$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (e^{ax})' = ae^{ax}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$
Produktregel: $(fg)' = f'g + fg'$ Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$
Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

## Integrale

$\int \frac{c}{ax+b}dx = \frac{c}{a}\ln|ax+b| + C$
$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C, \quad \int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$
$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$
$\int x^{2n}e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\frac{(2n-1)!!}{(2\alpha)^n}$, eg. $\int x^2 e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

## Naturkonstanten & Einheiten

$g = 9.81\,\frac{m}{s^2}, \quad G = 6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}$
$k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}, \quad R = 8.314\,\frac{J}{molK}, \quad N_A = 6.022 \cdot 10^{23}\,\frac{1}{mol}, \quad R = N_A k_B$
Normaldruck: $p_0 = 1.013 \cdot 10^5$ Pa
**SI-Vorsätze:**
n:$10^{-9}$, μ:$10^{-6}$, m:$10^{-3}$, c:$10^{-2}$, k:$10^3$, M:$10^6$, G:$10^9$

Taschenrechner-Einstellung checken!
Grad vs. Radiant