

Zustände & Postulate

Notation & Normalbasis
<m|n> = δ_{mn} Dabei sind m,n Zustände im Hilbertraum.
|ψ> = Σ_n c_n |n> mit c_n = <n|ψ>
Physikalische Zustände sind normiert:
<ψ|ψ> = 1 oder Σ_n |c_n|² = 1
Braket-Zusammenhänge:
<ψ| = |ψ>[†]
<φ|ψ> ∈ C
<φ|ψ> = <ψ|φ>^{*}
<ψ|ψ> = ∫ ψ^{*}(x) ψ(x) dx
Photonenzählstatistik (Poisson):
ΔN = √Var(N) = √N
Je kleiner die Intensität, umso größer relatives Rauschen:
ΔN/N = 1/√N

Vollständigkeit & Darstellungen
Σ_n P_n = Σ_n |n><n| = 1
|ψ> = Σ_n |n><n|ψ>
1 = ∫_ℝ dx |x><x|
<x|x'> = δ(x - x')
Wellenfunktion:
ψ(x) = <x|ψ>, ∫ |ψ(x)|² dx = 1
Ortsdarstellung
|x>, <x|x'> = δ(x - x')
Impulsdarstellung
|p>, <p|p'> = δ(p - p'), ψ(p) = <p|ψ>
Impulsoperator

Im Ortsraum: p̂ = -iħ ∂/∂x, im Impulsraum einfach Multiplikation ·p.
Tipp: Ortsoperator im Impulsraum via <p|x̂|ψ> = ∫ dx <p|x> x <x|ψ> und <x|p> = 1/√2πħ e^{i p x/ħ} herleiten (Ableitung nach p erkennen) ⇒ x̂_{p-Raum} = iħ ∂/∂p.

Hermiteische Operatoren & Messung
Â = Â[†]
<ψ|Aψ> = <Aψ|ψ>
Messung der Observable A mit Eigenwert a: Â|a> = a|a>
Wahrscheinlichkeit a zu messen: p(a) = |<a|ψ>|²
Zustand nach Messung (Kollaps): |ψ_{nach}> = Pa|ψvor>/√p(a) mit Pa = |a><a|
Globale Phase nicht messbar, nur relative Phasen sind physikalisch:
|ψ> ~ e^{iα} |ψ>

Erwartungswert, Varianz & Unschärfe
<A> = <ψ|Â|ψ>
Von dem x̂-Operator z.B.:
<x> = ∫ x |ψ(x)|² dx
Tipp: ψ(x) kann bei einem Spalt o.ä. als Integralgrenzen bestimmend fungieren.
Varianz-Unschärfe:
σ_A² = <A²²
Kommutator:
[A, B] = AB - BA
→ [A, B] = 0 Gemeinsame Eigenbasis (scharf messbar)
→ [x, p] = iħ nicht gemeinsam scharf messbar
→ [H, A] = 0 ⇒ ∂_t<A> = 0, falls ∂_tA = 0 (Erhaltungsgröße)

Unschärferelation (allgemein):

ΔA ΔB ≥ 1/2 |<[Â, B̂]>|

Spezialfall Ort/Impuls: → Δx Δp ≥ ħ/2
Energie-Zeit-Unschärfe:
ΔE · τ ≥ ħ/2, mit τ Evolutionszeit.
Achtung: Zeit ist an sich keine Observable – die Energie-Zeit-Unschärfe ist keine Folge von [Ĥ, t̂], sondern eine separate Aussage über die Zeitskala, auf der sich ein Zustand merklich ändert.

Zeitentwicklung

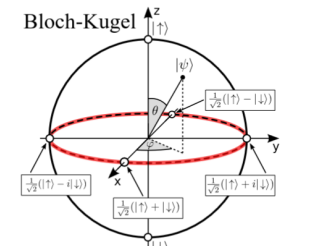
Schrödingergleichung
iħ ∂_t |ψ(t)> = H |ψ(t)>
→ |ψ(t)> = e^{-i/ħ H t} |ψ(0)>
Zeitentwicklung ist trivial in der Energieeigenbasis:
|ψ(0)> = Σ_n c_n |E_{nn} = <E_n|ψ(0)>
|ψ(t)> = Σ_n c_n e^{-i/ħ E_n t} |E<sub>n
Rücktransformation in andere Basis:
|ψ(t)> = Σ_a <a|ψ(t)> |a>
Erwartungswert in der Zeit
<A>(t) = <ψ(t)|Â|ψ(t)>
Zeitabhängigkeit entsteht durch Interferenz der Phasen mit der Bohr-Frequenz:
e^{-i(E_n - E_m)t/ħ}, ω_{ij} = (E_i - E_j)/ħ
Entartung:
E_n = E_m, m ≠ n: jede Linearkombination ist stationär (gleiche Phasenentwicklung), solange nur entartete Zustände gemischt werden.</sub>

Tipp: Dipolmoment d̂_ψ(t) = -e<ψ|r̂|ψ> verschwindet, wenn der Integrand räumlich ungerade ist (Paritätsargument) – typisch für reine Energieeigenzustände. Ein oszillierendes (strahlendes) Dipolmoment entsteht erst durch Überlagerung zweier Zustände unterschiedlicher Parität, mit Frequenz ω = (E_i - E_j)/ħ.
2-Zustandssysteme
H = span(|1>, |2>), |ψ> = c₁|1> + c₂|2>, |c₁|² + |c₂|² = 1
Operator als Matrix:
Â = (A₁₁ A₁₂; A₂₁ A₂₂), |ψ> = (c₁; c₂)
Tipp: Zeitentwicklung am einfachsten in der Eigenbasis von Ĥ: Anfangszustand in dieser Eigenbasis ausdrücken, jeden Eigenzustand mit e^{-iE_nt/ħ} weiterentwickeln, danach ggf. zurücktransformieren.
Beispiel Schwebung zweier Energieeigenzustände (z.B. ψ = 1/√2 (ψ₀ + ψ₁ e^{-iE₁t/ħ})).
|ψ(x,t)|² = 1/2 (|ψ₀|² + |ψ₁|²) + ψ₀ψ₁ cos((E₁-E₀)t/ħ)

Doppeltopf-Potential (Tunneln als 2-Niveau-System)
|L>, |R> (lokalisiert) sind keine Energieeigenzustände; die Eigenzustände sind die sym./antisym. Kombinationen |+>, |->.

|ψ> = a|L> + e^{iφ} b|R>, |a|² + |b|² = 1, P_R = |<R|ψ>|²
Tipp: L, R sind keine Eigenzustände ⇒ Phaseninterferenz zwischen |+>, |-> in der Zeit ⇒ die Aufenthaltswahrscheinlichkeit oszilliert (tunnelt) zwischen den Töpfen mit Frequenz (E₊ - E₋)/ħ.

Bloch-Kugel (Spin-1/2 als kanonisches 2-Niveau-System):



|ψ> = cos(θ/2) |↑> + sin(θ/2) e^{iφ} |↓>

Drehimpuls & Spin

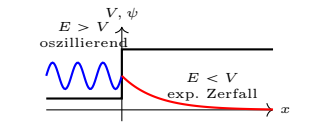
Bahndrehimpuls
L̂_x = ŷp_z - ẑp_y
L̂_y = ẑp_x - x̂p_z
L̂_z = x̂p_y - ŷp_x
[L_i, L_j] = iħ ε_{ijk} L_k
L² = L_x² + L_y² + L_z²
L̂_z = -iħ ∂/∂φ (Kugelkoordinats.)
[L², L_z] = 0
Gemeinsame Eigenzustände:
L² |l, m> = ħ² l(l+1) |l, m>
L_z |l, m> = ħ m |l, m>
Ladder-Operatoren:
L_± = L_x ± iL_y
L_± |l, m> = ħ√l(l+1) - m(m±1) |l, m±1>

Spin
Ŝ_i = ħ/2 σ_i (Paulimatrizen)
σ_x = (0 1; 1 0), σ_y = (0 -i; i 0), σ_z = (1 0; 0 -1)
[S_x, S_y] = iħ S_z
[S², S_z] = 0

Stern-Gerlach & Spinmessung
Anzahl möglicher Strahlen: # = 2S + 1
Spin m_S-Werte # Strahl
1/2 -1/2, +1/2 2
1 -1, 0, +1 3
3/2 -3/2, -1/2, +1/2, +3/2 4
Tipp: Eine Blende, die nur einen m-Wert durchlässt, projiziert auf den Eigenzustand von Ŝ_i zu diesem Eigenwert. Ein zweiter SG-Apparat entlang einer anderen Achse (z.B. S_x nach S_y) spaltet erneut auf, da [Ŝ_i, Ŝ_j] ≠ 0 (nicht gemeinsam scharf messbar). Zwei sequentielle Messungen mit n₁ bzw. n₂ möglichen Ausgängen ergeben n₁ × n₂ mögliche Endzustände.

Potentialprobleme (1D)

Tipp: Wellenfunktion skizzieren: E > V ⇒ Krümmung zur Nulllinie hin (oszillierend); E < V ⇒ Krümmung von der Nulllinie weg (exponentiell). Anzahl der Knoten eines gebundenen Zustands = Anzahl der Energieeigenzustände darunter.



Freies Teilchen

V(x) = 0 ⇒ Ĥ = p̂²/2m
Separationsansatz: ψ(x, t) = φ(x) T(t)
Energieeigenfunktionen:
φ_k(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} mit k = √(2mE/ħ²)
Ebene Wellen: ψ_k(x, t) = e^{i(kx - ωt)}
Ĥψ = Eψ, mit V(x) = 1/2 m ω² x̂²
mit ω = E/ħ = ħk²/2m
Impulseigenzustände: p̂ = -iħ ∂_x ⇒ p = ħk
Energie-Impuls-Relation:
E = p²/2m = ħ² k²/2m - kontinuierliches Spektrum.
Achtung: Freies Teilchen hat ein kontinuierliches Spektrum
E = ħ² k²/(2m) - nicht mit der diskreten Oszillatorformel
E_n = ħω(n + 1/2) verwechseln!
Wellenpakete: ψ(x, t) = ∫ c(k) e^{i(kx - ωt)} dk, ∫ |c(k)|² dk = 1
Zeitentwicklung in Impulsbasis:
|ψ(t)> = ∫ dp <p|ψ(0)> e^{-i p² t / 2mħ} |p>, ∫ dp |p><p| = 1

Unendlicher Potentialtopf

SG: -ħ²/2m ∂_x² ψ = Eψ
Randbedingungen ⇒ B = 0, k_n = nπ/L
E_n = n² π² ħ² / 2m L²
Eigenfunktionen: ψ_n(x) = √(2/L) sin(nπx/L)

Endlicher Potentialtopf

Innen: ψ'' + k²ψ = 0, k = √(2mE/ħ²), ψ = A sin(kx) + B cos(kx)
Außen: ψ'' - k²ψ = 0, k = √(2m(V₀-E)/ħ²), ψ = Ce^{-kx} + De^{kx}
Anzahl gebundener Zustände: N ≈ 2a/π √(2mV₀/ħ²)

Potentialstufe

Ansätze: ψ₁(x) = Ae^{ik₁x} + Be^{-ik₁x} (einlaufend+reflektiert), ψ₂(x) = Ce^{ik₂x} (transmittiert)
k = √(2m(E-V)/ħ)
Stetigkeit von ψ und ψ' an der Stufe (Ableitung nur unstetig bei V = ∞, harte Wand).
Amplitudenverhältnisse: r = B/A = (k₁-k₂)/(k₁+k₂), t = C/A = 2k₁/(k₁+k₂)
Reflexions-/Transmissionswahrscheinlichkeit:
R = |r|² = ((k₁-k₂)/(k₁+k₂))², T = k₂/k₁ |t|² = (4k₁k₂)/(k₁+k₂)², R + T = 1
Achtung: R, T sind Wahrscheinlichkeiten (Betragsquadrate der Amplitudenverhältnisse!) – das Quadrat nicht vergessen.
Bei ansteigender Stufe mit E < V₀: R = 1 (Totalreflexion, k₂ imaginär ⇒ keine propagierende Welle, nur exponentiell abklingender Tunnel-Schwanz). Sonst stets 0 ≤ R ≤ 1.
λ = 2π/k: fällt das Potential, wird k größer, λ kürzer (und umgekehrt).

Harmonischer Oszillator

Ĥψ = Eψ, mit V(x) = 1/2 m ω² x̂²
SE: -ħ²/2m ∂_x² ψ + m/2 ω² x̂² ψ = Eψ
Dimensionslose Substitution: ξ = √(mω/ħ) x, dann Kettenregel:
→ ∂_ξ² ψ = (ξ² - K)ψ, K = 2E/ħω
Asymptotische Lösung (ξ ≫ 1): ∂_ξ² ψ = ξ² ψ ⇒ ψ_{asympt.} = Ae^{-ξ²/2} + Be^{ξ²/2}; Normierbarkeit ⇒ B = 0.
Ansatz ψ(ξ) = h(ξ) e^{-ξ²/2}, einsetzen und kürzen:
⇒ ∂_ξ² h - 2ξ ∂_ξ h + (K - 1)h = 0
Potenzreihenansatz h(ξ) = Σ_j a_j ξ^j
liefert Rekursion:
a_{j+2} = (2j - K + 1) / ((j+2)(j+1)) a_j
Reihe muss abbrechen (sonst nicht normierbar) ⇒ K = 2n + 1:

E_n = ħω (n + 1/2)

Wellenfunktionen: ψ_n(x) = N_n H_n(x/σ) e^{-0.5(x/σ)²}, σ = √(ħ/mω)
(Längenskala, ξ = x/σ)
N_n = (1/(πσ²))^{1/4} 1/√(2ⁿ n!)
Gestörter Kasten & separierbare Potentiale
Ungestörtes Kastenpotential:
ψ_n(x) = √(2/d) sin(nπx/d)
Tipp: Störungstheorie 1. Ordnung: eine Eigenfunktion mit Knoten genau am Ort der Störung "spürt" diese zu 1. Ordnung nicht, da ∫ ψ_n^{*} V' ψ_n dx = 0.
Separierbare Potentiale (V(x, y) = W(x) + U(y)): dann ist auch die SG separierbar,

ψ(x, y) = φ(x)χ(y) und die Energien addieren sich: E_{n_x, n_y} = E_{n_x} + E_{n_y}

Wellenpakete & Materiewellen

Materiewelle & De Broglie

Naiver Ansatz: ψ(x, t) = e^{i(kx - ωt)}, ω = ħk²/2m, (ħk = mv) – nur näherungsweise, beschreibt ein massives Teilchen mit scharfer v ≪ c (Impulseigenzustand).
Elmag. Wellen (Vergleich): ω = ck (linear, keine Dispersion)
Materiewellen: ω = ħk²/2m (quadratisch, dispersiv)
Richtig ist stets: p = ħk = 2πħ/λ_{dB}
De-Broglie-Beziehung: λ_{dB} = h/mv = 2πħ/E

Fourier-Transformation

f(x) = 1/√2π ∫_{-∞}[∞] g(k) e^{ikx} dk
g(k) = 1/√2π ∫_{-∞}[∞] f(x) e^{-ikx} dx

Dispersion von Wellenpaketen

Allgemein: ψ(x, t) = ∫ dk A(k) e^{i(kx - ω(k)t)}, Phase Φ(k) = kx - ω(k)t
Regel: ∂_kω ≠ 0 ⇒ zerfließt, ∂_k²ω = 0 ⇒ zerfließt nicht
ω(k) zerfließt? ja/nein
ω = ck ja
ω = αk² ja
ω ∝ n² (z.B. Kastenpot.) ja, mit Revivals
ω = αk + βk² ja

Breite eines freien Gauß'schen Wellenpakets in der Zeit:

Δx(t) = Δx(0) √(1 + (ħt / (2m Δx(0)²))²)

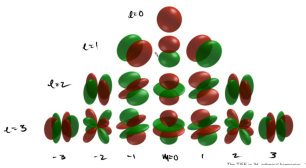
Wasserstoffatom

Hamiltonian, Quantenzahlen & Energien

Ĥ = -ħ²/2μ Δ - e²/4πε₀r, mit reduzierter Masse μ = m_eM/(m_e+M)
Tipp: Allgemein für ein Zweikörperproblem: μ = m₁m₂/(m₁+m₂) (z.B. Posttronium: μ = m_e/2; wasserstoffähnliche/exotische Atome: μ entsprechend anpassen).
Separationsansatz: ψ_{nlm}(r, θ, φ) = R_{nl}(r) Y_l^m(θ, φ)
Quantenzahlen: n ∈ ℕ; l = 0, 1, ..., n-1; m = -l, ..., l
Energien: E_n = -13.6eV/n²
Wasserstoffähnlich (allg. Z, reduzierte Masse μ):
E_n = -μ/m_e Z² · 13.6eV
Wellenlängen bei Übergängen: E_{ph} = E_i - E_j = hc/λ
Tipp: Lyman-Serie: Übergänge nach n = 1; allgemein ΔE = Z² E_{Ryd} (1/n₁² - 1/n₂²).

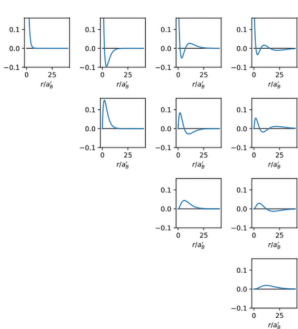
Radial- & Winkelanteil

Parität: $Y_l^m(-r) = (-1)^l Y_l^m(r)$



Regel für l, m aus Bild: $|m|$ aus Anzahl der Phasenwechsel (azimutale Knoten) ablesen, dann $l = |m| + \# \text{Bäuche} - 1$ (rotationssymmetrisch $\Rightarrow m = 0$).

Radialfunktion (links $\rightarrow$ rechts: n aufsteigend, oben $\rightarrow$ unten: l aufsteigend ab $l = 0$):

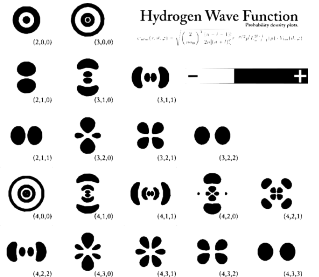


Für $l = 0$ hat der Radialteil am Ursprung einen endlichen Wert (startet nicht bei Null).

Quantenzahlen aus Knotenzahl ablesen:

$n = (\text{Radialknoten}) + l + 1$

Winkelknoten = l , azimutale Knoten = $|m|$ (Rotationssymmetrie um z-Achse $\Rightarrow m = 0$)



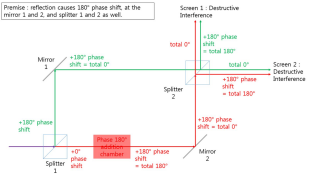
Nomenklatur: $s, p, d, f = l = 0, 1, 2, 3$; die Zahl davor ist n (z.B. $2p \Rightarrow n = 2, l = 1$); $p \Rightarrow n \geq 2$ (da $l \leq n - 1$).

Übergänge & Zeeman-Effekt
Auswahlregeln:
 $\Delta m = 0, \pm 1, \Delta l = \pm 1$
Polarisation: $\Delta m = 0 \rightarrow$ linear (π), $\Delta m = \pm 1 \rightarrow$ zirkular ($\sigma^\pm$)
Normaler Zeeman-Effekt:

$\Delta E = \mu_B g B m_l, g = 1, \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$
(Bohrsches Magneton), $m_l = -l, \dots, l$
 $E_{n,l,m_l} = E_{n,l}^0 + \mu_B B m_l \Rightarrow 2l + 1$ Zeeman-Unterniveaus
Übergangsenergie der Photonen:
 $E_\gamma = (E_i^0 - E_f^0) + (m_i - m_f) \mu_B B \Rightarrow$ bis zu 3 Energien/Wellenlängen ($\Delta m = 0, \pm 1$).
Tipp: Beobachtung entlang der B-Achse (longitudinal): π -Linie ($\Delta m = 0$) fehlt, nur die beiden σ -Linien ($\Delta m = \pm 1$) sichtbar, zirkular polarisiert. Senkrecht zu B (transversal): alle 3 Linien sichtbar, π linear parallel zu B, σ linear senkrecht zu B.

Optik: Interferometrie & Polarisation

Mach-Zehnder-Interferometer



Nach ST1: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ (wegen Reflexions-Phasensprung)
Jeder Arm sammelt Phase $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} nL$; vor ST2:

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i e^{i\Delta\phi} |\downarrow\rangle)$

Nach ST2, Interferenz:

$P_{D1} = \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$

$P_{D2} = \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$

Transfermatrix für den Phasenunterschied zwischen ST1 und ST2:

$\begin{pmatrix} e^{i\Delta\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Beispiel Glasplatte (Dicke d , Brechzahl n_G) in einem Arm: $\Delta\phi(d) = \frac{2\pi}{\lambda} (n_G - 1)d$

Maximum P_{D1} : $\Delta\phi = 2\pi m$; Minimum P_{D2} : $\Delta\phi = (2m + 1)\pi \Rightarrow d_{min} = \frac{\lambda}{2(n_G - 1)}$

Tipp: Für ein Materiewellen-Interferometer mit Potentialstufe V_0 in einem Arm: Wellenzahl dort $k_{V0} = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$ statt $k_0 = \sqrt{2mE}/\hbar$ im feldfreien Arm $\Rightarrow \Delta\phi = (k_{V0} - k_0)L$.

Doppelbrechung & Polarisationszustände

Jede Komponente bekommt eine Phase: H: $\phi_H = kn_x d$, V: $\phi_V = kn_y d$

$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\phi_H} |H\rangle + e^{i\phi_V} |V\rangle)$; nur die relative Phase ist relevant, ϕ_H als Referenz wählbar:

$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + e^{i\Delta\phi} |V\rangle)$

$\Delta\phi = kd(n_y - n_x)$

$\Delta\phi = \pm\pi/2 \Rightarrow$ zirkular polarisiert.

Basiswechsel HV $\leftrightarrow$ diagonal ($\pm 45^\circ$):

$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle \pm |V\rangle), |H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle), |V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$

Liegen die Kristallachsen bei $\pm 45^\circ$: $|\pm\rangle \rightarrow e^{ikn\pm d} |\pm\rangle$

Beugung

Beugungswinkel für k -tes Maximum: $g \sin \alpha_k = k\lambda$

Minima: $g \sin \beta_k = \left(k + \frac{1}{N}\right) \lambda$

Abstand der Maxima (Spaltbreite b , Spalt-Schirm-Abstand L): $\Delta x = 2 \frac{L}{b} \lambda$

Übungszettel-Ergänzungen

Photoeffekt

$eU_a = W_a - h\nu$

Anzahl Photonen in $t = 1s$ bei Leistung P : $N = \frac{Pt}{h\nu} = \frac{Pt\lambda}{hc}$

Maximaler Photostrom: $I_{max} = \frac{Ne}{t}$

Basiszerlegung

$\langle a_m | b_j \rangle = \langle a_m | \sum_k c_{jk} | a_k \rangle = \sum_k c_{jk} \delta_{mk} = c_{jm}$

Verzögerungsplatten (Wellenplatten)

$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_l - n_s) d$

Transfermatrizen von $\lambda/2$ - bzw. $\lambda/4$ -Platte:

$M_{\lambda/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_{\lambda/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

De-Broglie Geschwindigkeiten

Teilchen mit Impuls $p = mv \Rightarrow \lambda_{dB} = h/p = \frac{2\pi\hbar}{mv}$

Orte konstanter Phase: $\vec{k}\vec{r} - \omega t = C$
Phasen- und Gruppengeschwindigkeit: $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}, v_p = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu$

Kastenpotential (Normierung)

$E_{n_x} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(n_x \frac{\pi}{d}\right)^2$

Normierungskonstante: $A = \sqrt{\frac{2}{d}} e^{i\varphi}, \langle x | n_x \rangle = A \sin(n_x \frac{\pi}{d} x)$

Potentialstufe

Wellenfunktion: $\Psi(x, t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \psi(x)$ mit $\psi(x) = A e^{ikx}$
Wahrscheinlichkeitsstrom: $j = \frac{\hbar k}{m} |A|^2$
Amplitudenverhältnisse $r = B/A, t = C/A$; Transmission/Reflexion:

$R = |r|^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2, T = \frac{k_2}{k_1} |t|^2 = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}, R + T = 1$

Wasserstoffähnliche Systeme

Für den Übergang $n = 2 \rightarrow n = 1$ (Lyman- α): $\Delta E = R_H \left(1 - \frac{1}{4}\right)$,

$\lambda_H = \frac{2\pi\hbar c}{\Delta E}$

Exotisches/myonisches Atom (gleicher Übergang, gemessene Wellenlänge λ_M):

$R_M = R_H \frac{\mu_M}{\mu_H} = \frac{2\pi\hbar c}{3\lambda_M/4}$

$m_M = \frac{\mu_M m_p}{m_p - \mu_M}$

Bohrsches Atommodell

Bohrradius: $r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{\mu Z e^2} n^2$

Bohr-Geschwindigkeit: $v_n = \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar n}$

Bohr-Energie: $E_n = -\frac{\mu e^4 Z^2}{8\epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}$

Umlaufdauer: $t_n = \frac{2\pi r_n}{v_n}$

Gemittelte Geschwindigkeit (kinetische Gastheorie)

$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$

Interferometer-Bauelemente (Transfermatrizen)

$T + R = 1$

Strahlteiler: $T_{st} = \begin{pmatrix} \sqrt{T} & i\sqrt{R} \\ i\sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix}$

Spiegel ($R = 1$): $T_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Phasenschieber: $T_{ph} = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Polarisationszustände (zirkular)

Links-zirkular: $|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i|V\rangle)$

Rechts-zirkular: $|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i|V\rangle)$

Mathe-Tools

Trigonometrie & Komplexe Zahlen

Power-Reduction: $\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}, \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$

Euler: $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x, e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$

$\cos \omega = \frac{1}{2}(e^{-i\omega} + e^{i\omega})$

$\sin \omega = \frac{1}{2i}(e^{i\omega} - e^{-i\omega})$

Achtung: Bei sin das i im Nenner nicht vergessen – sonst falscher Faktor $-i$ statt 1 !

Gauß-Integral & nützliche Integrale

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ (ungerade Potenzen = 0)

$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ (z.B. für Radialintegrale)

Partielle Integration: $\int u v' dx = uv - \int u' v dx$

Naturkonstanten & SI

$\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}, h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
 $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}, c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
 $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, m_p = 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
 $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}, k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
 $1\text{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}, E_{Ryd} = 13.6\text{eV}$

SI-Vorsätze:
 $10^{-12} \mid 10^{-9} \mid 10^{-6} \mid 10^{-3} \mid 10^3 \mid 10^6 \mid 10^9$