

```

tcb/box tcb/boxSect
tcb/box/begin0 tcb/box/begindefault
tag=tcb/box tcb/box/begindefault
tcb/box/end0 tcb/box/enddefault
tcb/box/enddefault
tcb/box/title tcb/box/titleCaption
tcb/box/title0 tcb/box/titleddefault para/semantictcb/box/title tcb/box/titleddefault
tcb/box/draw2 tcb/box/drawdefault 2
tcb/box/drawdefault
tcb/box/init0 tcb/box/initdefault minipage/beforenoopminipage/afternoop tcb/box/initdefault

tcb/box/upper0 tcb/box/upperdefault minipage/beforetag/dftminipage/aftertag/dft
tcb/box/upperdefault
tcb/box/lower0 tcb/box/lowerdefault minipage/beforetag/dftminipage/aftertag/dft
tcb/box/lowerdefault
tcb/drawing/init0tcb/drawing/initdefaulttcb/drawing/initdefault

```

1 Vowort

Kommt noch, save save.

Contents

1 Vowort	1
2 ToDo	2
2.1 Cholesky decomposition	2
2.2 Faltungsintegrale	2
3 Recap – Good to Know	2
3.1 Flaecheelement definition	2
3.2 Vektorpotential	2
4 Indice Notation Recap	3
5 Orthogonaliteat und Skalarprodukt	3
6 Recap Tensoren	3
7 Satz von Guass	3
8 Satz von Stokes	3
9 Gauss Einheiten System	3
10 Maxwell-Gleichungen	4
10.1 Kontinuitaetsgleichung	4
10.1.1 Vorgeplaenkel	5
10.1.2 Gauss Gesetz fuer elektrische Felder	5
10.1.3 Keine Magnetischen Ladungen	5
10.1.4 Faradays Induktions Gesetz	6
10.1.5 Amperes Law	6
10.1.6 Wo ist was was?	7
10.2 Lineare Medien	7
10.3 E-Ladungerhaltung	7
10.4 Elektromagentische Dualitaet	8
10.4.1 Dualitaettransformation	8
10.4.2 Magnetische Ladungen	8
10.5 Maxwell Gleichungen unter Discrekten Symmetrien	9

14 Kugelflaechenfunktionen(GPT)	18
14.1 Definition als Eigenfunktionen des Kugellaplacians	18
14.2 Trennung der Variablen und die zugehörigen Differentialgleichungen	18
14.3 Legendre- und assoziierte Legendre-Funktionen	18
14.4 Explizite Form der sphärischen Harmonischen	19
14.5 Orthonormalität und Vollständigkeit	19
14.6 Additionstheorem	19
14.7 Darstellung einer Funktion auf der Kugel	19
14.8 Weitere Eigenschaften (Kurzüberblick)	19
15 Sphärische Multipol Entwicklung	20
16 Magnetisches Vektorpotential und Eichung	22
17 Potentiale und Wellenfunktionen	23
17.0.1 E-Potential zu Quelle	24
17.0.2 B-Potential zu Quelle	24
17.0.3 Lorenz-Eichung	25
17.0.4 D’alambert	25
17.0.5 Ausbreitungsgeschwindigkeit	25
17.1 Wellenfunktionen Lösen	25
17.2 Wellengleichungen für die Felder	26
17.2.1 Wellen-”vektor”	27
17.2.2 E-B-Wellen in Materie	27
17.2.3 Energietransport	27
17.2.4 Impulstransport und Poynting Linear Form	28
17.3 Zeitvariante Greenfunktionen	28
18 Special Relativity	32
18.1 Lorentztransformation	32

2 ToDo

2.1 Cholesky decomposition

2.2 Faltungsintegrale

3 Recap – Good to Know

3.1 Flächenelement definition

FEHTL MUSS EINGEFÜGT WERDEN

3.2 Vektorpotential

Wenn ein Vektorpotential gegeben ist, bzw. ein Linearformpotential A_k , dann gilt:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad \epsilon^{ijk} \partial_j A_k = B^i$$

4 Indice Notation Recap

5 Orthogonaliteat und Skalarprodukt

Wir definieren uns ein Funktionensystem, es gilt also:

$$|u_{(i)}\rangle \quad i = 1, \dots, u$$

Bildet ein Funktionensystem auf $[a, b]$, sind also Vektoren eines Raumes.

6 Recap Tensoren

Tensoren zweiter Stufe

Ein Tensor zweiter Stufe T_{ij} ist ein mathematisches Objekt, das zwei Indizes trägt und eine lineare Abbildung eines Vektors auf einen anderen beschreibt, also $v'_i = T_{ij}v_j$. In Matrixsprache entspricht T_{ij} einer 3×3 -Matrix, die auf Vektoren wirkt.

Ein Tensor heißt *symmetrisch*, wenn $T_{ij} = T_{ji}$ für alle Indizes gilt. Das bedeutet, dass er keine "Dreh"- oder "Schervorgänge" beschreibt, sondern nur Dehnungen oder Stauchungen entlang bestimmter Richtungen.

Er ist *positiv definit*, wenn für jeden von null verschiedenen Vektor v_i gilt

$$v_i T_{ij} v_j > 0.$$

Das bedeutet, dass der Tensor keine Richtung hat, in der er den Vektor umkehrt oder auf null abbildet. Anschaulich verhält sich ein positiv definit, symmetrischer Tensor wie eine "metrische Skala": er misst Längen oder Energien und garantiert, dass diese stets positiv bleiben. [10.2](#)

7 Satz von Guass

8 Satz von Stokes

9 Gauss Einheiten System

In diesem System ist ein CGS- System, also alle Groessen leiten sich aus centimeter, gramm und der sekunde ab. Es gibt also keine kanonische Basiseinheit fuer elektrische Groessen, diese werden auch aus CGS abgeleitet.

Man definiert sich alles ueber die Coulomkraft;

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Hier wie man sieht ohne Vorfaktor. Dadurch haben B,E,D und H die gleiche Einheit!

Wir benutzen das Gaussystem, weil dadurch die Maxwellgleichungen symmetrischer sind.

10 Maxwell-Gleichungen

Die Maxwell Gleichungen in unserer Indice Notation sehen so aus.

Gauss Gesetz	$\partial_i D^i = 4\pi\rho$
Non-existing Magnetic Charges	$\partial_i B^i = 0$
Faraday Gesetz:	$\epsilon^{ijk} \partial_j E_k = -\partial_{ct} B^i$
Ampere Gesetz	$\epsilon^{ijk} \partial_j H_k = +\partial_{ct} D^i + \frac{4\pi}{c} j^i$

Dabei ist $\partial_{ct} = \frac{1}{c} \partial_t$

10.1 Kontinuitaetsgleichung

Die E-Dynamic ist eine Kontinuitaetstheorie, dass heisst alles (also auch E-Ladung) ist kontinuierlich, es gibt erstmal keine Quantifizierung. Man kann sich die Ladung also Vorstellen wie ein Fluid, wobei die Ladung erhalten bleibt, also dieses Fluid nicht erzeugt oder vernichtet werden kann. Und nichts anderes sagt die Kontinuitaetgleichung.

$$\partial_t \rho + \partial_{ij} j^i = 0$$

Dabei ist ρ die Ladungsdichte und j die Stromdichte.

*Wenn es also eine Anenderung der Ladungsdichte gibt, **muss** ein Strom geflossen sein.*

In der Gleichung steht die Divergenz der Stromdichte, das misst also, wie stark die Stroeme in einem Punkt auseinanderfliessen oder zusammenfliessen, wenn also $\partial_{ij} j^i > 0$, also Strom aus einem Punkt herausfliesst, dann nimmt die Ladungsdichte ab, also fuehr das zu $\partial_t \rho < 0$ usw. Also beschreibt diese Gleichung genau, dass es keine Erzeugung oder Vernichtung von Ladung geben kann.

Stelln wir die Gleichung um, und integrieren ueber ein Raumvolumen so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho &= -\partial_{ij} j^i && \text{umgeformt} \\ \int_V dV \partial_t \rho &= - \int_V dV \partial_{ij} j^i && \text{Volument Integral} \\ \partial_t \int_V dV \rho &= - \int_{\partial V} dS_i j^i && \text{ableitung und Integral vertauschen und Satz von Gauss} \\ \frac{d}{dt} Q &= -I \end{aligned}$$

Wie man erkennt, bekommen wir so einen bekannten Zusammenhang. Das Volumenintegral ueber eine Ladungsdichte ist dann die Gesamtladung in diesem Volumen Q und das Flaechenintegral ueber eine Stromdichte, ist dann der Gesamtstrom. Dabei laesst sich das - so erklaren, dass der Strom aus dem Volumen herausfliesst, weil der "Normalenvektor" der Flaeche dS_i nach aussen zeigt.

Wichtig ist noch das Skalarprodukt $dS_i j^i$ zu betrachten, dies ist eine Projektion des Stromdichtenvektors auf die Flaechnormale, um zuermitteln, wie viel Strom tatsaechlich parrallall zu diesem Flaechelement ist, nur der parralele Anteil fliesst ja tatsaechlich auch dem Volumen heraus und sorft fuer eine verringering der Ladungsdichte.

10.1.1 Vorgeplaenkel

Die Maxwell Gleichungen besitzen nur zwei tatsaechliche Felder E_i und B^i , dabei gibt es noch die "Scheinfelder" D^i und H_i , welche nicht messbar sind, und nur mit E und B in Verbindung gebracht werden koennen, wenn wir die Physikalischen Eigenschaften des Medium kennen, in denen diese propagieren.

10.1.2 Gauss Gesetz fuer elektrische Felder

Das Elektrische Feld D^i *nicht zu verwechseln mit der Elektrischen Feldstaerke E_i* , entsteht durch die praesenz von Ladung, und einer Ladungsdichte ρ .

Fuer eine Positiver Ladung divergieren die elektrischen Feldlinien (*gehen von q aus weg*) und fuer negative Ladungen konvergieren die E-Feldlinien hinzu q.

$$\partial_i D^i = 4\pi\rho$$

Betrachten wir hier auch wieder ein Volumenintegral so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \partial_i D^i &= 4\pi\rho & | \int_V \\ \int_V dV \partial_i D^i &= \int_V dV 4\pi\rho & | \text{Satz v. Gauss} \\ \int_{\partial V} dS_i D^i &= 4\pi Q \\ \psi &= 4\pi Q \end{aligned}$$

Die zeigt, dass es eine Art Flux des elektrischen Feldes durch die Oberflaeche des Volumens ∂V gibt, welches die Ladung Q enthaelt.

Betrachten wir eine Punktladung in einem isotropen Medium *isotropes Medium erklaren*, so sollte dieser Flux paralel zu den Oberflaechnormalen vektoren sein.

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} dS_i D^i &= 4\pi Q & \text{Integraton ueber Kugelflaeche} \\ 4\pi r^2 D &= 4\pi Q \\ \Rightarrow D &= \frac{Q}{r^2} \end{aligned}$$

Also wie wir es fuer das Cloulomb Feld einer Punktladung erwarten wuerden.

10.1.3 Keine Magnetischen Ladungen

Das magnetische Feld B^i ist da anders, da es hier keine Magnetischen Ladungen gibt. Wenn wir also die Divergenz dieses Feldes bilden muss dieses verschwinden:

$$\partial_i B^i = 0$$

Gehen wir hier wieder dieselben schritte wie beim elektrischen Feld, also die Integration ueber ein Testvolumen ergibt das;

$$\int_V dV \partial_i B^i = \int_{\partial V} dS_i B^i = \phi = 0$$

Also das der Magnetische Flux, durch eine Oberflaeche genau 0 ist, also kann es keine magnetischen Ladungen geben.

10.1.4 Faradays Induktions Gesetz

Das Faraday Induktionsgesetz stellt nun einen Zusammenhang zwischen der Elektrischen Feldstärke und dem Magnetischen Feld her. Bilden wir die Rotation des Elektrischen Feldes so erhält man ein sich in der Zeit änderndes Magnetfeld.

$$\epsilon^{ijk} \partial_j E_k = -\partial_{ct} B^i$$

Dabei ist;

$$\partial_{ct} = \frac{1}{c} \partial_t$$

Damit die Dimension der erhaltenen Größe stimmt.

Auch hier können wir wieder einen Integralsatz verwenden, wenn wir uns ein Integral anschauen. Diesmal brauchen wir aber den Satz von Stokes. Es ergibt hier nämlich kein Sinn ein Volumenintegral auszuführen, da wir keine Divergenz sondern Rotation des Feldes haben. Wenn man die Wirbel eines Feldes untersucht, dann bietet sich hier eine Fläche an, kein Volumen.

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk} \partial_j E_k &= -\partial_{ct} B^i && \text{[Flächenintegral (S für Surface)]} \\ \int_S dS_i \epsilon^{ijk} \partial_j E_k &= - \int_S dS_i \partial_{ct} B^i && \text{Vertauschen und Satz von Stokes} \\ \int_{\partial S} dr^i E_i &= -\partial_{ct} \int_S dS_i B^i \\ U &= -\partial_{ct} \phi \end{aligned}$$

Die Änderungsrate des Magnetischen Flusses $\partial_{ct} \phi$ ist also proportional zur Induzierten Spannung U auf dem Rand ∂S .

10.1.5 Amperes Law

Während Magnetische Felder zwar Divergenzfrei sind (also kein rein oder rausströmen der Linien iwo hat), haben sie dennoch eine Rotation (also die Feldlinien können loopen), daraus ergibt sich das 4te Maxwell Gesetz.

$$\epsilon^{ijk} \partial_j H_k = +\partial_{ct} D^i + \frac{4\pi}{c} j^i$$

D.h. die Rotation der magnetischen Feldlinien entspringt aus zwei Phänomenen.

Einerseits können nicht verschwindende elektrische Stromdichten j^i existieren wobei die magnetischen Feldlinien dann um diese rumloopen oder zeit veränderliche Elektrische Felder.

Wieder können wir Stokes Theorem nutzen und ein Flächenintegral einbauen.

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk} \partial_j H_k &= +\partial_{ct} D^i + \frac{4\pi}{c} j^i && \text{[Flächenintegral]} \\ \int_S dS_i \epsilon^{ijk} \partial_j H_k &= \partial_{ct} \int_S dS_i D^i + \frac{4\pi}{c} \int_S dS_i j^i && \text{[Stokes und Definitionen]} \\ \int_{\partial S} dr^i H_i &= \partial_{ct} \psi + \frac{4\pi}{c} I \end{aligned}$$

Also das Magnetische Feld entlang der geschlossenen Contour ∂S ist gleich dem Strom durch die Fläche S und der Änderung des elektrischen Flusses durch diese Fläche.

10.1.6 Wo ist was was?

		vektor	linearform
Uffpasse:	vakuum	B^i	E_i
	Medium	D^i	H_i

10.2 Lineare Medien

Die zwei Felder D^i und H_i sind Excitationsfelder und sind direkt mit den Quellen ρ und j^i verbunden. Um zu den tatsächlichen Feldern zu gelangen, müssen wir uns das Medium anschauen, und die Eigenschaften dieses Mediums. Diese sind in Tensoren festgehalten, mit denen wir zwischen diesen Feldern wechseln können.

$$\begin{aligned} D^i &= \epsilon^{ij} E_j \longleftrightarrow E_i = \epsilon_{ij} D^j \\ B^i &= \mu^{ij} H_j \longleftrightarrow H_i = \mu_{ij} B^j \end{aligned}$$

Dabei ist ϵ_{ij} der Dielektrische Tensor und μ_{ij} der Permeabilitätstensor. Beide Tensoren sind symmetrische positiv definite Tensoren. 6. D.h. Sie verhalten sich wie eine Metrik mit dem Nutzen Vektoren in Linearformen zu "verwandeln" und vice versa. Das geht, weil diese Tensoren jeweils das Inverse zu sich sind, also gilt:

$$\epsilon_{ij} \epsilon^{jk} = \delta_i^k$$

Weiternoch kann man sagen, wenn alle Eigenwerte dieser Tensoren gleich sind, nennt man das Medium Isotrop und die Tensoren selbst werden proportional zur Euklidischen Metrik γ_{ij} :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{\epsilon} \gamma_{ij}, \quad \mu_{ij} = \frac{1}{\mu} \gamma_{ij}$$

Dabei kann man das Vakuum beschreiben mit $\epsilon = 1 = \mu$

10.3 E-Ladungserhaltung

Wir wollen die Ladungserhaltung nicht axiomatisch anprägen, sondern diese aus den Maxwell Gleichungen erhalten, sodass wir sehen, dass dieses gilt. Wir starten mit dem Ampere-Gesetz:

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk} \partial_j H_k &= \partial_{ct} D^i + \frac{4\pi}{c} j^i & |\partial_i \text{ Divergenz dieses Ausdrucks berechnen} \\ \partial_i \epsilon^{ijk} \partial_j H_k &= \partial_{ct} \partial_i D^i + \frac{4\pi}{c} \partial_i j^i \end{aligned}$$

Hier begegnet uns nun das erste mal der Ausdruck:

$$\epsilon^{ijk} \partial_i \partial_j \Phi_k$$

Mit irgendeinem testfunktional Φ_k . Dabei ist ϵ^{ijk} in den Indices (ij) komplett antisymmetrisch und die Partiellen Ableitungen $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ komplett symmetrisch, da sie nach dem Satz von Schwarz vertauschen. Die Kontraktion (also die Summation ueber die jeweiligen Indices) von einem antisymmetrischen Objekt und einem Symmetrischen Objekt ist immer 0. (Siehe Theo1)

Es ergibt sich also:

$$\partial_{ct} \partial_i D^i + \frac{4\pi}{c} \partial_i j^i = 0$$

Nun bauen wir noch das Gauss Gesetz ein: $\partial_i D^i = 4\pi\rho$ und es ergibt sich:

$$4\pi\partial_{ct}\rho + \frac{4\pi}{c}\partial_i j^i = 0$$

Und erhalten damit die bekannte Gleichung:

$$\partial_t \rho + \partial_i j^i = 0$$

10.4 Elektromagnetische Dualitaet

Im Vakuum ist die Ladungsdichte $\rho = 0$ und die Stromdichte $j^i = 0$ ebenfalls. Dabei werden die Maxwell Gleichungen sehr symmetrisch.

Erste:

$$\partial_i D^i \stackrel{D \rightarrow E}{=} \epsilon^{ij} \partial_i E_j \stackrel{\text{Weil Vakuum}}{=} \epsilon \gamma^{ij} \partial_i E_j \stackrel{\text{weil } \rho=0}{=} 0$$

Zweite:

$$\partial_i B^i \stackrel{B \rightarrow H}{=} \mu^{ij} \partial_i H_j \stackrel{\text{Weil Vakuum}}{=} \mu \gamma^{ij} \partial_i H_j \stackrel{\text{weil } \tau=0}{=} 0$$

(Dabei waere τ die magnetische Ladungsdichte, die eh immer 0 ist)

Dritte

$$\epsilon^{ijk} \partial_j E_k \stackrel{\text{maxwell}}{=} -\partial_{ct} B^i \stackrel{B \rightarrow H}{=} -\mu^{ij} \partial_{ct} H_j \stackrel{\text{vakuum}}{=} -\frac{1}{\mu} \gamma^{ij} \partial_{ct} H_j$$

Vierte

$$\epsilon^{ijk} \partial_j H_k \stackrel{\text{maxwell und } j^i=0}{=} \partial_{ct} D^i \stackrel{D \rightarrow E}{=} \epsilon^{ij} \partial_{ct} E_j \stackrel{\text{vakuum}}{=} \epsilon \gamma^{ij} \partial_{ct} E_j$$

Wenn man das selbst TeXt, oder abschreibt, merkt man wie oft man SRTG C+V hat benutzen koennen Und genau das ist der Punkt, im Vakuum werden die Maxwell Gleichungen super homogen und symmetrisch. Fast so als koennte $E \rightarrow H$

10.4.1 Dualitaetstransformation

In Isotropen Medien (z.B. Vakuum) sind die Maxwell Gleichungen invariant unter einer Dualitaetstransformation: $E_i \rightarrow H_i$, $\mu H_i \rightarrow -\epsilon E_i$. Also erst die Praesenz von ρ und j^i laesst eine Unterscheidung von E-Feld und B-Feld zu.

Im Fall von gar keine Medium, also $\epsilon = \mu = 1$ wird es sogar noch simpler:

$$E_i \rightarrow \gamma_{ij} B^j, \quad B^i \rightarrow -\gamma^{ij} E_j$$

10.4.2 Magnetische Ladungen

Die Maxwell Gleichungen selbst, wurden auch super fuer Magnetische Ladungen Funktionieren. Bauen wir zum Beispiel so auf:

Gauss Gesetz	$\partial_i D^i = 4\pi\rho$
Non-existing Magnetic Charges	$\partial_i B^i = 4\pi\tau$
Faraday Gesetz:	$\epsilon^{ijk} \partial_j E_k = -\partial_{ct} B^i - \frac{4\pi}{c} j^i$
Ampere Gesetz	$\epsilon^{ijk} \partial_j H_k = +\partial_{ct} D^i + \frac{4\pi}{c} j^i$

Dabei ist τ die Magnetische Ladungsdichte und i^i die magnetische Strom Dichte. Man sieht dass dann alle Maxwell Gleichungen inhomogene PDEs werden. Man wuerde sogar im zweifel auf eine Magnetische Kontinuitaetesgleichung kommen:

$$\partial_t \tau + \partial_i i^i = 0$$

10.5 Maxwell Gleichungen unter Discrekten Symmetrien

Wurde nicht in der VL behandelt, daher irrelevant (hoffentlich lol)

11 Elektrostatisches Potential

Wir wollen lernen, wie wir aus den Maxwellgleichungen Feldkonfigurationen errechnen koenne, sodass die MG (=Maxwell Gleichungen) erfuehlt sind. Im einfachsten Fall betrachten wir mal ein elektrostatisches Feld um eine Punktladung q :

$$\begin{aligned} \partial_i D^i &= 4\pi \rho & | \text{Volumenintegral} \\ \int_V dV \partial_i D^i &= 4\pi \int_V dV \rho & | \text{Satz von Gauss und Integral ausfuehren} \\ \int_S dS_i D^i &= 4\pi q & | D \rightarrow E \\ \int_S dS_i \epsilon^{ij} E_j &= 4\pi q & | \text{Annahme Isotropes Medium und radialsymmetry (Kugel)} \\ 4\pi \epsilon r^2 E &= 4\pi q \end{aligned}$$

Die Annahme des Isotropen Mediums gibt uns die relation $\epsilon^{ij} = \epsilon \gamma^{ij}$, dann bekommen wir, wenn wir als Integrationsvolumen eine Kugel nutzen, die Kugeloberflaeche herauss, und dadurch unser Radiales E-Feld:

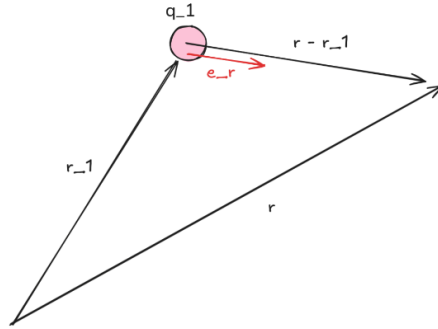
$$E = \frac{q}{\epsilon r^2}$$

Wir erkennen, dass das E-Feld mit $\frac{1}{r^2}$ geht, weil die Kugeloberflaeche genau damit zunimmt, und der Fluss durch jedes Oberflaechelement konserviert ist.

Betrachten wir nun das Feld an einem Punkt $\mathbf{r}$ und setzen die Ladung q_1 an den Punkt $\mathbf{r}_1$, dann koennen wir das E-Feld an dem Punkt so beschreiben:

$$E_i(\mathbf{r}) = \underbrace{\frac{q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2}}_{\frac{q}{r^2}} \underbrace{\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}}_{e_r} \underbrace{\gamma_{ij}}_{\text{Change vektor to form}}$$

Dabei ist nun folgendes zu beachten:



Einerseits muessen wir den Skalaren Abstand $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ zwischen Quellladung und Beobachter beruecksichtigen (bzw das Quadrat davon), als auch die Richtungsinformation kodieren, das machen wir mit einem Normierten Vektor $\mathbf{e}_r$ von q_1 nach $\mathbf{r}$.

Nun fehlt noch, das das E-Feld einen Linearform charakter hat, wir aber rechts einen Vektor stehen haben, also brauchen wir die Metrik des Raumes γ_{ij} um dies zu aendern.

Fassen wir zusammen erhalten wir:

$$E_i(\mathbf{r}) = \gamma_{ij} q_1 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}$$

Betrachten wir nun den Fall von N Ladungen an den Orten $\mathbf{r}_n$, dann ergibt sich:

$$E_i(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N q_n \gamma_{ij} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)^j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3}$$

Wenn wir nun vorhaben in den continuumslimes zu gehen, dann muessen wir die diskreten Ladungen q_n und deren Position $\mathbf{r}_n$ in ein Volumenintegral der Ladungsdichte verwandeln:

$$\underbrace{Q}_{\text{Gesamtladung}} = \underbrace{\sum_{n=1}^N q_n}_{\text{Summe aller kleinen Ladungen}} = \underbrace{\int_V dV' \rho(\mathbf{r}')}_{\text{Volumenintegral ueber Dichte}}$$

Wir koennen also Darstellen:

$$E_i(\mathbf{r}) = \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \gamma_{ij} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Betrachten wir nun den $\gamma_{ij} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$ -Part etwas genauer.

Wichtig: hier ist die j -te Komponente des Vektors gemeint, man haette auch $(r - r_1)^j$ schreiben koennen.

Dann muss man erkenne, dass dieser Ausdruck, genau der Gradientenbildung von $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ entspricht:

$$\underbrace{-\partial_i \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{\text{Gradient, eines Skalarfeldes in } \mathbf{r}} = \underbrace{\gamma_{ij} \frac{(r - r')^j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}}_{\text{gesuchter Ausdruck}} = \underbrace{+\partial'_i \frac{(r - r')^j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}}_{\text{Negativer Gradient in } \mathbf{r}'}$$

Wichtig, hier die Unterscheidung ∂_i wirkt auf r und ∂'_i wirkt auf r'

Versuchen wir den Zusammenhang einmal zu zeigen:

$$\begin{aligned}
 \partial_a \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \partial_a \frac{1}{\sqrt{\gamma_{ij}(r-r')^i(r-r')^j}} & \left| \begin{array}{l} \text{Die Metrik senkt einen Index,} \\ \text{dann Skalarprodukt und Summe drüber} \end{array} \right. \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{\dots}^3} \left[\gamma_{ij} \partial_a (r-r')^i \cdot (r-r')^j + \gamma_{ij} (r-r')^i \cdot \partial_a (r-r')^j \right] & \left| \text{Kettenregel und dann Produktregel} \right. \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{\dots}^3} \left[\gamma_{ij} \delta_a^i \cdot (r-r')^j + \gamma_{ij} (r-r')^i \cdot \delta_a^j \right] & \left| \partial_a (r-r')^i = \delta_a^i \right. \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{\dots}^3} \left[\gamma_{aj} (r-r')^j + \gamma_{ia} (r-r')^i \right] & \left| \delta \text{ angewandt} \right. \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{\dots}^3} \left[\gamma_{ai} (r-r')^i + \underbrace{\gamma_{ia} (r-r')^i}_{=\gamma_{ai}} \right] & \left| \begin{array}{l} \text{Indices umbenannt, weil innerhalb einer Summe juckt,} \\ \text{und Metrik ist symmetrisch} \end{array} \right. \\
 &= -\gamma_{ai} \frac{(r-r')^i}{\sqrt{\dots}^3} = -\gamma_{ai} \frac{(r-r')^i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} & \left| \text{Zusammenfassen} \right.
 \end{aligned}$$

Nun koennen wir also schreiben:

$$E_i(\mathbf{r}) = - \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \partial_i \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\partial_i \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

So koennen wir uns nun das Elektrostatische Potential definieren:

$$E_i(\mathbf{r}) = -\partial_i \Phi(\mathbf{r}), \quad \Phi(\mathbf{r}) = \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Dieser Ausdruck im Integral wuerde man Faltung nennen. Zwischen der Funktion der Ladungsdichtenverteilung $\rho(\mathbf{r})$ und dem "Faltungskern" $\frac{1}{r}$.

Wir haben hier eine Elektrostatisches Potential betrachtet, weil die Ladungen sich nicht bewegen, sondern fest an einem Ort sitzen. Diese Überlegung koennen wir auch anders Motivieren.

11.1 Elektrostatik aus MG

Betrachten wir die 3te Maxwell Gleichung;

$$\epsilon^{ijk} \partial_j E_k = \underbrace{-\partial_{ct} B_i}_{\text{Im Statischen Fall keine Veraenderung}} = 0$$

So sehen wir, wenn sich nix tut (statik), muss die Rotation des E-Feldes null sein.

Gehen wir nun davon aus, dass sich das E-feld im statische fall aus dem Gradienten eines Skalarfeldes bildet:

$$E_i = \underbrace{-}_{\text{konvnetion}} \partial_i \Phi$$

So ist klar, dass die Bedingung der dritten Maxwell Gleichugn erfuehlt ist.

$$\epsilon^{ijk} \partial_j E_k = \epsilon^{ijk} \partial_j \partial_k \Phi = 0$$

Hier gilt wieder Kontraktion von einem vollstaendig antisymmetrischen und symmetrischen Objekt ist Null

12 Poisson Gleichung

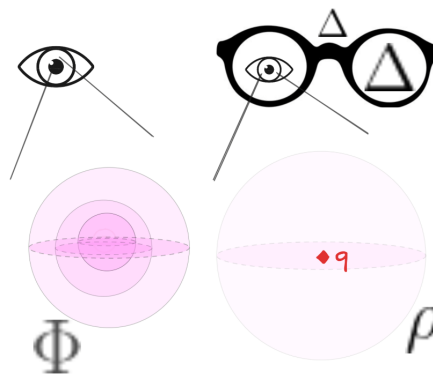
Mit dem Wissen eines Potentials, welches ueber Gradientenbildung in das statische E-Feld uebergeht, koennen wir nun die Poisson Gleichung herleiten.

$$\begin{aligned}
 4\pi\rho &= \partial_i D^i && | \text{Maxwell 1} \\
 &= \epsilon^{ij} \partial_i E_j && | D^i = \epsilon^{ij} E_j \\
 &= -\epsilon^{ij} \partial_i \partial_j \Phi && | E_j = -\partial_j \Phi \\
 &= -\epsilon \underbrace{\gamma^{ij} \partial_i \partial_j}_{\Delta} \Phi && | \text{isotropes Medium} \\
 \Rightarrow \Delta \Phi &= -4\pi\rho
 \end{aligned}$$

Mit dem Laplace Operator(allgemein):

$$\Delta = \epsilon^{ij} \partial_i \partial_j$$

Man kann ueber diesen Operator in dieser Gleichung so nachdenken: Laplace sagt mit bei einer gegebenen Potential, wo meine Ladungen sitzen. Es ist also wie eine Brille, durch die ich das Potential anschauen kann, und dann die Ladungsdichte sehe



12.0.1 Diskrete Ladungsverteilung

Wenden wir uns wieder einer Diskreten Ladungsverteilung zu, so koennen wir das Potential Φ auch schreiben als:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

Setzen wir dies nun in die Poisson Gleichung ein erhalten wir:

$$\Delta \Phi = \sum_{i=1}^n q_i \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \propto -4\pi q_i$$

Wir sehen, dass die Ladung q_i nur an der Position $\mathbf{r}_i$ sein kann, also diese Proportionalitaet nur gelten kann, wenn $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$. An jedem anderen Punkt $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_i$ ist keine Ladung, also muss $\Delta \Phi = 0$ dort sein.

Berechnen wir den Ausdruck konkret. Dazu schauen wir uns eine Ladung q_1 im Ursprung an und wechseln in Sphaerische Koordinaten.

$$\Delta\Phi = \Delta\frac{1}{r}$$

Erinnere Laplace in Kugelkoordinaten:

$$\Delta_S f(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} f \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f$$

Damit ergibt sich:

$$\Delta_S \Phi = \frac{1}{r} \partial_r^2 (r \cdot \Phi) \stackrel{\Phi=1/r}{=} \frac{1}{r} \partial_r^2 \left(r \frac{1}{r} \right) = 0$$

Also ueberall dort wo die Ladung nicht ist $r \neq 0$ ist $\Delta\Phi = 0$, wie wir es erwarten haben.

An der Stelle $r = 0$ koennen wir das aber nicht auswerten, da der Wert dort nicht definiert ist. Wir nutzen als einen Trick und integrieren $\Delta\Phi$ ueber ein kleines Kugelvolumen. Die Idee ist also, wenn in meinem TestVolumen keine Ladung ist, dann ist $\Delta\Phi = 0$ also auch ueber das ganze Integral null. Sobald aber eine Ladung anwesend ist, wird $\Delta\Phi$ an eine Stelle nicht null, die wir ueber das Integral einfangen koennen.

$$\begin{aligned} \int_V dV' \Delta\Phi &= \int_V dV' \epsilon^{ij} \partial_i \partial_j \Phi && | \text{Satz von Gauss} \\ &= \int_{\partial V} dS_i \epsilon^{ij} \partial_j \Phi && | \epsilon^{ij} \partial_j \Phi = D^i \\ &= \int_{\partial V} dS_i D^i && | D^i \propto -\frac{1}{r^2}, dS_i = r^2 d\Omega \text{ Kugelkoords} \\ &= - \int_{\partial V} d\Omega \frac{r^2}{r^2} && | \text{Kugeloberflaeche} \\ &= -4\pi \end{aligned}$$

Dabei ist im 3ten Schritt eingeflossen, dass wir die Ladung eingeschlossen haben in einem kleinen Kugelvolumen.

Diese Idee laesst sich im Dirac Delta Zusammenfassen:

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

12.0.2 Dirac Delta Distribution

Mit dieser Distribution erhalten wir auch Faltungsintegrale, aber solche die salopp gesagt, die Funktion ueber ein Integral an einer Stelle auswerten.

$$\int dx f(x) \delta(y - x) = f(y)$$

Die δ -Distribution ist Normalisiert, also gilt:

$$\int dx \delta(x) = 1$$

12.1 1. Loesung der Poisson Gleichung

Die Herleitung des elektrostatischen Potential war die erste Möglichkeit auch eine Lösung für die Poisson Gleichung zu finden. Diese Lösung haben wir schon formuliert, wir wollen hier noch einmal zeigen, dass diese die Poisson Gleichung löst.

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Wenden wir nun Δ auf diese Lösung für Φ an:

$$\Delta\Phi = \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -4\pi\rho(\mathbf{r})$$

Recap, was wir gemacht haben:

Wir haben die Poisson Gleichung aus den Maxwell Gleichungen hergeleitet, für eine statische Ladungsverteilung, also Ladungen chillen irgendwo ihre Base, bauen dabei ein E-feld auf, aber bewegen sich nicht. Am einfachsten kann man das mit diskreten Punktladungen modellieren, die an der Stelle $\mathbf{r}_i$ sitzen. Wir suchen also nun eine Lösung für die soeben gewonnenen Poisson Gleichung, also addieren wir die ganzen Potentiale der Punktladungen auf, und gewichten sie, je nachdem an welchem Ort diese sind, also v.a. in welchem Abstand zum Beobachter, der auf $\mathbf{r}$ hockt. Im diskreten Fall löst diese Konstruktion die Poisson Gleichung schon. Gehen wir über in den Kontinuumsfall, so sehen wir, dass aus der Ladungsverteilung, eine Ladungsdichte wird, und wir nun über diese Ladungsdichte in dem Argument $\mathbf{r}'$ integrieren müssen, um das Potential an der Stelle $\mathbf{r}$ zu erhalten. Mithilfe einer genaueren Berechnung, was $\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ ist, haben wir gesehen, dass auch diese kontinuierliche Variante für Φ die Poisson Gleichung löst. Allerdings gibt es auch noch andere Strategien.

12.2 Potentielle Energie einer statischen Ladungsverteilung

Diesen Part lasse ich gekonnt weg, da ich nicht glaube, dass es relevant ist Seite 14-15 im Skript.

12.3 Randbedingungen statischer Felder

$$D_1^\perp = D_2^\perp$$

und

$$E_1^\parallel = E_2^\parallel$$

13 Potential Theorie/ Potentialprobleme

Wir wollen zu einer gegebenen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ das elektrische Vektorfeld bestimmen. Das kann schnell komplex werden, deswegen nehmen wir die Detour über das Potential:

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}), \quad \Phi(\mathbf{r}) = \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Wenn man das Potential so einmal bekommen hat, kann man einfach durch Gradientenbildung das E-Feld bekommen $E_i(\mathbf{r}) = -\partial_i \Phi(\mathbf{r})$. Wir nutzen diese Detour, weil Poisson Probleme, der Art:

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = -4\pi \rho(\mathbf{r})$$

skalare und gute verstandene Gleichungen sind.

Um von einer Ladungsdichtenverteilung $\rho(\mathbf{r})$ nun zu einem Potentail zu gelangen, muss man sich folgenden Problemen stellen:

1. Inversion des Δ -Operators, um Φ zu isolieren $\rightarrow$ Green-Methode
2. Geometrie der Ladungsverteilung $\rightarrow$ Multipolentwicklung
3. Randbedingugnen beachten

13.1 Systematisch Kontruktion der Green-Funktionen

Wir kennen bereits eine Loesung der Poisson Gleichung:

$$\Phi = \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Und wir wissen, dass fuer eine Invertierung des Differentialoperators gelten muss:

$$\Phi = \Delta^{-1} \Delta \Phi = -4\pi \Delta^{-1} \rho$$

Also wir starten bei Φ , das Inverse eine Operator auf den Operator muss die Identitaetsabbildung sein, also koennen wir auch $\Delta^{-1} \Delta$ dazu schreiben, und dann die Poisson Gleichung $\Delta \Phi = -4\pi \rho$ anwenden

Wir erkennen also, dass:

$$\Phi = \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \Delta^{-1} \rho$$

Daher muss gelten:

$$\Delta^{-1} = \int_V dV' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

In diesem Fall heisst der Integralkern: $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ die Greensfunktion des Operators Δ

13.1.1 Konstruktion der Greensfunktion

Dazu betrachten wir eine Fouriertransformation des Potentials von $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{k}$.

$$\Phi(\mathbf{k}) = \int_V dV \Phi(\mathbf{r}) e^{-i(k_i r_i)} \xleftrightarrow{\text{Ruecktrafo}} \Phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{k}) e^{+i(k_i r_i)}$$

Gleiches machen wir fuer die Ladungsdichte ρ :

$$\rho(\mathbf{k}) = \int_V dV \rho(\mathbf{r}) e^{-i(k_i r_i)} \xleftrightarrow{\text{Ruecktrafo}} \rho(\mathbf{r}) = \int_V \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \rho(\mathbf{k}) e^{+i(k_i r_i)}$$

Nun schauen wir was passiert wenn wir die Fouriertransformierte von Φ in die Poisson Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned}
\Delta \Phi(\mathbf{r}) &= \Delta \int_V \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{k}) e^{+i(k_i r^i)} & | \text{Definiton Forurie Transform} \\
&= \int_V \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{k}) \Delta e^{+i(k_i r^i)} & | \text{Weil sich Laplac enicht fuer k interessiert, hiter Phi(k)} \\
&= \int_V \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{k}) (\gamma^{ab} \partial_a \partial_b) e^{+i(k_i r^i)} & | \text{Definiton Laplace} \\
&= \int_V \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{k}) (-\gamma^{ab} k_a k_b) e^{+i(k_i r^i)} & | \text{Ableitung 2 mal angewandt} \\
&= \int_V \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{k}) - k^2 e^{+i(k_i r^i)} & | \text{vereinfacht}
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Poisson GLeichung steht:

$$-4\pi \rho(\mathbf{r}) \stackrel{\text{Fourier}}{=} -4\pi \int_V \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \rho(\mathbf{k}) e^{+i(k_i r^i)}$$

Ein vergleich laesst nun zu, dass sobar wir in dem Fourierraum gehen, wir die Gleichung:

$$k^2 \Phi(\mathbf{k}) = 4\pi \rho(\mathbf{k})$$

Loesen muessen, welche nun rein algebraisch ist. Im Fourierraum gilt also fuer das Potential:

$$\Phi(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{k^2} \rho(\mathbf{k})$$

Wenn man das nun Ruecktransformiert, erhaelt man das bekannte $1/r$

13.2 Green Theoremse

Um die Eindeutitgkeit der Loesungen der Potentialprobleme zu zeigne brauchen wir die Green Theoreme. Nutzen wir eine gestrichene Variable $\mathbf{r}'$ und zwei Skalarfelder ϕ, ψ . Dann definieren wir uns daraus ene Vektorfeld; $A_j(\mathbf{r}') = \phi(\mathbf{r}') \partial'_j \psi(\mathbf{r}')$ Die Divergenz dieses Feldes schreiben wir nun als:

$$\gamma^{ij} \partial'_i A_j \stackrel{\text{Defeintion von } A_j}{=} \gamma^{ij} \partial'_i (\phi \partial'_j \psi) = \gamma^{ij} \partial'_i \phi \partial'_j \psi + \phi \Delta' \psi$$

Weil $\Delta' = \gamma^{ij} \partial'_i \partial'_j$ Wo eine Divergenz ist, kann der Gauss'sche Satz nicht weit sein, also machen wir ein Volumnintegral:

$$\begin{aligned}
\int_V dV' \gamma^{ij} \partial'_i A_j &= \int_V dV' \gamma^{ij} \partial'_i (\phi \partial'_j \psi) \stackrel{\text{ausrechnen}}{=} \int_V dV' (\gamma^{ij} \partial'_i \phi \partial'_j \psi + \phi \Delta' \psi) \\
&\stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial V} dS'_i \gamma^{ij} (\phi \partial'_j \psi)
\end{aligned}$$

Und das ist schon das erste Greens Theorem. Wenn man nun die "Felder austauscht" $\phi \leftrightarrow \psi$ und das **erste Greentheorem von sich selbst mit gewechselten Felder abzieht**, so erhaelt mandas zweite Greens Theorem:

$$\int_V dV' (\phi \gamma^{ij} \partial'_i \partial'_j \psi - \psi \gamma^{ij} \partial'_i \partial'_j \phi) = \int_{\partial V} dS_i \gamma^{ij} (\phi \partial'_j \psi - \psi \partial'_j \phi) \quad (1)$$

Weil der symmetrische Mischterm $\gamma^{ij} \partial'_i \psi \partial'_j \phi = \gamma^{ij} \partial'_i \phi \partial'_j \psi$

Auf eine ausfuehrliche Rechnung wird verzichtet, da dies eh nur herleitung ist, und im zweifel nur stumpfes rechnen ist.

Man kann nun damit zeigen, dass das von einer Ladungsverteilung erzeugten Potential eindeutig ist.

Man kann das durch einen Proof by contradiction zeigen, indem man $\Delta(\Phi_1 - \Phi_2) = \Delta\delta (= 0)$ setzt, und dann folgern, dass durch die Linearität dies auch eine Lösung fuer die Poisson Gleichung sein muss. setzt man $\Delta\delta$ in die GreenTheorem ein, so erhaelt man Bedingungen, die nur fuer $\Phi_1 = \Phi_2$ gilt.

13.3 Randbedingungen

Bisher haben wir uns nur Lösungen fuer Poisson Gleichungen angeschaut, die keinerlei Randbedingungenfreiheiten bieten.

Wir starten dabei mit dem zweiten Greens-Theorem, und wählen uns die (im Theorem noch allgemeinen Felder) nun ganz speziell:

$$\underbrace{\psi(\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}} \longrightarrow \Delta' \psi(\mathbf{r}') = -4\pi\rho\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Und Phi setzen wir auf:

$$\phi(\mathbf{r}') = \phi(\mathbf{r}') \xrightarrow{\text{Poisson}} \Delta' \phi(\mathbf{r}') = -4\pi\rho(\mathbf{r}')$$

Diese setzen wir nun in das zweite Greens-Theorem 1, so wird der Linke Teil:

$$\begin{aligned} \int_V dV' (\phi \gamma^{ij} \partial'_i \partial'_j \psi - \psi \gamma^{ij} \partial'_i \partial'_j \phi) & \quad | \text{ Linke Seite 2tes Greens} \\ \int_V dV' \left(\phi(\mathbf{r}') (-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} 4\pi\rho(\mathbf{r}') \right) & \quad | \text{ Definitionen eingesetzt} \\ -4\pi\phi(\mathbf{r}) + 4\pi \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} & \quad | \text{ Distributivgesetz ausgefuehrt} \end{aligned}$$

Und die Rechte Seite der Greenstheorem 1 wird dann zu:

$$\int_{\partial V} dS'_i \gamma^{ij} (\phi \partial'_j \psi - \psi \partial'_j \phi) = \int_{\partial V} dS'_i \gamma^{ij} \left(\phi(\mathbf{r}') \partial'_j \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \partial'_j \phi(\mathbf{r}') \right)$$

Wenn man nun alles zusammenfuehrt und umstellt, bekommt man die Relation fuer ϕ :

$$\phi(\mathbf{r}) = \underbrace{\int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{\text{Bekannter Ausdruck fuer Phi}} + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} dS'_i \gamma^{ij} \left(\underbrace{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \partial'_j \phi(\mathbf{r}')}_{\text{Neumann Term}} - \underbrace{\phi(\mathbf{r}') \partial'_j \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{\text{Dirichlet -term}} \right)$$

wir erhalten also die bekannte Form ϕ aus ρ zu bestimmen, aber erhalten noch weitere Termen, die Neuman Randbedingungen und die Dirichlet Randbedingungen (literatisch RANDBedinugn, weil auf ∂V)

14 Kugelflaechenfunktionen(GPT)

Sphärische Harmonische $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ sind die Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf der Einheitskugel S^2 . Sie bilden ein vollständiges orthonormales System für quadratintegrierbare Funktionen auf der Kugel und treten in der Lösung der Laplace- und Helmholtz-Gleichung in Kugelkoordinaten auf.

14.1 Definition als Eigenfunktionen des Kugellaplacians

In Kugelkoordinaten (r, θ, φ) wirkt der Winkelanteil des Laplace-Operators auf Funktionen $\psi(\theta, \varphi)$ als

$$\Delta_{\Omega} \psi(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}.$$

Die sphärischen Harmonischen sind Lösungen der Eigenwertgleichung

$$\Delta_{\Omega} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = -\ell(\ell + 1) Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad \ell \in \mathbb{N}_0, \quad m = -\ell, \dots, \ell.$$

14.2 Trennung der Variablen und die zugehörigen Differentialgleichungen

Mit der Separationsansatz $Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \Theta_{\ell m}(\theta) \Phi_m(\varphi)$ folgt aus der φ -Abhängigkeit

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \quad \Rightarrow \quad \Phi_m(\varphi) \propto e^{im\varphi},$$

wobei $m \in \mathbb{Z}$ wegen der Periodizität $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ sein muss. Für den polaren Anteil erhält man die zugehörige Legendre-Gleichung (assoziiert)

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + \ell(\ell + 1) \right] \Theta_{\ell m}(\theta) = 0,$$

die mit der Variablen $x = \cos \theta$ zur assoziierten Legendre-Differentialgleichung führt.

14.3 Legendre- und assoziierte Legendre-Funktionen

Die Legendre-Polynome $P_{\ell}(x)$ (Fall $m = 0$) erfüllen

$$(1 - x^2) P_{\ell}''(x) - 2x P_{\ell}'(x) + \ell(\ell + 1) P_{\ell}(x) = 0,$$

und mit der Rodrigues-Formel

$$P_{\ell}(x) = \frac{1}{2^{\ell} \ell!} \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}} (x^2 - 1)^{\ell}.$$

Die assoziierten Legendre-Funktionen $P_{\ell}^m(x)$ sind gegeben durch

$$P_{\ell}^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_{\ell}(x), \quad 0 \leq m \leq \ell.$$

14.4 Explizite Form der sphärischen Harmonischen

Mit Normierungsfaktor (Condon–Shortley-Phase $(-1)^m$) definiert man

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = N_{\ell m} P_{\ell}^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad N_{\ell m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}}.$$

Für $m < 0$ gilt $Y_{\ell, -m} = (-1)^m Y_{\ell m}^*$.

14.5 Orthonormalität und Vollständigkeit

Die sphärischen Harmonischen sind orthonormal auf der Kugel mit Maß $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$:

$$\int_{S^2} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell' m'}^*(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}.$$

Vollständigkeitsrelation:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\varphi - \varphi').$$

14.6 Additionstheorem

Für den Winkel γ zwischen zwei Richtungen (θ, φ) und (θ', φ') gilt die wichtige Identität

$$P_{\ell}(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi').$$

Diese Formel wird häufig bei Multipol- und Greens-Funktionen benutzt.

14.7 Darstellung einer Funktion auf der Kugel

Jede quadratintegrierbare Funktion $f(\theta, \varphi)$ auf S^2 lässt sich als Reihe expandieren:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad a_{\ell m} = \int_{S^2} f(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) d\Omega.$$

14.8 Weitere Eigenschaften (Kurzüberblick)

- *Parity:* $Y_{\ell m}(-\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^{\ell} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})$.
- *Reelle sphärische Harmonische:* Aus den komplexen $Y_{\ell m}$ lassen sich reelle Kombinationen bilden, die in Anwendungen (z. B. Geophysik) oft verwendet werden.
- *Rekurrenzrelationen:* Legendre- und assoziierte Legendre-Funktionen besitzen zahlreiche Rekurrenz- und Ableitungsformeln, die numerische Berechnung erlauben.

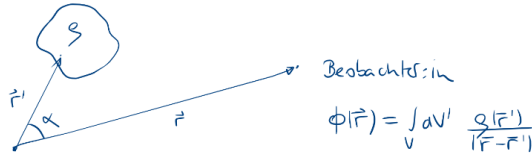


Figure 1: Darstellung Vektoren

15 Sphärische Multipol Entwicklung

Die Grennfunktion $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ ist der richtige Kalkulationskern, um aus einer beliebigen Ladungsverteilung ρ das E-Potential Φ zu erhalten. Aber intuitiv wenn wir weit genug von dieser Ladungsverteilung weggehen, sollte jede Verteilung im Fernfeld ein Coulombpotential $\frac{1}{r}$ erzeugen. Deswegen sollten wir eine hinreichende gute Näherung für ein Potential einer Ladungsverteilung finden können. Die Multipolentwicklung.

Fangen wir mit der Greensfunktion an:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}' + r'^2}}$$

Nun benutzen wir $r'^2 = r'^2$ und Skalarprodukt von $\mathbf{r}\mathbf{r}' = rr' \cos(\alpha)$, dabei ist α der Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos(\alpha) + r'^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r} \cos(\alpha) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}}$$

Nun setzen wir $\mu = \cos(\alpha)$ und erkennen ein Legendre Polynom:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\mu x + x^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\mu) x^l$$

Identifizieren wir nun diese Ausdrücke erhalten wir:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\mu)$$

Dabei sind P_l die Legendre Polynome, die sich nach der Formel von Rodriguez (oder so) schreiben lassen als Kombination von Kugelflächenfunktionen.

$$P_l(\mu) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

Dabei sind θ' und φ' die Variablen des Ortes $\mathbf{r}'$.

Wir haben bereits gesehen, dass es für die zweite räumliche Ableitung der Kugelflächenfunktionen:

$$\Delta Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Nun setzen wir zusammen und versuchen einen Ausdruck fuer unsere Greensfunktion zu erhalten mithilfe der Kugelflaechenfunktionen.

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

Man kann hier schon erkennen, dass wir nun ein Produkt haben, von Objekten, die von der getrichenen Variable abhaengen und welche nur von unserem Beobachtungsort $\mathbf{r}$.

Baut man alles Zusammen, kann man fuer das Potential Φ einer Ladungsverteilung ρ umschreiben als:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot \underbrace{\int_V dV' \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi')}_{q_{lm}}$$

Der wichtige Takeaway hier ist, dass wir nun einen Ausdruck q_{lm} haben, indem unsere Komplette Information der Ladungsverteilung enthalten ist. D.h. wir koennen **einmal** das q_{lm} fuer eine gegebene ρ berechnen, und dann unser Potential an der Stelle $\mathbf{r}$ viel einfacher errechnen, ohne wieder eine Komplette Integration durchfuehren zu muessen.

Diese q_{lm} nennen wir Multipolmomente:

$$q_{lm} = \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

Das ist super sinnvoll, da Multipole hoeherer Ordnung, einen Beitrag zu Φ haben, der deutlich schneller abfaellt, und daher im fernfeld nicht mehr "erkennbar".

Der erste Beitrag zu unserem Potential wuerde von $l = 0$ stammen, setzt man das in q_{lm} ein, so erkennt man, dass $m = 0$ sein muss. (wegen der zweiten Summe). Also ist der erste Beitrag zum Feld q_{00}

$$q_{00} = \int_V dV' \underbrace{r'^0}_{=1} \rho(\mathbf{r}') \underbrace{Y_{00}^*(\theta', \varphi')}_{=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}} = \frac{q}{\sqrt{4\pi}}$$

Kurze anmerkung warum $Y_{00}^ = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ist:*

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N_{lm} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\varphi}$$

Mit:

$$N_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}, \quad P_l^m(\mu) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-\mu^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

Man setzt ein:

$$N_{00} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0 + 1}{2} \cdot \frac{0!}{0!}} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad P_0^0(\mu) = \frac{(-1)^0}{2^0 0!} (1-\mu^2)^0 \frac{d^0}{dx^0} (x^2-1)^0 = 1$$

Dann sieht man:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

Wir erkennen also das der erste Beitrag zu unserem Potential von einem Monopol stammt, und bei weiten entfernungen, nur noch die Gesamtladung q relevant ist.

Fuer $l = 2$ erhalten wir einen dipole mit 3 dipolmomenten, da nun $m = \{-1, 0, 1\}$ ist. Dieses Konzept generalisiert sich weiter, fuer weiter wachsende l , jeweter man also an die Ladungsverteilung hingeht, desto mehr wiegen die terme mit groeserem l , also desto feiner wird die Struktur, die ich als Beobachter erkennen kann.

Normalerweise muesst man jedes Multipolmoment ausrechnen um die Multiplentwicklung aufschreiben zu koennen, aber es gibt zusammenhaenge durch die Hermitizitaet der Kugelflaechenfunktionen, also gilt:

$$Y_{lm}^*(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\theta, \varphi)$$

und:

$$q_{lm}^* = (-1)^m q_{l,-m}$$

16 Magnetisches Vektorpotential und Eichung

Nachdem wir uns elektrostatische Probleme angeschaut haben, betrachten wir nun magnetostatische Felder.

Aus der Bedingung der Statik, ergibt sich aus der Maxwell4 Gleichung:

$$\epsilon^{ijk} \partial_j H_k = \frac{4\pi}{c} J^i$$

Dieses H_k in der Gleichung muss allerdings ueberfuehr in das B-Feld $B_i = \mu^{ik} H_k$ die zweite Maxwell Gleichung $\partial_i B^i = 0$ erfuellen. (Wir waehlen also den gleichen Ansatz wie bei der Herleitung des Elektrostatischen Potentials(nur anders herum)).

Diese Bedingung waere also automatisch gegeben, wenn sich das B-feld von einem magnetischen Potential A_i zusammenbauen wuerde, ueber die Rotation dessen.

$$B^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k$$

Nutzen wir nun $H_k = \mu_{ik} B^i$ erhalten wir in der 4ten MAXwellgelchugn:

$$\epsilon^{ijk} \partial_j H_k = \mu_{kl} \epsilon^{ijk} \partial_j B^l = \mu_{kl} \epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \partial_j \partial_m A_n = M4$$

Betrachen wir isotrope Medien, sodass gilt $\mu_{kl} = \frac{1}{\mu} \gamma_{kl}$, so keonne wir aus der Doppelrotation (min you l und m sind durch μ verknuepft) die Grassmann Identitaet nutzen:

$$M4 = \frac{1}{\mu} (\gamma^{im} \gamma^{jn} - \gamma^{in} \gamma^{jm}) \partial_j \partial_m A_n = \frac{1}{\mu} (\gamma^{im} \partial_m \underbrace{(\gamma^{jn} \partial_j A_n)}_{div A} - \gamma^{in} \underbrace{(\gamma^{jm} \partial_j \partial_m A_n)}_{\Delta A_n})$$

Wie man erkennen kann, waere diese Gleichung schoen loesspar ueber 3entkoppelte Poisson Gleichungen, wenn der Termn $div A = 0$ waere.

Und in der Tat kann man eine sogenannte Eichtransformation durchfuehren, sodass man sicherstellen kann, dass $div A = 0$ gilt.

Wenn wir das gemacht haben, also $\text{div} A = 0$, koennen wir das Vektorpotentialfeld (welches eigentlich eine Linierform ist) schreiben als:

$$\Delta A_i = -\frac{4\pi\mu}{c}\gamma_{ij}J^j$$

Jetzt muessen wir nur noch motivieren, warum wir diese Eichung einfach so annehmen duerfen. Das Vektorpotential hat keine physikalisch messbare Eigenschaft, messbar ist nur das resultierende B-Feld. Deswegen transformieren wir unser Potential nun auf folgende Art und Weise:

$$A_i \longrightarrow A_i + \partial_i \chi$$

Dann sehen wir dass sich das B-feld welches sich durch A_i ergibt nicht anedert.

$$B^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k \longrightarrow \epsilon^{ijk} \partial_j (A_k + \partial_k \chi) = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k + \underbrace{\epsilon^{ijk} \partial_j \partial_k \chi}_{=0} = B^i$$

Diese Eichbedingung, fuer ein magnetostatisches Feld nennt mann **Coulombeichung**, also die Forderung, dass $\gamma^{ij} \partial_i A_j = 0$ Damit dies aber gilt muss man ein geeignetes χ finden, sodass die Divergenz von A verschwindet. Fangen wir also mit dieser Bedingung an:

$$\gamma^{ij} \partial_i A_j = 0 \longrightarrow \gamma^{ij} \partial_i (A_j + \partial_j \chi) = \gamma^{ij} \partial_i A_j + \underbrace{\gamma^{ij} \partial_i \partial_j \chi}_{\Delta} = 0$$

So koennte man sich also ein Chi- basteln:

$$\Delta \chi = -\gamma^{ij} \partial_i A_j$$

Wie wir bei den Greenstheoremen gesehen haben, haben Gleichungen solcher Art, eine eindeutige Loesung. Wir muessen χ also nichtmal explizit berechnen, sondern koenne einfach davon ausgehen, dass man eines finden koennte, sodass die Coulomb Eichung gilt.

17 Potetiale und Wellenfunktionen

Alle bisherigen Rechnungen bassierten auf der Einschraenkung eines statischen Feldes. Das hat die MG (=Maxwellgleichungen) stark vereinfacht.

Beginnen wir mit dem "Linearformfeld" A_k , aus wessen Rotation wir das B-feld erhalten koennen:

$$B^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k$$

Nutzen wir nun dieses B uns setzen es in die M3 Gelcihung ein, welche wir umgeschrieben haben.

$$\text{M3: } \epsilon^{ijk} \partial_j E_k = -\partial_{ct} B^i$$

$$0 = \epsilon^{ijk} \partial_j E_k + \partial_{ct} B^i \xrightarrow{B^i \text{ einsetzen}} \epsilon^{ijk} \partial_j E_k + \partial_{ct} \epsilon^{ijk} \partial_j A_k$$

Welches zusammengefasst ergibt:

$$\epsilon^{ijk} \partial_j (E_k + \partial_{ct} A_k) = 0$$

Und wir erkennen wieder, dass wir eine Rotatione eines Objektes haben, welches Null ergebn muss, also wieder der Trick, dass es ein skalares Potential Φ geben muss, dessen Gradientenbildung dieses Objekt erschafft. Also:

$$\exists \Phi, \quad -\partial_i \Phi = E_i + \partial_{ct} A_i$$

Dabei ist das - vor dem Φ nur konventionssache Man erkennt also, dass sich aus den Maxwellgleichungen, auch fuer den generellen nicht statischen Fall, die Idee der Potentiale ergibt.

Um spaeter wieder durch gewisse Eichungen unsere Gleichungen entkoppeln zu koennen, schauen wir uns nun an, was passiert wenn wir das magnetische Potential eichen, also die Transformation $A_i \rightarrow A_i + \partial_i \chi$ durchfuehren.

Stellen wir also unsere Bedingung fuer das Φ nach E_i um: $E_i = -\partial_i \Phi - \partial_{ct} A_i$ erhalten wir:

$$E_i = -\partial_i \Phi - \partial_{ct}(A_i + \partial_i \chi) = \underbrace{-\partial_i \Phi - \partial_{ct} A_i}_{E_i} - \partial_{ct} \partial_i \chi$$

Da dies aber invariant sein sollte, muss sich bei einer transformation, also Φ so mittansformieren, dass der extra term $-\partial_{ct} \partial_i \chi$ verschwindet. Und das passiert, wenn $\Phi \rightarrow \Phi - \partial_{ct} \chi$ transformiert. Das heisst, wenn wir A_i eichtransformieren wollen, dann muessen wir fuer die Invarianz auch Φ mittransformieren.

$$A_i \rightarrow A_i + \partial_i \chi \quad \text{und} \quad \Phi \rightarrow \Phi - \partial_{ct} \chi$$

Erinnerung:

$$\partial_{ct} \partial_i \chi = \partial_i \partial_{ct} \chi$$

, wenn man dann alles einsetzt kommt wieder E_i heraus!

Die homogenen MG sorgen also fuer die Existenz der Potentiale, waehrend die inhomogenen die Potentiale dann mit den jeweiligen Quellen identifizieren.

17.0.1 E-Potential zu Quelle

Erinnere:

$$D^i = \epsilon^{ij} E_j = \epsilon \gamma^{ij} E_j, \quad E_i = -\partial_i \Phi - \partial_{ct} A_i$$

Bauen wir aus der ersten MG:

$$\partial_i D^i \stackrel{\text{isotrp. medium}}{=} \epsilon \gamma^{ij} \partial_i E_j = -\epsilon \gamma^{ij} \partial_i \partial_j \Phi - \underbrace{\epsilon \gamma^{ij} \partial_{ct} \partial_i A_j}_* = 4\pi \rho \quad (2)$$

Wie wir sehen, ist $*$ bei einer Coulomb-Eichung $= 0$ und wir erhalten die typische Poisson Gleichung.

17.0.2 B-Potential zu Quelle

Bauen wir das Gleiche fuer die vierte MG, schaut das so aus:

$$\epsilon^{ijk} \partial_j H_k = +\partial_{ct} D^i + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^i \quad \text{B aus A und D aus E eingesetzt} \quad \frac{1}{\mu} \epsilon^{ijk} \partial_j \gamma_{kl} \epsilon^{lmn} \partial_m A_n = +\partial_{ct} \epsilon \gamma^{ij} E_j + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^i$$

Nutzen wir hier wieder Grassmann: $\gamma_{kl} \epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} = \gamma^{im} \gamma^{jn} - \gamma^{in} \gamma^{jm}$ So erhalte wir fuer die linke Seite:

$$\frac{1}{\mu} (\gamma^{im} \partial_m \underbrace{[\gamma^{jn} \partial_j A_n]}_{\text{miau}} - \gamma^{in} \underbrace{[\gamma^{jm} \partial_j \partial_m A_n]}_{\Delta}) = +\partial_{ct} \epsilon \gamma^{ij} E_j + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^i$$

Nun bauen wir noch $E_j = -\partial_j \Phi - \partial_{ct} A_j$ ein und erhalten:

$$\frac{1}{\mu} (\gamma^{im} \partial_m [\gamma^{jn} \partial_j A_n] - \gamma^{in} [\gamma^{jm} \partial_j \partial_m A_n]) = -\partial_{ct} \epsilon \gamma^{ij} \partial_j \Phi - \partial_{ct}^2 A_j + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^i \quad (3)$$

17.0.3 Lorenz-Eichung

Nutzen wir nun eine weitere Eichbedingung, die bei dynamischen Feldern oft (fast immer) zum Einsatz kommt:

Die Lorenz-Eichung:

$$\epsilon \partial_{ct} \Phi + \frac{1}{\mu} \gamma^{ij} \partial_i A_j = 0$$

Diese bauen wir nun in Gleichung 2 und 3 ein. Und erhalten: *Hier evtl. wirklich noch die explizite Rechnung einfügen, damit man's instant sieht*

$$\begin{aligned} \square \Phi &= \frac{4\pi}{\epsilon} \rho & | \\ \square A_i &= \frac{4\pi}{c} \mu \gamma_{ij} j^j & | \end{aligned}$$

17.0.4 D'Alembert

Mit dem D'Alembert Operator:

$$\square = \epsilon \mu \partial_{ct}^2 - \Delta$$

SO erhalten wir entkoppelte lineare partielle hyperbolische Differentialgleichungen, die mit der Lorenz-Eichung entkoppelt sind.

Die jeweilige Eichfunktion χ , kann man finden über:

$$\square \chi = \epsilon \mu \partial_{ct} \Phi + \gamma^{ij} \partial_i A_j$$

17.0.5 Ausbreitungsgeschwindigkeit

Die Lösungen zu diesen entkoppelten Gleichungen, haben Wellencharakter, welche sich mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c ausbreiten. In Materie, gilt allerdings:

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

Dabei ist $\sqrt{\epsilon \mu} = n$ der Brechungsindex.

17.1 Wellenfunktionen Lösen

Befinden wir uns im Vakuum, also setzen $\rho = j = 0$, dann erhalten wir die Wellen homogene PDEs.

$$\square \Phi = 0, \quad \square A_i = 0$$

Diese lassen sich mit dem Ansatz einer ebenen Welle lösen:

Ansatz:

$$\Phi, A_i \propto e^{\pm i(\omega t - k_i r^i)}$$

Setzt man dies in eine Gleichung ein, also:

$$\square e^{\pm i(\omega t - k_i r^i)} = \left[\left(\pm \frac{i\omega}{c} \right)^2 - \gamma^{ab} (\mp i k_a) (\mp i k_b) \right] e^{\pm i(\omega t - k_i r^i)} \quad |$$

$$\left[\underbrace{\left(\pm \frac{i\omega}{c} \right)^2 - k^2}_{\text{muss 0 werden}} \right] e^{\pm i(\omega t - k_i r^i)} = 0$$

Das ist also nur erfuehlt, wenn:

$$\underbrace{\omega = \pm ck}_{\text{Dispersionsrelation}}$$

Hierran erkennt man dann auch, dass sich die Potentiale mit Lichtgeschwindigkeit c bewegen und die Gruppen und Phasengeschwindigkeit der Wellen gleich sind.

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = c = \frac{d\omega}{dk} = v_{gr}$$

17.2 Wellengleichugn fuer die Felder

Beginnne wir mit dem Vakuum Fall:

$$\partial_i D^i = \partial_i B^i = 0$$

$$\epsilon^{ijk} \partial_j E_k = -\partial_{ct} B^i, \quad \epsilon^{ijk} \partial_j H_k = +\partial_{ct} D^i$$

Nun gehen wir wie folgt vor:

- Die gleichung nochmal rotieren $\epsilon^{lmn} \partial_m$
- Den Divergenzterm auf 0 fixieren
- Zeitableitung der jeweils anderen Gleichung einsetzen

So erhaelt man:

$$(\partial_{ct}^2 - \Delta) E_i = \square E_i \stackrel{\text{Vakkum}}{=} 0$$

$$(\partial_{ct}^2 - \Delta) H_i = \square H_i \stackrel{\text{Vakkum}}{=} 0$$

Warum den Divergenzterm =0, setzen wir wieder den Ansatz der ebenen Welle ein, so sehen wir wie bei den Potentialen, dass die Divergenz fuer solche Planewaves $e^{\pm i(\omega t - k_i r^i)}$ verschwinden

Hierraus kann man erkennen, dass die Amplitudne der Felder immer senkrecht auf der Ausbreitungsgeschwindigkeiten stehen muessen, und aus den Rotationstermen, sehen wir auch, dass E und B Feld immer senkrecht aufeinander stehen muessen.

17.2.1 Wellen-”vektor”

In dem Ansatz der ebenen welle $e^{\pm i(\omega t - k_i r^i)}$, erkennen wir die Phasenfunktion ϕ mit:

$$\phi = \omega t - k_i r^i = \text{const}$$

Setzen wir diese constant, so entspricht dies genau der Hessennormalform, und wir koennen interpretieren, dass diese Ebene, genau die Ebene mit konstanter Phase ist. In zeitlicher varianz, bewegt sich diese Fläche genau in die richtung der Flaechnennormale k_i , welches wir als Wellenvektor bezeichnen (obwohls eig, eine Wellenliniarform ist).

17.2.2 E-B-Wellen in Materie

Hier nur eine Kurze Zusammenfassung, da nicht so 100% wichtig und in VL auch nur Kurz drankam. Im Medium gilt nun:

$$D^i = \epsilon^{ij} E_j, \quad B^i = \mu^{ij} H_j$$

mit nichttrivialen Tensoren ϵ^{ij} und μ^{ij} .

Weiternoch kann man Ohm’s Law definieren, als

$$J^i = \sigma^{ij} E_j$$

Nun kann man etwas basteln:

1. Man nehme $\epsilon^{ijk} \partial_j E_k = -\partial_{ct} B^i$ und setzt dort $B \rightarrow H$
2. Man nehme $\epsilon^{ijk} \partial_j H_k = +\partial_{ct} D^i + \frac{4\pi}{c} J^i$ und setzt dort $D, J \rightarrow E$
3. Man nimmt die Zeitableitung des ersten schrittes.
4. Man nehmen die Rotation des zweiten schrittes.
5. Man setzt zusammen und baut mit $\gamma_{kl} \epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} = \gamma^{im} \gamma^{jn} - \gamma^{in} \gamma^{jm}$ um.

Man wird die sogenannte Telegraph Formel erhalten, also eien Wellengleichung fuer H mit einem Daempfungsterm:

$$(\epsilon \mu \partial_{ct}^2 - \Delta) H_i = \square H_i = -\frac{4\pi \sigma \mu}{c} \partial_{ct} H_i$$

17.2.3 Energietransport

Hier nur eine Kurze Zusammenfassung, da nicht so 100% wichtig und in VL auch nur Kurz drankam. Wir wissen;

$$w_{el} = \frac{E_i D^i}{8\pi}, \quad w_{mag} = \frac{H_i B^i}{8\pi}$$

Das weitere vorgehen zum herleiten:

- Starte mit $\epsilon^{ijk} \partial_j E_k = -\partial_{ct} B^i$ und $\epsilon^{ijk} \partial_j H_k = +\partial_{ct} D^i + \frac{4\pi}{c} J^i$
- Multipliziere MG3 mit H_i und MG4 mit E_i

- Dann das beide Subtrahieren.
- Die w_{el} und w_{mag} einsetzen $4\pi\partial_{ct}w_{el} = E_i\partial_{ct}D^i$
- Indices umbenennen $i \leftrightarrow k$, zyklisch vertauschen.
- Pointing Vektor definieren:

$$P^i = \frac{c}{4\pi}\epsilon^{ijk}E_jH_k$$

Erhaelt man man letztlich die wichtige Gleichung:

$$\partial_i P^i = -E_i j^i - \partial_t(w_{el} + w_{mag})$$

Man konnte nun wieder ueber en Volumen Integrieren und Satz von Gauss anwenden, um diese Formel in die Integralform zu uebergehen.

17.2.4 Impulstransport und Poyting Linear Form

Vorlesung am 27.11 – mus noch hier eingetragen werden Nur kurze Zusammenfassung **Poynting Linearform**

$$Y_i = \frac{1}{4\pi}\epsilon_{ijk}D^jB^k$$

Er beschreibt den Impuls assoziiert mit den Felden innerhalb eines Volumen. **Maxwell Stress Tensor**

$$T_i{}^j = \frac{1}{4\pi}\left(E_iD^j + H_iB^j - \frac{1}{2}\delta_i^j(E_kD^k + H_kB^k)\right)$$

Dieser Tensor ist fuer isotrope Medien symmetrisch.

$$tr(T) = T_i{}^i = -(w_{el} + w_{mag})$$

17.3 Zeitvariante Greenfunktionen

Wie man sich sicherlich vorstellen kann, gibt es bei der Veranderung einer Ladungsverteilung auch eine Veraenderung des Feldes im Abstand r , aber die Veraenderung wird im Feld nicht instantan auftreten sondern, erst nach der Zeitpunkt $t_r = \frac{r}{c}$. also genau der Zeit die es fuer Lichtgeschwindigkeit braucht, von der Ladungs, zum Feldbeobachtungspunkt r zu gelangen.

Nun nehmen wir einfach eine Lorenz-Eichung an, sodass dir die Wellengleichungen der Potentiale einfach geschrieben koennen als:

$$\square\Phi = 4\pi\rho, \quad \square A_i = \frac{4\pi}{c}\gamma_{ij}j^j$$

Moehcte man das zusammenfassen kann man das als die Helmholtz Differential Gelichung schreiben:

$$\square\Psi(\mathbf{r}, t) = (\partial_{ct}^2 - \Delta)\Psi(\mathbf{r}, t) = 4\pi q(\mathbf{r}, t)$$

Dabei ist Ψ erstmal eine allgemeine Wellengleichung (also hier eines der Beiden Potentiale Φ oder A_i) und q ist eien allgemeine Quelle (hier z.B ρ oder $\gamma_{ij}j^j$).

Diese Gleichung ist eine lineare Hyperbolische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit inhomogenität. Hier sollte die Lösung also wieder über eine Greensfunktion gegeben sein, die von den Abständen **und** von der Zeit Abhängt.

$$\exists G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$$

Und wieder muss es eine Faltungsrelation geben, sodass:

$$\square \Psi(\mathbf{r}, t) = 4\pi q(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \Psi(\mathbf{r}, t) = \int dV' \int dt' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') q(\mathbf{r}, t)$$

Wenn man auf der Rechten Seite hier, den $\square$ -Operator anwendet, sieht man, dass D'Alembert auf die Greensfunktion die Gestalt der Faltung mit Delta-shift-distributionen haben muss.

$$\square G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \stackrel{\text{solte aussehen}}{\approx} 4\pi \delta_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_D(t - t')$$

Nun ist die Idee wieder, dass wir in den Fourier Raum gehen;

$$\begin{array}{ccc} \square G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = 4\pi \delta_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_D(t - t') & & \\ \downarrow \text{Fourier Darstellung} \downarrow & \cdot & \downarrow \text{Fourier Darstellung} \downarrow \\ \clubsuit & = & \blacklozenge \end{array}$$

Beschäftigen wir uns zunächst mit der linken Seite $\clubsuit$. Wir wollen also D'Alembert auf G wirken lassen im Fourierraum:



$$\begin{aligned} \square G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= \square \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3k G(\omega, \mathbf{k}) e^{i\omega(t-t')} e^{ik_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^i}}_{G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') \text{ im Fourierraum}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3k G(\omega, \mathbf{k}) \square e^{i\omega(t-t')} e^{ik_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^i} \\ &= - \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3k \underbrace{\left[\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right]}_{\star} G(\omega, \mathbf{k}) e^{i\omega(t-t')} e^{ik_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^i} \end{aligned}$$

Die ⁴ bei dem 2π stammt von den 4 Dimensionen in denen wir transformieren, 3 für den Vektor $\mathbf{r}$ und eine für die Zeit t . Irgendwie ein ekliger Term, aber schauen wir uns nun die rechte Seite an:



$$\delta_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_D(t - t') \stackrel{\text{im Fourierraum}}{=} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3k e^{i\omega(t-t')} e^{ik_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^i}$$

Damit $\clubsuit$ und $\blacklozenge$ gleich sind, muss also gelten, dass $G(\omega, \mathbf{k})$ genau das Inverse von $\star$ ist, damit das 1 ergibt und (bis auf den Faktor 4π links und rechts das gleiche steht). Also können wir so die Greensfunktion im Fourierraum ablesen als:

$$G(\omega, \mathbf{k}) = 4\pi \frac{c^2}{\omega^2 - (ck)^2}$$

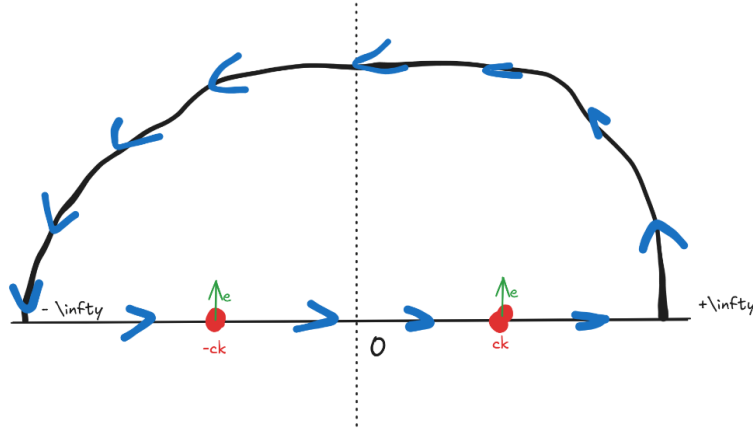


Figure 2: Integrationspfad

For Convenience Gruenden, wir nun abgekuerzt: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \Delta \mathbf{r}$ und $(t - t') = \Delta t$

Nun muessen wir die Greensfunktion, die wir nun im Fouerraum kennen, wieder zurueck transformieren, also muessen wir ausrechnen:

$$G(\Delta \mathbf{r}, \Delta t) = \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}}_{4 \rightarrow 3, \text{ weil } 4\pi \text{ in } G(\omega, \mathbf{k})} \int d\omega \int d^3 k \underbrace{\frac{c^2}{\omega^2 - (ck)^2} e^{i\omega \Delta t} e^{i\mathbf{k}_i \Delta \mathbf{r}^i}}_{\text{Omega integration}}$$

Hier sehen nun ein Problem, dass wir bei der ω integration zwei Polstellen bekommen, also die reine reelle Integration hier keine Moeglichkeit der Loesung vorsieht.

Also setzen wir die Funktion ins complexe fort und Integrieren ueber einen Halbkreis, dann verschieben wir die Pole um ein ϵ nach oben in den Halbkreis hinein und benutzen dann den Residuensatz:

Betrachten wir den Nenner, erkenne wir das wir diesen einfach Faktorisieren koennen zu:

$$(\omega^2 - (ck)^2) = (\omega + ck)(\omega - ck)$$

So koennen wir nun einfach die jeweiligen Resiuen ausrechnen:

Wir betrachten nur die ω Intergration, also als holomorphe Funktion fuer die Residuen auch nur alles t - abhaengige

$$\begin{aligned} \text{Res}_+ &= \lim_{\omega \rightarrow ck} (\omega - ck) \frac{c^2 e^{i\omega \Delta t}}{(\omega + ck)(\omega - ck)} = \frac{c}{2k} e^{ick \Delta t} \\ \text{Res}_- &= \lim_{\omega \rightarrow -ck} (\omega + ck) \frac{c^2 e^{i\omega \Delta t}}{(\omega + ck)(\omega - ck)} = -\frac{c}{2k} e^{-ick \Delta t} \end{aligned}$$

Wollen wir also nun das Integral bestimmen, berechnet sich das wie folgt:

$$\begin{aligned}\oint d\omega \frac{e^{i\omega\Delta t}}{\omega^2 - (ck)^2} &= 2\pi i (\text{Res}_+ + \text{Res}_-) \\ &= \frac{2\pi}{i} \left(\frac{c}{2k} e^{ick\Delta t} - \frac{c}{2k} e^{-ick\Delta t} \right) \\ &= \frac{2\pi c}{k} \sin(ck\Delta t)\end{aligned}$$

Dann wird das Integral fuer die ruecktransformierte zu:

$$G(\Delta \mathbf{r}, t) = \frac{c}{2\pi^2} \int d^3k \frac{\sin(ck\Delta t)}{k} e^{ik_i \Delta \mathbf{r}^i}$$

Am sinnvollsten wird man dieser Integration in Kugelkoordinaten herr.

$$d^3k = k^2 dk d\mu d\varphi$$

und waehlen die Symmetrie so, dass μ der Cosinus zwischen $\mathbf{k}$ und $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.
Dann wird das Integral zu:

$$G(\Delta \mathbf{r}, \Delta t) = \frac{c}{\pi} \int_0^\infty dk k \sin(ck\Delta t) \int_{-1}^{+1} d\mu e^{i\mu k \Delta r}$$

Dabei ist $\Delta r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$

Nun fuehrt man das $d\mu$ Integral aus, so erhaelt man den Vorfaktor $\frac{1}{\Delta r k i}$ und wieder eine e -Funktion, aber ausgewertet an $[\dots]_{-1}^{+1}$, dann erhalten wir wieder die Darstellung eines Sinus.

Erinnere: $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Zusammengesetzt erhalten wir:

$$G(\Delta \mathbf{r}, t) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{2c}{\pi} \int_0^\infty dk \sin(ck\Delta t) \sin(k\Delta r)$$

Nun nutzen wir den Faktor 2 vor dem Integral um die Integralgrenzen von $2 \int_0^\infty \sin(x) \sin(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x) \sin(y)$ Und schreiben wir die sinus Funktionen in e -Funktionen um, dann sehen wir folgendes

$$\begin{aligned}2 \int_0^\infty dk \sin(ck\Delta t) \sin(k\Delta r) &= \int_{-\infty}^\infty dk \sin(ck\Delta t) \sin(k\Delta r) \\ &= \frac{1}{(2i)^2} \int_{-\infty}^\infty dk (e^{ick\Delta t} - e^{-ick\Delta t}) \cdot (e^{ik\Delta r} - e^{-ik\Delta r}) \\ &= \frac{4\pi}{(2i)^2} \delta_D(c\Delta t + \Delta r) - 4\pi \delta_D(c\Delta t - \Delta r)\end{aligned}$$

Nun erinnere:

$$\int_{-\infty}^\infty dk e^{ikx} = 2\pi \delta_D(x)$$

Der letzte Schritt ist das c rauszuziehen, aus den Delta-Distributionen, und wieder zusammensetzen, dann canceln sich einige Terme und wir erhalten fuer die GreensFunktion.

$$G(\Delta \mathbf{r}, \Delta t) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[\underbrace{\delta_D \left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right)}_{\text{retardierte}} - \underbrace{\delta_D \left(t - t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right)}_{\text{avansierte}} \right]$$

Die avansierte Loesung macht aber erstmla keine Sinn, da es bedeuten wuerde dass eine Aenderung in der Zukunft, schon das Potential in der vergangeheit beeinfluss haette., diesen Termn schmeisen wir also erstmal wech.

Wie wir sehen, erhalten wir die Typische Green Funktion, fuer den Δ -Operator, geschmueckt mit den Delta-Distribution, die sicherstellt, dass Aenderugen in der Ladungskonfiguration, erst einen Einfluss nach der Propagationszeit r/c beim beobachter ankommt.

18 Special Relativity

18.1 Lorenztrafos

Tipps

Lorentzinvarianz-prueffen Es kommen nur Lorenzobjekte vor (4rer-Obejkte mit Indices) -i. Wenn diese vollstaendig kontrahieren, also zum Skalar werden ist die groesse Lorentzinvariant.

Eichinvarianz pruefen Setze einfach $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial_\mu$.

Tipps

Indice vertauschen

Sobald ein Indice ein einem Term doppelt vorkommt, also vollstaendig kontrahiert, kann ich den benennen wie ich will, ich darf nur keine freien Indices (also die linksund rechts vom = einmal auftauchen) vertauschen. Also:

$$p_j = \partial_i A^i g_j \text{ ist gleich zu } p_j = \partial_q A^q g_j$$