

Elektrostatik

Coulombgesetz

$$\vec{F}_{21} = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}, \hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|},$$

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

E-Feld

Allgemein:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$$

E-Feld Punktladung:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Elektrische Felder sind wirbelfrei

Elektrischer Fluss

$$\Phi_E = \int \vec{E} \, d\vec{A}, \quad d\vec{A} = \vec{n} \, dA$$

Gaussches Gesetz

1st Maxwell Gleichung

$$\oint \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Man darf rechnen $E \oint dA = Q/\epsilon_0$, wenn E ueberall an jedem dA die selbe starke hat und immer senkrecht zu den dA's steht.

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \int_V \text{div} \vec{E} \, dV$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

mit ρ =ortsabhaengige Ladungsdichteverteilung.

Typ: Eingeschlossene Ladung einer (Kugel-)Ladungsverteilung: $Q_{\text{innen}} = \rho \cdot V_{\text{innen}}(r)$ (bzw. $\sigma \cdot V_{\text{innen}}$ bei konstanter Dichte), dann ins Gaussche Gesetz einsetzen und nach $E(r)$ umstellen.

Typ: Mehrere konzentrische Kugelschalen: innerhalb jeder Schale ist $E = 0$; außerhalb einer Schale zählt nur die insgesamt eingeschlossene Ladung (Summe der Q_i).

E-Felder im geladenen Leiter

$E_{\text{im Leiter}} = 0$ (gilt fuer jeden Leiter, auch im Inneren einer Metallplatte im E-Feld)

→ innenflaeche von ladungsfreien Hohlräumen:

$$\sigma_q = 0 \text{ (flaechenladungsdichte)}$$

→ Auf Leiterflaechen: $\vec{E} || \vec{A}$, $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$ und das Oberflaechenpotential ist konstant.

2 Metallkugeln:

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| \frac{R_2}{R_1}$$

Elektrisches Potential

Arbeit von q, im E Feld.

$$W = E_{\text{pot}}(2) - E_{\text{pot}}(1) = - \int \vec{F}_e \, d\vec{s}$$

$$\vec{F}_e = -\text{grad} \, E_{\text{pot}}(\vec{r})$$

Elektrisches Potential:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{E_{\text{pot}}(\vec{r})}{q}$$

Coulomb Potential:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad \varphi(\infty) = 0$$

$$\Delta\varphi = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d\vec{s}$$

Differentielle Form

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}(\varphi(\vec{r})) = -\nabla\varphi(\vec{r})$$

Zirkulationsgesetz (Elektrostatik):

$$\oint_C \vec{E} \, d\vec{s} = 0$$

$$\text{rot} \vec{E} = 0$$

Gilt fuer jedes Feld, welches durch Gradientenbildung des Potentials erlangt wird (konservativ ist).

Beliebiges Potential:

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{R}-\vec{r}|} \, d\vec{r}$$

Laplace Gleichung:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Im freien Raum gilt $\rho = 0$

Typ: Potential einer beliebigen Ladungsverteilung: dq bestimmen, Vektor $\vec{a}$ vom Ladungselement zum Aufpunkt, dann $d\vec{E} = K \frac{dq}{a^3} \vec{a}$ (folgt aus $\vec{E} = \vec{F}_e/q$) und über die Verteilung integrieren (Integrationsgrenzen beachten!).

Typ: Geladene Vollkugel: außerhalb wie Punktladung (Coulomb-Potential), innerhalb erst $E_{\text{innen}}(r)$ via Gauss bestimmen, dann stückweise integrieren: $\varphi(r) = \int_r^R E_{\text{innen}} \, dr + \int_R^\infty E_{\text{ausssen}} \, dr$; Arbeit für Probeladung: $W = q\varphi(2) - q\varphi(1)$.

Typ: Geladene Oberfläche mit maximaler Feldstärke (z.B. Bandgenerator): Durchbruchfeldstärke E_{max} in die E- φ -Formel einsetzen und nach Q_{max} auflösen.

E-Dipol

Fuer $|\vec{r}| \gg |\vec{d}|$, gilt:

$$\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \vec{p} = q\vec{d}$$

E Feld von Punktladung: $1/r^2$, E von Dipol: $1/r^3$

Dipol im E-Feld

$$\text{Homogen (Drehmoment): } \vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$\text{Inhomogen (Kraft): } \vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E})$$

Typ: E-Felder mehrerer Ladungen/Dipole sind additiv – einzelne Felder vektoriell aufsummieren.

Kapazitaet

$$C = \frac{Q}{U}$$

Plattenkondi:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}, \quad E = \frac{U}{d}$$

$$F_{\text{platte zu platte}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A\epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 A E^2$$

Zylinderkondensator:

$d(U)$ ueber Gauss bestimmen (mit $Q = Q_{\text{innen}}$).

$E(r) = \int_{R_1}^{R_2} E(r) \, dr$, es folgt

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}$$

Typ: Für $d \ll R_1$ (schmaler Spalt): $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ taylorn, um zum Plattenkondensator-Grenzfall zu vereinfachen.

Parallelschaltung

$$C_{\text{tot}} = \sum_i C_i$$

Reihenschaltung

$$\frac{1}{C_{\text{tot}}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

Typ: Kondensatornetzwerk: pro Kondensator $Q = CU$ mit $U = \varphi_1 - \varphi_2$ ansetzen, dann Ladungserhaltung an Knoten nutzen (z.B. $Q_3 = Q_1 + Q_2$).

Energie im Kondi

$$E = \frac{1}{2} CU^2$$

Typ: Kraft auf Kondensatorplatte: $F = QE$, Arbeit bei Verschiebung um Δd : $W = F \cdot \Delta d$.

Dielektrikum

kapazitaet mit dielektrikum:

$$C_{\text{dia}} = \epsilon_r \cdot C_{\text{vak}}$$

$$\rightarrow \vec{E}_{\text{vak}} = \epsilon_r \vec{E}_{\text{diel}}$$

$$\rightarrow \sigma_0 = \epsilon_r \sigma_{\text{eff}}$$

$$\rightarrow Q_0 = \epsilon_r Q_{\text{eff}}$$

Typ: Mehrschichtiger Plattenkondensator (Dielektrika/Metallplatten gestapelt): $U_0 = \sum_i E_i d_i$, im Inneren jeder Metallschicht ist $E = 0$; Gesamtkapazität wie Reihenschaltung der Einzelkapazitäten behandeln.

Typ: Dielektrikum teilweise in Kondensator eingeschoben: Kraft $\vec{F} = -\frac{dW_{\text{el}}}{da}$ (a: Einschubtiefe, Superposition zweier Parallel-Kondensatoren); C_{vak} wie gehabt über $C = Q/U$, $U = \int E \, dr$ aus Gauss.

Elektrische Verschiebung

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}_{\text{diel}} = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{vak}}$$

Grenzflaechenuebergange:

$$\rightarrow E_{\text{vak}}^{\perp} = E_{\text{diel}}^{\perp}, \quad E_{\text{vak}}^{\parallel} = \epsilon_r E_{\text{diel}}^{\parallel}$$

$$\rightarrow D_{\text{vak}}^{\perp} = \epsilon_r D_{\text{diel}}^{\perp}, \quad D_{\text{vak}}^{\parallel} = D_{\text{diel}}^{\parallel}$$

Maxwell-Gleichungen in Materie:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0}, \quad \oint \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{Q_{\text{frei}}}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{frei}}, \quad \oint \vec{D} \, d\vec{A} = Q_{\text{frei}}$$

Gleichstromkreise

Elektrischer Strom

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

El. Stromdichte

$$|\vec{j}| = \frac{I}{A} \rightarrow I = \int \vec{j} \, d\vec{A}$$

$$\int \text{div} \vec{j} \, dV = \oint \vec{j} \, d\vec{A} = -\frac{dQ}{dt} = -\int \dot{\rho} \, dV$$

Kontinuitaetsgleichung

$$\text{div} \vec{j} + \dot{\rho} = 0$$

Stromdichte ist auch Raumladungsdichte mal Geschwindigkeit:

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

Widerstand

differentieller Widerstand (ohm)

$$\vartheta = \frac{dU}{dI}$$

differentielle Leitfaehigkeit (siemens)

$$S = \frac{dI}{dU}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

$$\vec{j} = \frac{I}{A} = \frac{I}{KA} \vec{E} = \sigma \vec{E}, \text{ mit der spezifischen}$$

$$\text{Leitf\u00e4higkeit/Materialkonstanten } \sigma = \frac{1}{KA} \left(\frac{1}{\Omega m} \right)$$

$$\text{Spezifischer Widerstand } \rho = \frac{1}{\sigma} = R \frac{L}{A} \left(\Omega m \right)$$

dann gilt: $E = \rho \cdot \vec{j}$

Typ: Spannungsabfall entlang eines stromdurchflossenen Leiters/Mediums: $\Delta\varphi = \int E \, dr$ mit $E = \rho \cdot j$ und $j = I/A$.

$$\text{Driftgeschwindigkeit: } v_D = \frac{q\vec{E}}{m} \cdot \vec{E}$$

bei linearem Zusammenhang: $U=RI$

$$\rightarrow \text{Heissleiter: } \frac{d\rho}{dT} < 0 \quad \left(\frac{d\vartheta}{dT} < 0 \right)$$

$$\rightarrow \text{Kaltleiter: } \frac{d\rho}{dT} > 0 \quad \left(\frac{d\vartheta}{dT} > 0 \right)$$

Elektrische Leistung

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

Kirchhoffsche Regeln

→ Knotenregel: In jedem Knoten gilt: $\sum I_k = 0$

→ Maschenregel: In jeder Masche gilt: $\sum U_k = 0$

folgt aus der Maxwellschen Gleichung

Typ: Br\u00fcckenschaltung (z.B. Wheatstone): alle Maschengleichungen aufstellen (auch die Masche \u00fcber das Messger\u00e4t), auf konsistente Stromrichtungen/Vorzeichen achten. Heizleistung an einem Widerstand: $P = UI = RI^2$.

Widerstandsnetzwerke

Reihenschaltung:

$$R_{\text{tot}} = \sum_i R_i, \quad U_{\text{tot}} = \sum U_i$$

U_i sind die an den Rs abfallenden Spannungen.

Parallelschaltung

$$\frac{1}{R_{\text{tot}}} = \sum \frac{1}{R_i}, \quad I_{\text{tot}} = \sum I_n$$

Magnetostatik

Magnetischer Fluss

$$\Phi_M = \int \vec{B} \, d\vec{A}$$

$\text{div} \vec{B} = 0$ (Quellenfreiheit, 2. Maxwellsche Gleichung)

B-Felder

stromdurchflossener Leiter im Vakuum:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

lange Spule

$$B = \mu_0 n I, \text{ dabei ist } n \text{ die Windungsdichte.}$$

Typ: Herleitung \u00fcber $\oint \vec{H} \, d\vec{s} = I_{\text{frei}}$ mit einem Weg axial durch und au\u00dferhalb der Spule.

Lorentzkraft

Auf Leiter:

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$$

$$\vec{F} = I A \cdot (\vec{j} \times \vec{B})$$

$$\text{Einzelne Ladung: } \vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Zyklotronfrequenz:

$$\omega = \frac{q}{m} \cdot B$$

Typ: Massenspektrometer: Lorentzkraft = Zentripetalkraft, $qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$; v

folgt aus der Beschleunigungsspannung: $qU_B = \frac{1}{2} mv^2$

Drehmoment auf Dipol

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I \cdot \vec{A}$$

Hall-Sonde

Misst die "Hall-" Spannung

$$F_e = \frac{q \cdot U_H}{b} = F_m = q \cdot v \cdot B = \frac{I}{nb d} B$$

$$U_H = R_H \cdot \frac{I}{b}, \quad R_H = \frac{1}{nq}$$

Typ: Bewegte Ladungstr\u00e4ger im B-Feld allgemein (Drahtst\u00fcck durch $\vec{B}$ bewegt): $\Delta\varphi = \int \vec{E} \, d\vec{s} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \, d\vec{s}$, da $\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$ und $\vec{E} = \vec{F}/q$.

Ampersches Gesetz

$$\oint \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{innen}}, \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\oint \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 \oint \vec{j} \, d\vec{A}$$

Typ: Stromdurchflossenes Rohr/Leiter mit ortsabh\u00e4ngiger Stromdichte: erst $j = I/A_{\text{gesamt}}$, dann $I_{\text{innen}}(r) = j \cdot A_{\text{innen}}(r)$ bestimmen und ins Ampersche Gesetz einsetzen.

Biot-Savart-Gesetz

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Dabei ist ds das Wegelement des Stromdurchflusses, $\vec{r}$ der Vektor zum Punkt, an dem wir das B-Feld brauchen, und $\vec{r}'$ Vektor hin zu ds-Element.

Typ: Allgemeines Vorgehen: Weg $\vec{s}$ parametrisieren, Linienelement $d\vec{s}$ bilden, Vektor $\vec{r} - \vec{r}'$ zum Aufpunkt bestimmen, Kreuzprodukt bilden, dann \u00fcber den Parameter integrieren.

Rechte-Hand-Regeln

Lorentzkraft: Daumen in v-Richtung, Zeigefinger in B, Mittelfinger in F (gilt fuer positive Ladungen, bei e^- Daumen drehen).

Biot-Savart: Daumen in I-Richtung, gekruemmte Finger zeigen in B-Richtung.

Ampersche Regel: Finger in B-Feld-Richtung, Daumen in I-Richtung.

Materie im B-Feld

$$\text{Magnetisierung } \vec{M} = \frac{1}{V} \sum \vec{\mu}_i$$

B-Feld mit Material

Superposition, Anregung plus Magnetisierung:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}, \quad \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$$

Magnetische Erregung:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

$$\oint \vec{H} \, d\vec{s} = I_{\text{frei}}, \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}}$$

$$\text{rot} \vec{M} = \vec{j}_{\text{geb}}, \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{gesamt}}$$

$$\vec{j}_{\text{gesamt}} = \vec{j}_{\text{geb}} + \vec{j}_{\text{frei}}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Magnetische Suszeptibilitaet

$$\vec{M} = \chi_M \cdot \vec{H}$$

→ Diamagnetisch: $-10^{-4} \leq \chi_M \leq -10^{-9}$, absto\u00dfend
→ Paramagnetisch: $+10^{-6} \leq \chi_M \leq 10^{-4}$, anziehend
→ Ferromagnetisch: $10^2 \leq \chi_M \leq 10^5$, stark anziehend

Hysteresee

→ Verz\u00f6gerung der Magnetisierung bei wechselndem Magnetfeld

→ Magnetisierung folgt nicht sofort dem \u00e4u\u00dferen Feld

→ F\u00fchrt zu geschlossener Schleife im B-H-Diagramm

→ Energieverlust pro Zyklus als W\u00e4rme (Hystereseverlust)

→ Typisch f\u00fcr ferromagnetische Materialien

Feldgleichungen in Materie

$$\text{Vakuum: } \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\text{Materie: } \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$\vec{M}$ muss gegeben sein, bei Permanentmagneten.

Uebergangsflaechen:

$$H_{\parallel}^{(1)} = H_{\parallel}^{(2)}; \quad \mu_1 H_{\perp}^{(1)} = \mu_2 H_{\perp}^{(2)}$$

$$\frac{B_{\perp}^{(1)}}{\mu_1} = \frac{B_{\perp}^{(2)}}{\mu_2}; \quad B_{\perp}^{(1)} = B_{\perp}^{(2)}$$

Es gilt in der Statik:

→ $B_{\perp} (E_{\parallel})$ sind immer stetig.

→ $H_{\parallel} (D_{\perp})$ nur stetig, wenn $\vec{j}_{\text{frei}}(\rho_{\text{frei}}) = 0$

Typ

→ Reihe: $\hat{Z} = \sum \hat{Z}_i$
→ Parallel: $\frac{1}{Z} = \sum \frac{1}{Z_i}$

Innerhalb einer Masche koennen $\hat{U}_i$ phasenverschoben sein, und im Knoten koennen $\hat{I}_i$ phasenverschoben sein.

Tipp: Filter (z.B. Tiefpass): U_e komplex ohne Phasenverschiebung ansetzen, komplexe Impedanzen wie Widerstände behandeln (Spannungsteilerprinzip). Amplitude am Ausgang: $U_0 \cdot |H|$, Phase: $\arg(H)$, mit Übertragungsfunktion H aus dem Impedanzverhältnis.

LCR Schwingkreis

Guetefaktor: $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

Resonanz (in rad): $\omega^2 = \frac{1}{LC}$

Tipp: DGL für RLC-Schwingkreis: $U_L = -L\dot{I}$, $U_R = IR$, $U_C = Q/C$ in Maschenregel einsetzen, nach I ableiten/umformen, dann lösen. Bei komplexer Rechnung: Rechenregeln für $|\hat{Z}|$ und $\arg(\hat{Z})$ konsequent anwenden.

Trafos

$U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1$

$I_2 = \frac{N_1}{N_2} I_1$

Achtung: Beim Trafo ist das Verhältnis für den Strom *invers* zu dem der Spannung – nicht beide mit N_2/N_1 rechnen!

Gegeninduktivitaet (gekoppelte Spulen):

$M = \sqrt{L_1 L_2}$ (ideale Kopplung)

$U_1 = -L_1 \dot{I}_1 + M \dot{I}_2, \quad U_2 = -L_2 \dot{I}_2 + M \dot{I}_1$

Tipp: Ringtrafo/Spule: $L = \Phi_M/I$ mit $\Phi_M = \oint B dA$ und $\oint H ds = I$ bestimmen; $U = -L \dot{I}$ nach t integrieren liefert I(t).

Elektrische / Magnetische Feldenergie

Kapazitaet:

$W_e = \frac{1}{2} C U(t)^2$

Induktivitaet:
 $W_m = \frac{1}{2} L I(t)^2$

Energie im E-Feld:

$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 V E^2$

Energie im B-Feld

$W_m = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 V H^2$

V ist Volumen.

$W_m = \frac{1}{2} L I^2$

Energiedichte allg., el.mag. Feld

$w_{em} = \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H})$

El.mag. Wellen

Kreiswellenzahl: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi f$

Ausbreitungsgeschwindigkeit: $v_{ph} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$

Welle: $y(x,t) = A \sin(k(x - v_{ph}t)) =$

$A \sin(kx - \omega t)$

Ueberlagerung zweier Wellen mit gleicher A

$\Psi_1 = A \cos(k_1 x - \omega_1 t), \quad \Psi_2 = A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$

$\Psi_1 + \Psi_2 = 2A \cos(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t) \cos(\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t)$

Fourier-Reihen

Fuer periodische Funktionen: $f(x) = f(x + T)$

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) +$

$b_n \sin(n\omega t)$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt$

$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt$

Fourier-Integral

Fuer aperiodische Funktionen

$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_o^{\infty} [a(\omega) \cos(\omega t) +$

$b(\omega) \sin(\omega t)] d\omega$

$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$

$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$

Wellengleichung

Frequenz einer Welle: $f = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}$

Wellengleichung:

$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \Delta \Psi$

Tipp: Wellengleichung identifizieren: mit der

Standardform $\partial^2 \Psi / \partial t^2 = v^2 \Delta \Psi$ vergleichen, Vorfaktor = 1/v² liefert die Ausbreitungsgeschwindigkeit; daraus ggf. $\lambda = v/f$.

Dispersion: Wellengeschwindigkeit ist frequenz-abhaengig:

$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$

Gruppengeschwindigkeit:

$v_{gr}(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k}$

$v_{gr} \cdot v_{ph} = c^2$

Wellenl. elmag. Wellen

$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E}$

$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{B}$

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

In Materie dann noch mit μ_r, ϵ_r

Ausrichtung

Felder sind senkrecht zur Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Felder sind senkrecht zueinander.

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind in Phase.

$|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$

$\vec{E} = \frac{\omega}{k^2} (\vec{k} \times \vec{B})$

Energiestromdichte

$S = \frac{\text{Strahlungsleistung}}{\text{Fläche}} = \frac{\text{Energie}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} = \text{Energiedichte} \times \text{Geschwindigkeit}$

$S = E H, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E} \times \vec{H}$

$S = \omega_{em} \cdot c = \epsilon_0 c E^2 = \epsilon_0 c E B = \frac{1}{\mu_0} E B$

Unterschied zur Intensitaet: $I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} |S_{max}|$

Tipp: Energie in einem Strahl(bündel): über $S = w_{em} \cdot c$ und $S = P/A$ die Energiedichte w_{em} bestimmen, dann $W = w_{em} \cdot V$.

Wichtige Wellengleichung

$\lambda = \frac{c}{f}$

$E = h f$

Hertzscher Dipol

$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2 r^3} \left[\dot{\vec{p}} \times \vec{r} + \frac{r}{c} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}) \right]$

$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3}$

$\left(\left[\vec{p} + \frac{r}{c} \dot{\vec{p}} + 3((\vec{p} + \frac{r}{c} \dot{\vec{p}}) \hat{r}) \hat{r} \right] + \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{p}} \times \vec{r} \right) \times \vec{r}$

Nahfeld: $E \propto \frac{1}{r^2}, \quad \frac{1}{r}, \quad B \propto \frac{1}{r^2}$

($r \gg \lambda$; $\lambda \gg > d$)

Fernfeld: $E \propto \frac{1}{r}, \quad B \propto \frac{1}{r}$

($r \gg \lambda$) Strahlungsleistung:

$S(r,v) = \frac{p_0^2 \omega^2 \sin^2(\theta)}{16 \pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \cdot \sin^2(\omega t - \vec{k} \vec{r})$

Tipp: Abgestrahlte Gesamtleistung aus Winkelverteilung: $I(\theta) = I_{max} \sin^2 \theta$ mit $I \propto P/A$ ueber die Kugeloberflaeche im Abstand r verknuepfen, ueber $d\theta d\phi$ integrieren und nach I_{max} auflösen.

Achtung: Fuer das E-Feld gilt $I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E^2$, nicht die S-Formel direkt einsetzen!

Tipp: Magnetfluss einer Antenne/Leiterschleife im Wellenfeld: $\Phi = \int \vec{B} d\vec{A}$ mit $d\vec{A} = dx dy$; bei symmetrischer Geometrie Integrationsgrenzen $-L/2$ bis $L/2$ waehlen, das vereinfacht oft.

Optik

Tipp: Für Maxima/Minima bei Interferenz/Beugung immer zuerst den Gangunterschied δ aufstellen, erst dann nach dem gesuchten Winkel/Abstand auflösen.

Beugung Einzelspalt

Pos. der Minima:

$\lambda = a \sin(\theta)$

Intensitaet

$I = I_0 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{k \cdot a}{2} \sin(\theta)\right)}{\left(\frac{k \cdot a}{2}\right)^2 \cdot \sin^2(\theta)}$

Beugung Doppelspalt

d ist Spaltabstand

Fuer Maxima

$d \cdot \sin(\theta) = n \cdot \lambda$

Otes max bei $\delta = 0$

Fuer Minima

$\delta = (k + 1/2) \lambda$

$d \cdot \sin(\theta) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$

Intensity

$I = 4I_0 \left(\frac{\sin(\frac{1}{2} \phi)}{\frac{1}{2} \phi} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{1}{2} \delta \right)$

mit:

$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin(\theta)$

Reflexion und Brechung

Huygenssches Prinzip

Einfall → Reflexion + Transmission

Brechung (Refraction)

Brechungsindex: $n = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{c_0}{c_{medium}}$

Verringerung der Lichtgeschwindigkeit in einem Medium:

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}} \cdot \frac{c_0}{\mu_0} = \frac{c_0}{n}$ wobei $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

Snellius

$n_1 \cdot \sin(\theta_1) = n_2 \cdot \sin(\theta_2)$

Totalreflexion

Licht bleibt im dichteren Medium (n_2), sobald $\theta > \theta_c$.

(nur moeglich wenn $n_2 \gg n_1$).

wobei $\sin(\theta_c) = \frac{n_1}{n_2}$

Fermatsches Prinzip

Licht nimmt zwischen zwei Punkten A und B stets den lokal minimalen Weg in Bezug auf die Laufzeit (laufzeitoptimiert).

Optischer Weg s' ueber tatsaechliche Laufzeit s definiert: $s' = n \cdot s$

bei Lichtbrechung zwischen zwei Medien:

Minimum von: $t = t_1 + t_2 = \frac{l_1}{c_1} + \frac{l_2}{c_2} =$

$\frac{n_1 l_1}{c} + \frac{n_2 l_2}{c}$

Polarisation

Gesetz von Malus

$I = I_0 \cdot \cos^2(\theta) ,$

$E = E_0 \cdot \cos(\theta)$

Amplitude bei unpolarisiertem Licht:

$I_{pol} = I_{unpol} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) = \frac{I_{unpol}}{2}$

Streuung

Streuung = Absorption und Wiederabstrahlung

Polarisation durch Reflexion

Ueber E-Felder und B-Felder.

e: Einfall, t: Transmission, r: Reflexion

$E_e - E_r = E_t$

$H_e + H_r = H_t$

$B_e + B_r = B_t$

→ $B = \frac{E}{c} = E \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu} = \mu_0 H$

→ $E = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} H = Z \cdot H$

Im Vakuum $Z_0 = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} = 377 \Omega$

Reflexion: $\rho = \frac{E_r}{E_e} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{H_r}{H_e}$

Transmission $\tau E = \frac{E_t}{E_e} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$

$\tau H = \frac{H_t}{H_e} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$

Intensitaet

$R := \frac{I_r}{I_e} = \frac{E_r H_r}{E_e H_e} = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}$

$T := \frac{I_t}{I_e} = \frac{E_t H_t}{E_e H_e} = \frac{4Z_1 \cdot Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$

$R + T = 1$ (Energieerhaltung)

Fresnelsche Gleichungen

Fuer nicht magnetische Glaeser:

⊥: E-Feld senkrecht zur Brechungsebene

||: E-Feld parallel zur Brechungsebene

Reflexionsgrad:

$R_{\perp}(\alpha, \beta) = \frac{I_{\perp,r}}{I_{\perp,e}} = \left(\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right)^2$

$R_{||}(\alpha, \beta) = \frac{I_{||,r}}{I_{||,e}} = \left(\frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \right)^2$

Transmissionsgrad:

$T_{\perp}(\alpha, \beta) = \frac{I_{\perp,tr}}{I_{\perp,e}} = \left(\frac{2 \sin(\beta) \cos(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} \right)^2$

$T_{||}(\alpha, \beta) = \frac{I_{||,tr}}{I_{||,e}} = \left(\frac{2 \sin(\beta) \cos(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \right)^2$

Es gilt Energieerhaltung:

$R_{\perp} + T_{\perp} = 1$

$R_{||} + T_{||} = 1$

$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin \beta$

Brewster-Winkel

tan(*θ**Brewster*) = *n*₂/*n*₁

Tipp: Parabolspiegel (verwandtes Reflexion-sprinzip): alle achsparallelen Strahlen treffen sich mit gleicher Phase (gleiche optische Weglaenge) im Brennpunkt.

Polarisation durch Doppelbrechung

$c_{medium} = \frac{c}{n_0}$

Sei das Licht nun senkrecht zur optischen Achse, so ist:

$c_o = \frac{c}{n_0} = c_{medium}$ ordentlich

$c_{ao} = \frac{c}{n_{ao}}$ mit $c_o \neq c_{ao}$ außerordentlich

Optische Abbildungen

Alles unter Annahme einer duennen Linse (d=0, ideal).

Parallel zur optischen Achse einfallende Strahlen werden von einer Sammellinse so gebrochen, dass sie sich im Brennpunkt schneiden (umgekehrt: Strahlen durch den Brennpunkt verlassen die Linse parallel zur Achse).

$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

Sammellinse/bikonvex: $R_1 > 0, R_2 < 0$

Zerstreuungslinse/bikonkav: $R_1 < 0, R_2 > 0$

$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{b}$

$\frac{G}{B} = \frac{g}{b}$

$f < g < 2f, \quad b > 2f$ Vergroesserung

$g > 2f, \quad f < b < 2f$ Verkleinerung

Anwendungen

Lupe: $\Gamma = \frac{s_0}{f}$ ($s_0 \approx 25\text{ cm}$ deutliche Sehweite)

Mikroskop: $V = V_{obj} \cdot V_{ok} = \frac{t}{f_{obj}} \cdot \frac{s_0}{f_{ok}}$ (t: Tubuslaenge)

Fernrohr (Kepler): $V = \frac{f_{obj}}{f_{ok}}$

Prismenspektrograph: zerlegt Licht anhand $n(\lambda)$ (Dispersion) an brechenden Prismenflaechen in sein Spektrum.

Mathe-Tools

Nuetzliche Beziehungen

Kugeloberflaeche: $A = 4\pi r^2, \quad dA = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$

Kugelvolumen: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

Rotierende Scheibe: $dA = R dr d\phi$