

HöMa3 Zusammenfassung

Inhaltsverzeichnis

1 'Grundlagen' und nice to know:	4
1.1 Taylor:	4
1.2 Integrale:	4
1.2.1 Trick:	4
1.3 Zylinder- und Kugelkoordinaten:	5
1.3.1 Zylinderkoordinaten:	5
1.3.2 Kugelkoordinaten:	5
1.4 Sinus-Identitäten	6
1.5 Poisson-Klammer und Kommutator:	6
1.5.1 Poisson-Klammer:	6
1.5.2 Kommutator:	6
2 Komplexe Analysis:	7
2.1 Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie:	7
2.2 Cauchy-Riemann	7
2.3 Analytische Funktionen:	7
2.3.1 Analytische Fortsetzung:	8
2.3.2 Laurent-Reihe:	8
2.4 Kurvenintegrale:	9
2.5 Cauchy:	9
2.5.1 Cauchys Theorem:	9
2.5.2 Cauchys Integralformel:	9
2.5.3 Mittelwertseigenschaft:	9
2.6 Residuen:	10
2.7 Meromorphie:	10
2.8 Reelle Polynome:	10
2.8.1 Form des Integrals:	10
2.8.2 Verschwinden des hinzugefügten Kreisbogens:	10
2.8.3 Residuenrezept:	11
2.9 Reelle Pole:	11
2.10 Steepest descent (+Asymptotik):	11
2.10.1 maximum modulus principle:	11
2.10.2 Einschub: Laplace'sche Methode:	11
2.10.3 Sattelpunktmethode:	12
3 Hilberträume:	13
3.1 Definition:	13
3.1.1 Vollständigkeit:	13
3.1.2 Bedeutung:	13
3.2 Skalarprodukt/inneres Produkt:	13
3.3 l/L-space:	14
3.4 Gram-Schmidt:	14
3.5 Ungleichungen:	14
3.5.1 Dreiecksungleichung:	14
3.5.2 Hölder-Ungleichung:	14
3.5.3 Cauchy-Schwartz-Ungleichung:	14
3.5.4 Parallelogramm-Gleichung:	14
4 Operatoren:	15
4.1 Definitionen:	15
4.1.1 Linearität:	15
4.1.2 Eigenwertgleichung:	15
4.1.3 Operatornorm:	15
4.1.4 Selbstadjungiert:	15
4.2 Spektraltheorie:	15

4.2.1	Spektrum:	15
4.2.2	Resolventenmenge:	15
4.2.3	Resolventenabbildung:	16
4.2.4	Wichtige Formeln:	16
4.2.5	Spektralsatz $\dim(X)=\infty$:	17
5	Lebesgue Integrale:	18
5.1	'Funktionen':	18
5.1.1	Lebesgue:	18
5.1.2	Zählfunktion (\mathcal{I} -maß) auf \mathbb{R} :	18
5.1.3	Dirac auf \mathbb{R} :	18
5.1.4	Simple function:	18
5.1.5	Compact support:	18
5.1.6	Bump Funktion:	18
5.2	Lebesgue-Integral:	19
5.2.1	Satz der dominierten/majorisierten Konvergenz:	19
5.2.2	Monotone Konvergenz:	19
5.2.3	Fubini:	19
5.2.4	Beispiele:	20
6	Schwartz-Raum:	21
6.1	Definition:	21
6.2	Beispiele:	21
7	Fourier:	22
7.1	Fourier-Reihe:	22
7.1.1	Definitionen:	22
7.1.2	Parsevals Identität:	22
7.2	Fourier-Transformation:	22
7.2.1	Definitionen:	22
7.2.2	Beispiele:	22
7.2.3	Regeln:	23
7.2.4	Parsevals Theorem:	23
7.2.5	Zeit-Verschiebung:	23
7.2.6	Skalierung:	23
8	Distributionen:	24
8.1	Verschiedene Arten:	24
8.1.1	Temperierte Distributionen:	24
8.1.2	Dirac-Distribution:	24
8.1.3	Heaviside-Distribution:	24
9	Fundamentallösungen:	25
9.1	Adjungierung:	25
9.2	Lösungsvorgang:	25
9.2.1	Homogen:	25
9.2.2	Inhomogen:	25
9.2.3	Anleitung:	25
9.3	Beispiele:	25
9.3.1	reines Zeitableitungspolynom:	25
9.3.2	harm. Oszillator:	25
9.3.3	Laplace:	26
9.3.4	Laplace (1D):	26
9.3.5	Poisson eq.:	27
9.3.6	d'Alembert:	27
9.4	Green's functions:	27

10 Differentialgleichungen:	29
10.1 Fourier:	29
10.2 Initial value problems + Linear ODEs:	29
10.2.1 Picard-Lindelöf:	29
10.2.2 Flows:	29
10.2.3 Folge:	30
10.2.4 Wronskian:	31
10.2.5 Lösung lin. DGL:	31
10.3 Charakteristisches Polynom:	33
10.4 DGL-n-Ordnung:	33
10.5 Grundlegende Lösungsschritte:	33
10.5.1 Separation der Variablen:	33
10.5.2 Variation der Konstanten:	33
10.5.3 Separationsansatz:	33
10.6 Sturm Liouville:	34
10.7 Bedingungen:	34
10.7.1 Anfangsbedingungen:	34
10.7.2 Randbedingungen:	34
10.8 Potenzreihen:	35
10.9 Partial differential equation (PDE):	35
11 Quantenmechanik:	36
11.1 Grundlagen:	36
11.1.1 Projektion:	36
11.1.2 Erwartungswert:	36
11.1.3 Wahrscheinlichkeit:	36
11.1.4 Spektrum:	36
11.1.5 Entartung:	36
11.1.6 Definitionen:	36
11.1.7 Normierung:	36
11.1.8 Bahndrehimpulsoperator:	36
11.2 Verschiedene Beispiele:	36
11.2.1 Harmonischer Oszillator:	36
11.2.2 Partikel 1D Box:	37
11.2.3 Potentialtopf:	37
11.2.4 Potential:	37
11.2.5 Potentialstufe(?), aber mit Crack:	37

1 'Grundlagen' und nice to know:

1.1 Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

$$(a+b)^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} a^p b^{k-p}$$

1.2 Integrale:

$$\int \sin^3(x) dx = \int \sin(x) \sin^2(x) dx = \frac{1}{3} \cos^3(x) - \cos(x)$$

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x))$$

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x))$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = x - \arctan(x)$$

1.2.1 Trick:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx \quad , \quad \text{da } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i \sin(x)}{1+x^2} dx = 0$$

Es bietet sich also an, die Antisymmetrie von Funktionen ($f(-x) = -f(x)$) beim Integrieren auszunutzen.

1.3 Zylinder- und Kugelkoordinaten:

1.3.1 Zylinderkoordinaten:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$dV = r dr d\phi dz$$

$$\nabla = \bar{e}_r \partial_r + \frac{1}{r} \bar{e}_\phi \partial_\phi + \bar{e}_z \partial_z$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1.3.2 Kugelkoordinaten:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix} = r \bar{e}_r$$

$$\bar{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \bar{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \bar{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$dV = r \sin(\theta) dr d\phi d\theta$$

$$\nabla = \bar{e}_r \partial_r + \frac{1}{r} \bar{e}_\theta \partial_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \bar{e}_\phi \partial_\phi$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Ansatz für Herleitung:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial r} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_r = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial r} \right) / \left(\left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial r} \right| \right)$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta} \right| = r \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_\theta = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta} \right) / \left(\left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta} \right| \right)$$

...

$$\bar{e}_{\zeta_i} \bar{\nabla} = \frac{1}{\left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial \zeta^i} \right|} \frac{\partial}{\partial \zeta^i}$$

1.4 Sinus-Identitäten

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{i} \sinh(ix)$$

$$\sin(x) \approx x$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cosh(ix)$$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos[\frac{1}{2}(\alpha + \beta)] \cos[\frac{1}{2}(\alpha - \beta)]$$

$$A_0 \cos(\omega_0 t - \delta_0) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)$$

1.5 Poisson-Klammer und Kommutator:

1.5.1 Poisson-Klammer:

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial p}$$

1.5.2 Kommutator:

$$[A, B] = AB - BA$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

2 Komplexe Analysis:

2.1 Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie:

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ komplex diffbar $\iff \exists \omega \in \mathbb{C} : f(z_0 + \delta) - f(z_0) = \omega\delta + o(|\delta|)$
 (mit $\delta \in \mathbb{C}, \delta \rightarrow 0$ und $a(\delta) = o(b(\delta)) \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{a(\delta)}{b(\delta)} = 0$)
 $\Rightarrow f'(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta) - f(z)}{\delta}$

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph $\iff f$ auf Ω komplex diffbar $\wedge z \mapsto f'(z)$ stetig auf Ω
 $\iff f$ analytisch: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ (innerhalb des Konvergenzradius konvergieren)

Für die meisten Funktionen ist es relativ einfach zu erkennen, ob bzw. auf welchem Gebiet sie holomorph sind. Dafür müssen Polstellen/Singularitäten gesucht werden.

Beispiele:

- a) $f(z) = \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0}$ besitzt eine **hebbare Singularität** bei $z = z_0$
- b) $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n}$ besitzt ein **Pol n-ter Ordnung** bei $z = z_0$
- c) $f(z) = e^{\frac{1}{z - z_0}}$ besitzt eine **wesentliche Singularität** bei $z = z_0$

2.2 Cauchy-Riemann

Sei $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ mit $z = x + iy$, dann lassen sich unter der Annahme, dass das Limit von $f(x, z)$ unabhängig davon ist, von welcher "Richtung" (im Sinne der komplexen Ebene) man sich annähert, die Cauchy-Riemann-Gleichungen aufstellen:

Reelle Achse:

Imaginäre Achse:

$$\lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{z_0} \quad = \quad \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{z_0} \quad \Rightarrow \quad i \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{z_0} = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{z_0}$$

Und damit die Cauchy-Riemann-Gleichungen:

$$\boxed{\partial_x U(x, y) = \partial_y V(x, y) \quad \wedge \quad \partial_x V(x, y) = -\partial_y U(x, y)}$$

Weiter gilt:

- Cauchy-Riemann-Eq. $\iff \partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) f = 0$
- Funktionen, welche die C-R-Eq an einem Punkt z_0 **nicht** erfüllen, sind (an diesem Punkt) nicht komplex differenzierbar und somit auf keinem Gebiet $\Omega \ni z_0$ holomorph.
- Gelten die C-R-Eq in einer offenen Umgebung, so ist f dort holomorph (bzw. wenn f komplex diffbar ist und die C-R-Eq mit stetigen partiellen Ableitungen erfüllt).

2.3 Analytische Funktionen:

Es wurde bereits kurz erwähnt, dass Analytizität und Holomorphie äquivalent sind: Lässt sich eine Funktion um einen Punkt z_0 'tayloren', so besitzt die Funktion (im Allgemeinen) in dessen Umgebung keine Pole.

Die Funktion lässt sich dann wie folgt schreiben:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad , \quad a_n = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$$

2.3.1 Analytische Fortsetzung:

Am Einfachsten lässt sich das Vorgehen für die analytische Fortsetzung (sogesehen eine Taylorentwicklung für den Teil der Funktion, der an dem ausgewählten Punkt holomorph ist) an zwei Beispielen erklären. Hierbei kann die Definition der geometrischen Reihe $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ (welche für $|x| < 1$ konvergiert) hilfreich sein.

$$\begin{aligned}\underline{\text{Um } z_0 :} \quad \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{(1-z_0)+(z_0-z)} \\ &= \frac{1}{(1-z_0)} \frac{1}{1-(\frac{z-z_0}{1-z_0})} \\ &= \frac{1}{(1-z_0)} \sum_{k \geq 0} \frac{(z-z_0)^k}{(1-z_0)^k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\text{Um } z_0 = 0 :} \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{2-z} &= \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{z}{2}\right)^k\end{aligned}$$

2.3.2 Laurent-Reihe:

Um eine Funktion vollständig zu zerlegen reicht es oft nicht aus, nur ihren analytischen ('gut taylorbaren') Teil zu behandeln.

Die **Laurent-Reihe** ist im Allgemeinen wie folgt definier

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}$$

Hierbei wird der Teil mit $n < 0$ als **Hauptteil** (welcher für $z = z_0$ divergiert) und der Teil mit $n \geq 0$ als **Nebenteil** (welcher für $z \in B_{r_0}(z_0)$ konvergiert) bezeichnet.

Im weiteren Verlauf der Vorlesung wird sich herausstellen, dass der Wert c_{-1} für die komplexe Analysis von grosser Bedeutung ist.

Den Hauptteil bestimmt man beispielsweise über eine Partialbruchzerlegung oder Übertragung bekannter Strukturen.

Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2}{x^2 + 2x + 1} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2} - \frac{2x+1}{(x+1)^2} \\ &= 1 - \frac{2x+1}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{(x+1)^2} &= \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} \quad | \cdot (x+1)^2 \\ 2x+1 &= A(x+1) + B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1) \quad 2x &= Ax \\ 2) \quad 1 &= A + B\end{aligned}$$

$$\implies f(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

Übertragung:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

2.4 Kurvenintegrale:

Für ein Integral entlang einer geschlossenen Kurve, muss eine Funktion gefunden werden, welche den gewünschten Weg definiert.

Für eine stetige Funktion $f(z)$ muss also eine stetig diffbare (und ggf. simple und geschlossene ($\gamma(a) = \gamma(b)$)) Funktion ' $z \rightarrow \gamma(t)$ ' gefunden werden, welche den Integrationsweg definiert.

Mit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

Das Integral kann hierbei auch in mehrere Teile mit verschiedenen Funktionen γ aufgeteilt werden:

Wenn man **beispielsweise** auf geradem Weg von $z=-1$ zu $z=i$, dann von $z=i$ zu $z=1$ und zuletzt von $z=1$ zu $z=-1$ geht, ist es sinnvoll, das integral in 3 Teile aufzuteilen. Der erste Teil kann hierbei durch $\gamma_1(t) = (t - 1) + it$ mit $t \in [0, 1]$ definiert werden. Hierbei spielt die Umdrehungsrichtung (und damit Vorzeichen) eine grosse Rolle.

Bei manchen Wegen bzw. Funktionen lässt sich einiges an Zeit sparen, falls man die Polstellen kennt, die sich INNER-HALB des Integrationspfads befinden. In diesem Fall kann der **Residuensatz** für alle eingeschlossenen Pole verwendet werden.

Spezialfall: Kreiskurve

Für eine Kurve $C_R(z_0)$ bietet sich folgende Substitution an: $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}, \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$

2.5 Cauchy:

2.5.1 Cauchys Theorem:

(= keine Polstellen innerhalb der Kurve)

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf $\bar{A} \subset \Omega$, A offen (und \bar{A} kompakt), ∂A geschlossen

$$\int_{\partial A} f(z) dz = 0$$

Anders formuliert:

- f holomorph, einfach zusammenhängendes Gebiet (bildlich erklärt: jeder geschlossene Weg in Menge kann auf ein Punkt zusammengezogen werden/ es gibt keine (nicht beinhalteten) 'Inseln' in der Menge), γ geschlossen

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Wichtiges Beispiel:

$$\int_{C_R(0)} z^n dz = 2\pi i \delta_{n,-1}$$

2.5.2 Cauchys Integralformel:

- mit den gleichen Bedingungen wie für Cauchys Theorem gilt $\forall z_0 \in A$:

$$\Rightarrow a_0(z_0) = f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(w)}{(w - z_0)} dw$$

(Hierbei kann ∂A beispielsweise der Rand eines Kreises (also $C_R(z_0)$) sein)

Hieraus folgt auch:

$$\Rightarrow a_n(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

2.5.3 Mittelwertseigenschaft:

Mit $z \rightarrow z_0 + re^{i\theta}$ folgt direkt: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$

2.6 Residuen:

(nicht holomorph, Pol in Kurve)

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion in einer offenen, simply connected Menge $U \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in U$. Dann gilt für ein Pol z_0 der Ordnung n :

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z - z_0)^n f(z))$$

Weiter gilt für die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit den Polen $z_k \in B_R(z_0) \subset U$ ($\partial B_R(z_0) = C_R(z_0)$):

$$\int_{C_R(z_0)} f(z) dz = 2\pi i \sum_k I_k \text{Res}(f, z_k)$$

Anmerkung:

I_k gibt an, wie oft und in welche Richtung die Polstellen umkreist wurden. Hierbei bekommt e^{ix} ein positives Vorzeichen (gegen den Uhrzeigersinn) und e^{-ix} ein negatives.

2.7 Meromorphie:

Definitionen für Meromorphie:

- $S \subset U$ diskret, $f : U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und bei jedem $s \in S$ ein Pol $\Rightarrow f$ **meromorph** auf U
- $f, \frac{1}{f}$ oder beide holomorph

Sei $f(z)$ meromorph mit der Polstelle z_0 und $g(z)$ holomorph (bei z_0), dann gilt:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = a_{-1}$$

2.8 Reelle Polynome:

Für Integrale über die reelle Achse muss darauf geachtet werden, dass beim Schliessen des Integrationswegs über die komplexe Ebene der hinzugefügten Halbkreisbögen verschwindet. Darauf hinaus muss auf die Form der Funktion und auf die Lage der Pole geachtet werden.

2.8.1 Form des Integrals:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{n=1}^N \text{Res}(f, z_{n+}) & \alpha > 0 \quad \text{schliessen übere obere Halbebene} \\ -2\pi i \sum_{n=1}^N \text{Res}(f, z_{n-}) & \alpha < 0 \quad \text{schliessen übere untere Halbebene} \end{cases}$$

2.8.2 Verschwinden des hinzugefügten Kreisbogens:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{H_{R+}} f(z) dz$$

Große Abschätzung:

$$\rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{H_{R+}} f(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{H_{R+}} |f(z)| dz \rightarrow 0$$

mit $z \rightarrow \gamma(t) = Re^{it}$:

$$\Rightarrow \left| \int_{H_{R+}} f(z) dz \right| \leq \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, \pi]} \left| R f(Re^{it}) \right| \leq \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left| R f(R) \right| \rightarrow 0$$

Hierzu bietet es sich an 'Sample 3, Exercise 1' im HöMa Skript anzuschauen.

2.8.3 Residuenrezept:

Folgende Schritte bieten sich an, um Integrale mit dem Residuensatz zu lösen. Das 'Rezept' stellt jedoch noch keine mathematische Begründung für dessen Anwendbarkeit dar.

0) Ausgangspunkt:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx, \quad f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \deg(Q) > \deg(P)$$

1) Konvergenz:

- a) $\nexists z \in \mathbb{R}$, s.d. $Q(z) = 0$ (also keine reellen Polstellen)
- b) $\alpha \in \mathbb{R}$
- c) $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$
- oder:
- b*) $\alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$
- c*) $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$

2) Berechnung mit Residuensatz:

- a) $\alpha = 0$: Entweder untere oder obere Halbebene schliessen (bei unterer noch '-' Vorfaktor)
- b) $\alpha \neq 0 : \alpha > 0 \rightarrow \mathbb{H}_+, \alpha < 0 \rightarrow \mathbb{H}_-$
- c) $I = \pm 2\pi i \sum_{\text{Pol } z \in \mathbb{H}_{+/-}} \text{Res}(f, z)$

2.9 Reelle Pole:

Befindet sich ein Pol auf der Reellen Achse (/dem Integrationspfad), so muss er zunächst ein bisschen (ϵ) verschoben werden.

Beispiel:

$$\frac{1}{w^2 - p^2} e^{-iwt} = \begin{cases} t > 0 \Rightarrow \text{Im}w < 0 \\ t < 0 \Rightarrow \text{Im}w > 0 \end{cases}$$

$$\hat{G}^{ret} = \frac{1}{(w + i\epsilon)^2 - p^2}, w = -i\epsilon \pm |p|$$

$$\hat{G}^{adv} = \frac{1}{(w - i\epsilon)^2 - p^2}, w = +i\epsilon \pm |p|$$

$$\hat{G}^{Feyn} : w = \pm i\epsilon \pm |p|$$

2.10 Steepest descent (+Asymptotik):

2.10.1 maximum modulus principle:

$f : U \rightarrow \mathbb{C}$ nicht konstante holomorphe Funktion in U (open, simply connected).

Dann: $|f(z)|$ hat kein Maximum im inneren von U :

$\forall z \in U \wedge \forall \delta > 0, \exists \omega \in B_\delta(z) \cap U$ s.t. $|f(\omega)| > |f(z)|$
 → supremum (max.) kommt nur auf dem Rand ∂U vor

2.10.2 Einschub: Laplace'sche Methode:

$$I(x) = \int_a^b e^{-xf(t)} g(t) dt$$

f stetig und globales, eindeutiges Minimum bei $t_0 \in (a, b)$ für $t \neq t_0 : f(t) > f(t_0)$.
 Weiter sei $f \in C^k$, $k \geq 3$, in Umgebung von t_0 , $f''(t_0) > 0$.

Dazu sei g beschränkt auf $[a,b]$, $g(t_0) \neq 0$: $\exists A > 0, \eta > 0$ s.d. $|g(t) - g(t_0)| < A|t - t_0|^2 \forall t \in (a, b)$

Dann:

$$I(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{xf''(t_0)}} e^{-x^2 f''(t_0)} g(t_0) (1 + \Theta(1)) \quad (\text{für } x \rightarrow \infty)$$

Bemerkung:

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}f''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots \quad (\text{mit } f'(t_0) = 0 \text{ (Minima)})$$

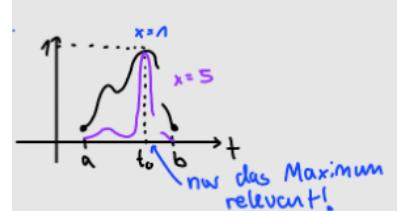
$e^{-x^2 f''(t)}$ Maxima bei $f(t)$ Minima

→ das am stärksten gewichteten

→ dann Taylor

→ $g(t_0)$ setzen

→ dann wieder auf ganzem Bereich integrieren



2.10.3 Sattelpunktmethode:

$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $v,u \in \mathbb{R}$, f holomorph

Orthogonalität: $\nabla u \nabla v = 0$

Kritische Punkte:

$$\partial_z f \Big|_{z=z_c} = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)f \Big|_{z=z_c} = 0 \xrightarrow{\partial_{\bar{z}} f = 0 \text{ (holom.)}} \partial_x u = \partial_y v = \partial_x v = \partial_y u = 0$$

→ Kritischer Punkt von f ist Sattelpunkt für $\operatorname{Re}(f)=u$ und $\operatorname{Im}(f)=v$

Hessian:

$$H_u = \begin{pmatrix} \partial_x^2 u & \partial_x \partial_y u \\ \partial_y \partial_x u & \partial_y^2 u \end{pmatrix} \xrightarrow{CR-eq.} \begin{pmatrix} \partial_x^2 u & -\partial_x^2 v \\ -\partial_x^2 v & -\partial_x^2 u \end{pmatrix}$$

$$H_v = \begin{pmatrix} \partial_x^2 v & \partial_x \partial_y v \\ \partial_y \partial_x v & \partial_y^2 v \end{pmatrix} \xrightarrow{CR-eq.} \begin{pmatrix} \partial_x^2 v & \partial_x^2 u \\ \partial_x^2 u & -\partial_x^2 v \end{pmatrix}$$

...(script p. 191 ff.)

Integral:

$I(z) = \int_C dz e^{f(z)}$, $f(z) = u + iv$ holom. (da wo holomorph alle Integrale über Wege gleichwertig) $\Rightarrow \nabla u \nabla v = 0$
 \Rightarrow Kurven $v(z) = \text{const.}$ (\rightarrow stationäre Phase = steilster Weg) sind Gradientenlinien von $u(z)$

↪ neuer Weg: $C \rightarrow C_{sd}$, wo $v(t) = \text{const.} = v_0$

$$I(x) = e^{iv_0} \int_{C_{sd}} dz e^{u(z)}$$

\Rightarrow Laplace-Methode verwenden (Taylor um x_c + Gauss-Integral)

$$\int dx e^{-h(x)} = e^{-h(x_c)} \int dy e^{-\frac{1}{2}h''(x_c)y^2 - \Theta(y^3)} \approx e^{-h(x_c)} \sqrt{\frac{2\pi}{h''(x_c)}} (1 + \dots)$$

3 Hilberträume:

3.1 Definition:

normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$, mit X in Normtopologie **vollständig** (jede Cauchy-Folge konvergiert in der von der Norm induzierten Metrik) und einer zusätzlichen Struktur: **Skalarprodukt (induziert Norm)**

3.1.1 Vollständigkeit:

Für eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen eines metrischen Raums (M, d) , (wobei oft $d(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\|$), gilt:

Cauchy-Folge: $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \epsilon$

Konvergiert: $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \epsilon$, wobei $x \in M$.

Vollständigkeit:

Jede Cauchy-Folge konvergiert.

Hierbei ist es wichtig zu kontrollieren, dass der Grenzwert der Folge auch wirklich in der Menge selbst liegt.

Außerdem gilt: Konvergent \Rightarrow Cauchy-Folge

3.1.2 Bedeutung:

Verknüpfungen:

- oft + und ·

Für +:

- Neutrales Element (0)
- Inverses Element (-v)

Für ·:

- Neutrales Element (1)
- Verknüpfung mit 0 (entweder 0 aus VR oder 0 aus Körper) führt zu 0 (aus Vektorraum bzw. Hilbertraum)

Norm $\|\cdot\|$:

- $\|v\| \geq 0$
- $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$
- $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

3.2 Skalarprodukt/inneres Produkt:

$$\Rightarrow \langle z|w \rangle = \sum_{\mu=1}^D \bar{z}^\mu w^\mu$$

Teilweise wird die komplexe Konjugation auch auf das zweite Argument definiert.

Darüber hinaus ist nicht jedes innere Produkt/Skalarprodukt über eine Summe der Komponenten definiert. Im Verlauf der Vorlesung wird noch die Definition über ein Integral auftreten. Wichtig ist es auch, im Kopf zu behalten, dass Normen im Allgemeinen nicht nur in Form einer Summe oder eines Integrals auftreten können.

- $|\langle x|y \rangle| < \infty$ (wohldefiniert)
- $\langle x|x \rangle \geq 0$ (positiv)
- $\langle x|x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (non-degenerate)
- $\langle x|y \rangle = \overline{\langle y|x \rangle}$ (hermitesch)
- $\langle x|\alpha u + \beta v \rangle = \alpha \langle x|u \rangle + \beta \langle x|v \rangle$
- $\langle \alpha x + \beta y|u \rangle = \bar{\alpha} \langle x|u \rangle + \bar{\beta} \langle y|u \rangle$ (Sesquilinearität)

3.3 l/L-space:

l-space:	L-space:
$\sum_{t_n}^{\infty}$	$\rightarrow \frac{f(x)}{\int}$
$t_n^p = \{(t_n)_{n \in \mathbb{N}} : t_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} t_n ^p < \infty\}$	$\rightarrow L^p(X, \mathbb{K}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ messbar}, \int_X f(x) ^p dx < \infty\}$
$\ x\ _p = (\sum_{n=1}^{\infty} t_n ^p)^{\frac{1}{p}}$	$\rightarrow \ f(x)\ _p = (\int f(x) ^p dx)^{\frac{1}{p}}$

$$l^\infty = \{(t_n)_{n \in \mathbb{N}} : t_n \in \mathbb{K}, (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt}\}, \text{ mit } \| (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \|_\infty = \sup\{|t_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

3.4 Gram-Schmidt:

Ziel hierbei ist es, aus einer gegebenen Menge an Elementen eine orthonormale Basis zu berechnen. So kann das erste Element (im normierten Zustand) als erstes Basiselement verwendet werden. Darauf aufbauend werden die dazu unabhängigen Anteile des nächsten Elements (im normierten Zustand) zum nächsten Basiselement. Dies wird dann solange weitergeführt, bis jedes gegebene Element angepasst wurde.

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= x_{k+1} - \sum_{l=1}^k \langle e_l | x_{k+1} \rangle e_l \neq 0 \\ e_{k+1} &= \frac{f_{k+1}}{\|f_{k+1}\|} \Rightarrow \langle e_{k+1} | e_l \rangle = 0 \quad \forall l \in \{1, \dots, k\} \end{aligned}$$

3.5 Ungleichungen:

3.5.1 Dreiecksungleichung:

$$\boxed{\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|}$$

Beweisskizze:

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \langle x + y | x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x | y \rangle + \langle y | x \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x | y \rangle) \end{aligned}$$

mit: $|\langle x | y \rangle| = \sqrt{\operatorname{Re}(\dots)^2 + \operatorname{Im}(\dots)^2} \geq \operatorname{Re}(\langle x | y \rangle)$

$$|\langle x | y \rangle| = \|x\| \|y\| |\cos(\theta)| \leq \|x\| \|y\|$$

folgt: $\|x + y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\|$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

3.5.2 Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \text{a) } x \in l^1, y \in l^\infty &\Rightarrow xy \in l^1 \text{ und } \boxed{\|xy\|_1 \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty} \\ \text{b) } 1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, x \in l^p, y \in l^q &\Rightarrow xy \in l^1 \text{ und } \boxed{\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q} \end{aligned}$$

3.5.3 Cauchy-Schwartz-Ungleichung:

$$\boxed{|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|}$$

3.5.4 Parallelogramm-Gleichung:

$$\boxed{\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2}$$

Beweisskizze:

$$(\langle x | x \rangle + \langle y | y \rangle + \langle x | y \rangle + \langle y | x \rangle) - \langle x | y \rangle - \langle y | x \rangle + \langle x | x \rangle + \langle y | y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

4 Operatoren:

4.1 Definitionen:

4.1.1 Linearität:

$$\begin{aligned} L(X, Y) &:= \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ ist linear und stetig}\} \\ \rightarrow A, B \in L(X, Y), \alpha, \beta \in \mathbb{K} &: (\alpha A + B)(x) = \alpha Ax + Bx \\ \rightarrow \boxed{A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)} \end{aligned}$$

4.1.2 Eigenwertgleichung:

$$\boxed{Ax = \alpha x}$$

4.1.3 Operatornorm:

$$\|A\|_{op} = \sup_{x \in V} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Ausserdem gilt mit $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z) \Rightarrow ST \in L(X, Z)$:
 $\|ST\|_{op} \leq \|S\|_{op} \|T\|_{op}$

Beschränktheit:

Sei T linearer Operator. Dann gilt:

T beschränkt $\Leftrightarrow T$ stetig

T beschränkt \Leftrightarrow mit $M \in \mathbb{R}$: $\exists M > 0 \forall x \in X : \|Tx\| \leq M \cdot \|x\|$

Beispiel:

Sei $T : d \rightarrow d$, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\frac{1}{n^2} t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $n \neq 0$ ein (linearer) Operator.

Dann gilt für die Operatornorm (mit Supremumsnorm):

$$\begin{aligned} \|T(t_n)_{n \in \mathbb{N}}\| &= \left\| \left(\frac{1}{n^2} t_n \right)_{n \in \mathbb{N}} \right\| \leq 1 \cdot \|(t_n)_{n \in \mathbb{N}}\| \\ \|T\|_{op} &= 1 = M \end{aligned}$$

4.1.4 Selbstdadjungiert:

Sei A ein linearer, beschränkter Operator.

$$\text{Im Allgemeinen gilt dann: } \boxed{\langle Ax | y \rangle = \langle x | A^\dagger y \rangle}$$

Gilt nun weiter: $A = A^\dagger$ und $D(A) = D(A^\dagger)$ (wobei $D(A)$ der Definitionsbereich von A ist), so bezeichnet man den Operator als **selbstdadjungiert**.

Damit folgt für selbstdadjugierte Operatoren: $\boxed{\langle Ax | y \rangle = \langle x | Ay \rangle}$

4.2 Spektraltheorie:

Sei X Banachraum und $A \in L(X)$ linearer Operator.

4.2.1 Spektrum:

$$\boxed{\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) = \{\text{Eigenwerte}\}}$$

4.2.2 Resolventenmenge:

$$\boxed{\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \{\text{Eigenwerte}\}}$$

$$= \{z \in \mathbb{C} : \exists (z - A)^{-1} \in L(X)\} \neq \emptyset$$

4.2.3 Resolventenabbildung:

$$R_A(z) = (z - A)^{-1}$$

Alternativ wird sie auch mit $(A - z)^{-1}$ definiert. $R_A(z)$ ist holomorph auf $\rho(A)$.

Die Inverse (in endlichen Dimensionen) lässt sich beispielsweise über LGS oder die Cramersche Regel bestimmen.

LGS:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} z - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & z - a_{22} & -a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & z - a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] (z - A)^{-1}$$

Cramersche Regel:

$$(z - A)^{-1} = \frac{(-1)^{i+j}(z - A)_{ji}^*}{\det(z - A)}$$

Hierbei stellt $(z - A)_{ji}^*$ die Unterdeterminante von $(z - A)$ dar, bei der die j-Zeile und i-Spalte gestrichen wurde.

4.2.4 Wichtige Formeln:

Folgendes wird zum Teil Zusatz zum besseren Verständnis des Nutzens des Spektralsatzes sein.

Mit: $X \subset BR$, $\dim(X) < \infty$, $A, B \in L(X)$, $\forall z \in \rho(A) \cap \rho(B)$

Erste Resolventengleichung: $R_A(z') - R_A(z) = (z - z')R_A(z)R_A(z')$

Zweite Resolventengleichung: $R_B(z) - R_A(z) = R_A(z)(B - A)R_B(z)$

Lemma:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} R_A(z) dz \\ A &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} z R_A(z) dz \\ P(A) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} P(z) R_A(z) dz \quad (\text{Polynome}) \end{aligned}$$

Laurentreihe $R_A(z)$:

$$\begin{aligned} R_A(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n (z - \lambda)^n \\ R_A(z \rightarrow \xi + \lambda) &= R_A(\lambda + \xi) = R(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n \xi^n \\ \Rightarrow A_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r_0} \xi^{-n-1} R(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$1) P = A_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int R(\xi) d\xi$$

- Projektor: $P_k^2 = P_k$

- Residuum

- $\sum_{k=1}^l P_k = 1$

- $P_k P_{k'} = \delta_{kk'} P_k$

- $A = A^\dagger \Rightarrow P_k = P_k^\dagger$

$$2) D = A_{-2} = \frac{1}{2\pi i} \int \xi R(\xi) d\xi$$

- $D^m = 0$ (nilpotent)

- Pole höheren Grades (für einfache Pole $D_\lambda = 0$)

- $P_k D_k = D_k P_k = D_k$ (kommutieren)

- $A = A^\dagger \Rightarrow D_k = D_k^\dagger \Rightarrow D_k = 0$

$$3) S = A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{R(\xi)}{\xi} d\xi$$

Laurentreihe:
$$R_A(z) = \sum_{k=1}^l \left[\frac{1}{z - \lambda_k} P_k + \sum_{l=1}^{m_k-1} \frac{1}{(z - \lambda_k)^{l+1}} D_k^l \right]$$

Spektralzerlegung:
$$A = \sum_{k=1}^l (\lambda_k P_k + D_k)$$

Für $A = A^\dagger \Rightarrow A = \sum_{k=1}^l \lambda_k P_k \Rightarrow f(A) = f(\lambda_1)P_1 + \dots + f(\lambda_k)P_k$

Hiermit lässt sich beispielsweise e^{iA} für selbstadjungierte Matrizen einfach bestimmen.

Beispiel (Laurentreihe und Spektralzerlegung):

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 2+i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = (1+i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow R_M(z) &= \frac{1}{(z+3)[(z-(2+i))(z-i)+1]} \begin{pmatrix} (z-i)(z+3) & -(z+3) & 0 \\ (z+3) & (z+3)(z-(2+i)) & 0 \\ 0 & 0 & (z-(2+i))(z-i)+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pole:

$$(z+3)[(z-(2+i))(z-i)+1] = 0$$

⇒ Doppelte Polstelle: $z_1 = (1+i)$, $m_1 = 2$

⇒ Einfache Polstelle: $z_2 = -3$, $m_2 = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_M(z) &= \frac{1}{(z-(1+i))^2(z+3)} \begin{pmatrix} (z-i)(z+3) & -(z+3) & 0 \\ (z+3) & (z+3)(z-(2+i)) & 0 \\ 0 & 0 & (z-(1+i))^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(z-(1+i))^2} \begin{pmatrix} (z-i)\cancel{+1}-\cancel{1} & -1 & 0 \\ 1 & (z-\cancel{(1+1)}+i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(z+3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(z-(1+i))} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(z-(1+i))^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(z+3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alternativ lässt sich die Zerteilung (falls nicht offensichtlich) auch über die verschiedenen Integrale der Matrix(elemente) und anschliessendem Einsetzen in die Formel der Laurentreihe bestimmen.

4.2.5 Spektralsatz $\dim(X)=\infty$:

Spektren:

a) Punktspektrum:

$\exists x \in X \setminus \{0\}, \lambda \in \mathbb{C} (\lambda \in \mathbb{R} \text{ für } A = A^\dagger) : Ax = \lambda x$

$\Rightarrow (\lambda - A)x = 0 \wedge x \neq 0$ (nichttriviale Lösung)

$\Rightarrow \lambda - A$ nicht injektiv, $\nexists (\lambda - A)^{-1}$

b) stetiges Spektrum:

$\Rightarrow \lambda - A$ injektiv, nicht surjektiv und $\text{ran}(\lambda - A)$ (Bildraum $\{(\lambda - A)x : x \in X\}$) dicht in X
 \Rightarrow z.B. $(\hat{x}f)(x) = xf(x)$

c) Restspektrum:

$\Rightarrow \lambda - A$ injektiv, $\text{ran}(\lambda - A) \neq X$

\Rightarrow leer für $A = A^\dagger$

Spektralsatz:

Hilbertraum, $A \in L(H)$, $A = A^\dagger$

Dann existiert eine Familie orthogonaler Projektoren $(\Sigma_A(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ('Spektralschar von A'), sodass:

a) $\Sigma_A(t) = 0$ für $t < -\|A\|$ und $\Sigma_A(t) = 1$ für $t > \|A\|$

b) $s \leq t \Rightarrow \Sigma_A(s) \leq \Sigma_A(t)$ und $\Sigma_A(s)\Sigma_A(t) = \Sigma_A(t)\Sigma_A(s) = \Sigma_A(s)$

c) $\forall \psi \in H : \psi = \int \psi d\Sigma_A(t)$ und $A\psi = \int t \psi d\Sigma_A(t)$

d) Funktionen ϕ und A sind definiert, wenn sie für jedes $t \in [-\|A\|, \|A\|]$ definiert und messbar sind: $\phi(A) = \int \phi(t) d\Sigma_A(t)$

5 Lebesgue Integrale:

5.1 'Funktionen':

5.1.1 Lebesgue:

→ jede abzählbare Teilmenge von \mathbb{R} ist Lebesgue-Nullmenge ($m(\{x\}) = 0$, $x \in \mathbb{R}$)
 → eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(X_i) \quad (\text{Für } X_i \cap X_j = \emptyset \text{ } (i \neq j) \text{ (paarweise disjunkt), ... wird '}\leq\text{' zu '}\leq\text{'})$$

$$= \sum_{i=1}^k |b_i - a_i| \quad (\text{Für endlich viele (k) Intervalle und jedes } X_i \text{ ist Intervall } [a_i, b_i])$$

$$m(Y) \leq m(Y \cap X) + m(Y \setminus X)$$

$$\nu(\emptyset) = 0$$

$$\nu(A_1) + \nu(A_2) = \nu(A_1 \cup A_2) + \nu(A_1 \cap A_2)$$

5.1.2 Zählfunktion (ℓ -maß) auf \mathbb{R} :

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & \text{A endlich} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{N}} f dy = \sum_{n=1}^{\infty} f(n), \quad f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sum f(n) \text{ abs konv.}$$

5.1.3 Dirac auf \mathbb{R} :

$$1_A(x_0) \equiv \delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & x_0 \notin A \end{cases}$$

$$\int_X 1_{\mathbb{Q}}(x) dx = m(X \cap \mathbb{Q}) = 0$$

$$\int_X f(x) d\delta_{x_0}(x) = \begin{cases} f(x_0) & x_0 \in X \\ 0 & x_0 \notin X \end{cases}$$

5.1.4 Simple function:

$$S(x) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(x), \quad a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\boxed{\int_X \left(\sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(x) \right) dx = \sum_{i=1}^n a_i m(X \cap A_i)}$$

5.1.5 Compact support:

$$C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ glatt } (\infty \text{ diff}), f(x) = 0 \text{ außerhalb } \}$$

$$\text{supp } f = \{x | f(x) \neq 0\}$$

(Also das Intervall, auf dem die Funktion f nicht 0 ist)

5.1.6 Bump Funktion:

$$\eta(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \leq 1 \end{cases}$$

5.2 Lebesgue-Integral:

i) $\int_X f(x) dx < \infty$

ii) $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$

Für folgende Integrale muss jeweils i) gelten: $\int_X f d\nu = \int_X f^+ d\nu - \int_X f^- d\nu$

Dies bedeutet, dass Integrale wie $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) dx = 0$ nicht Lebesgue-integrierbar sind, da die Aufteilung in Integrale ober- und unterhalb der x-Achse (f^+ und f^-) divergiert.

iii) $\nu(x) = 0, f$ messbar: $\int_X f(x) d\nu = 0$

iv) $f, |f| \in L(f, \nu) : \left| \int_X f(x) d\nu \right| \leq \int_X |f(x)| d\nu$

v)

5.2.1 Satz der dominierten/majorisierten Konvergenz:

- f_n messbar? (stetige Funktionen sind messbar)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ messbar?
- $\exists g(x) \geq |f_n(x)| \quad \forall n, \int_X g(x) dx < \infty \Rightarrow$ Lässt sich eine L.-int.bare Majorantenfunktion $g(x)$ finden?

5.2.2 Monotone Konvergenz:

- $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ messbar? (stetige Funktionen sind messbar)
- $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x$ (punktweise)?
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$?

(dom. Kon. bzw. monotone Konv.) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dm(x) = \int f(x) dm(x) \wedge f$ L.-int.

vi)

5.2.3 Fubini:

- ν_1 measure auf X_1, ν_2 measure auf X_2
- $f(x_1, x_2)$ messbar mit $\nu_1 \times \nu_2$
- $X_1, X_2 \sigma$ -finite (note: $\mu([0, 1]) = \infty$ nicht σ -finite)
- falls $< \infty$ (sonst $|f|$):

Fubini $\Rightarrow \int_{X_1} d\nu_1 \left(\int_{X_2} d\nu_2 f(x_1, x_2) \right) = \int_{X_2} d\nu_2 \left(\int_{X_1} d\nu_1 f(x_1, x_2) \right) = \int_{X_1 \times X_2} d(\nu_1 \times \nu_2) f(x_1, x_2)$

vii) Riemann int. \exists (nicht Pol, uneigentlich, ...)

- messbare, kompakte Funktion
 - \hookrightarrow endl. (e.g.: $\subset \mathbb{R}, [0, \infty) \cup \{\infty\}$)
 - $\hookrightarrow f^+$ und f^- getrennt $\Rightarrow \int_X f^{+/-}(x) dx < \infty$
 - \hookrightarrow endliche Unstetigkeiten \rightarrow aufteilen, raus nehmen
 - $\hookrightarrow f$ messbar (stetig?), $|f|$ uneigentlich Riem. $\Rightarrow f$ Lebesgue-int. $= f$ Uneigentlich Riemann (nicht $|f|$)
- $\left(\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1 \right)$

Ziel ist es, die Integrale so lange zu bearbeiten (begründet!), bis man sie als Riemann-Integral berechnen kann.

5.2.4 Beispiele:

Satz der dom. Konv:

$$f_n(x) = \frac{n \sin(\frac{x}{n})}{x(x^2+1)}, [-\pi, \pi]$$

1.) f_n messbar

2.) (L'Hôpital für $g(x)=1/n$ und $f(x)=\sin(x/n)$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin(\frac{x}{n})}{x(x^2+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \cos(\frac{x}{n})}{n^2 \frac{1}{n^2} (x^2+1)} = \frac{x}{x(x^2+1)} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\frac{x}{n}) = \frac{1}{x^2+1}$$

3.) $f(x)$ messbar

4.) $\exists g(x) \geq |f_n(x)| \quad \forall n$ und $g(x)$ integrierbar

$$\rightarrow |f_n(x)| = \left| \frac{n \sin(\frac{x}{n})}{x(x^2+1)} \right| \leq \left| \frac{n \frac{x}{n}}{x(x^2+1)} \right| = \left| \frac{1}{x^2+1} \right| = g(x)$$

(theoretische Polstellen wie $x=0$ lassen sich einfach aus der Integralmenge herausnehmen)

$$5.) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-\pi, \pi]} f_n(x) dm(x) =_{(\text{dom. konv.})} \int_{[-\pi, \pi]} \frac{1}{x^2+1} dm(x) =_{(\text{Riemann int.})} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{x^2+1} dx = 2 \arctan(\pi)$$

Monotone Konvergenz:

$$f(x) = x \exp(-\frac{x^2}{2}), x \in [0, \infty)$$

$$1.) f_n(x) = (f \cdot 1_{[0,n]})(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

$$2.) f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$$

$$3.) \int_{[0, \infty)} f_n(x) dm(x) = \int_{[0, n]} f(x) dm(x) = \int_{[0, n]} x e^{-\frac{x^2}{2}} dm(x) = \int_0^n x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \exp(-\frac{n^2}{2}) < \infty$$

$$4.) \text{Monotone Konvergenz} \longrightarrow \int_{[0, \infty)} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty)} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \exp(-\frac{n^2}{2})) = 1$$

Weiteres Beispiel:

$$(\lim_{n \rightarrow \infty}) \frac{1}{1+x^n} = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \int_{[0,1]} f = \int_{[0,1]} f = 1$ (Einzelne Punkte lassen sich ohne Einfluss entfernen und wieder hinzunehmen)

Fubini:

$f : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{falls } x < y \\ -\frac{1}{x^2} & \text{falls } x > y \end{cases}$$

Ziel wird es sein, die beiden folgenden Integrale zu bestimmen und aus dem Vergleich (Schlagwort: Fubini) eine Folgerung bezüglich der Produktmessbarkeit der Funktion $f(x, y)$ zu machen. Argumentationen, warum Lebesgue-Integrale als Riemann-Integrale berechnet werden können, sind notwendig!

$$\begin{aligned} 1.) \int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} f(x, y) dm(x) \right) dm(y) &= \int_{(0,1)} \left[\int_0^y \frac{1}{y^2} dm(x) - \int_y^1 \frac{1}{x^2} dm(x) \right] dm(y) \\ &= \int_{(0,1)} \left[\frac{1}{y^2} y - \left[-\frac{1}{x} \right]_y^1 \right] dm(y) \\ &= \int_{(0,1)} dm(y) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.) \int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} f(x,y) dm(y) \right) dm(x) &= \int_{(0,1)} \left[- \int_0^x \frac{1}{x^2} dm(y) + \int_x^1 \frac{1}{y^2} dm(y) \right] dm(x) \\
 &= \int_{(0,1)} \left[- \frac{1}{x^2} x + \left[-\frac{1}{y} \right]_x^1 \right] dm(x) \\
 &= - \int_{(0,1)} dm(x) = -1
 \end{aligned}$$

3.) Da die iterierten Integrale unterschiedlich sind, ist $f(x,y)$ nicht produktmessbar.

6 Schwartz-Raum:

6.1 Definition:

$$\boxed{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n, \|f\|_{\alpha, \beta} < \infty\}}$$

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{\alpha, \beta} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \quad , \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} (x^\alpha \partial^\beta f(x)) = 0 \\
 x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots \quad \partial^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \partial_{x_2}^{\beta_2} \dots
 \end{aligned}$$

6.2 Beispiele:

1.) $f_1(x) = e^{-5ix-x^2}$

Schwartzfunktion, da für $x \rightarrow \pm\infty$ schnell genug gegen 0 und stetig (+ stetig diffbar)

$\rightarrow e^{-5ix}$ mit $x \in \mathbb{R}$ auf Einheitskreis \rightarrow Betrag ist $1 \rightarrow e^{-x^2}$ überwiegt

2.) $f_2(x) = e^{-5x-ix^2}$

keine Schwartzfunktion, da e^{-5x} für $x \rightarrow \pm\infty$ nicht $\rightarrow 0$

3.) $f_3(x) = e^{-|x|}$

keine Schwartzfunktion, da Ableitung nicht stetig (für 0 nicht definiert)

4.) $f_4(x) = \frac{1}{1+e^{3x}}$

keine Schwartzfunktion, da für $x \rightarrow -\infty : f_5 \rightarrow 1$

5.) $f_5(x) = (x^3 \frac{d}{dx})^3 e^{-x^2}$

Schwartzfunktion, da Exponentialanteil überwiegt

vorderer Teils auf ein Polynom $P(x)$ mit Grad 6 zurückgeführt werden kann

6.) $f_6(x) = \frac{1}{x^2}$

keine Schwartzfunktion, da per Definition: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (x^\alpha \partial^\beta f(x)) = 0$

aber mit $\alpha = 2$ und $\beta = 0 \Rightarrow \lim_{|x| \rightarrow \infty} (x^2 \frac{1}{x^2}) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (1) = 1 \neq 0$

7 Fourier:

7.1 Fourier-Reihe:

7.1.1 Definitionen:

$$f(0) = f(T)$$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle e_n | f \rangle e_n(x), \quad x \in [0, T]$$

$$\langle e_n | f \rangle = \int_0^{T+a} \overline{e_n(t)} f(t) dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \exp(i\omega n x), \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \langle e_n | e_m \rangle = \delta(n - k)$$

$$\boxed{\Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$\frac{df}{dx} = \sum \langle e_n | f \rangle \frac{d}{dx} e_n$$

Definitionen wie Vorfaktoren ($2\pi, \dots$), Integralgrenzen, Koeffizienten oder Basiselemente können unterschiedlich ausfallen (Konvention).

7.1.2 Parsevals Identität:

$$\boxed{\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2}$$

7.2 Fourier-Transformation:

7.2.1 Definitionen:

$$\boxed{\mathcal{F}(f)(p) = \int f(x) e^{-ipx} d^n x = \hat{f}(p)}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^n} g(p) e^{ipx} d^n p = \check{g}(x)$$

$$G(t, x) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-i\omega t + ipx} \tilde{G}(w, p)$$

Hierbei kann ebenfalls die Definition für den 2π Vorfaktor oder das Vorzeichen im Exponenten unterschiedlich (je nach Konvention) ausfallen.

7.2.2 Beispiele:

$$\text{i) } f(x) = e^{-\gamma|x|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(p) = \frac{2\gamma}{p^2 + \gamma^2}$$

$$\text{ii) } f(x) = 1_{[-T, T]}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(p) = \frac{2}{p} \sin(pT)$$

7.2.3 Regeln:

i) $\boxed{\mathcal{F}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} f\right)(p) = (ip)^n \mathcal{F}(f)(p)}$

Achtung: wenn \mathcal{F} mit e^{ipx} definiert wurde $\rightarrow \mathcal{F}(\partial^n f) = (-1)^n (ip)^n \mathcal{F}$

ii) $\boxed{\mathcal{F}(x^n f) = i^n \partial_p^n \hat{f}(p)}$

iii) $\boxed{\mathcal{F}(e^{ik'x})(k) = 2\pi \delta(k' - k)} \implies \int dp e^{-ip(x-x_0)} = 2\pi \delta(x - x_0)$

Achtung: wenn \mathcal{F} mit $\frac{1}{2\pi}$ definiert wurde $\rightarrow \mathcal{F}(e^{ik'x})(k) = \delta(k' - k)$

$$f(x) = 1 \rightarrow \int \frac{dk}{2\pi} f(k) e^{ikx} = 1 \implies f(k) = \delta(k) 2\pi \rightarrow \int dx e^{-ikx} = \delta(k) 2\pi$$

iv) $\boxed{\langle f | g \rangle = \langle \mathcal{F}(f)(p) | \mathcal{F}(g)(p) \rangle}$

$$\hookrightarrow \langle \mathcal{F}^{-1}(\phi)(p) | g(p) \rangle = \langle \phi(x) | \mathcal{F}^{-1}(g)(x) \rangle$$

v) $\boxed{(f \star g)(x) = \int f(u)g(x-u) d^nu}$ (Faltungsintegral)

$$\hookrightarrow \boxed{\mathcal{F}(f \star g)(p) = \hat{f}(p)\hat{g}(p)}$$

$$\hookrightarrow \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g)) \star \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(g)}{p^2+1}\right)$$

7.2.4 Parsevals Theorem:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f)(\omega)|^2 d\omega}$$

7.2.5 Zeit-Verschiebung:

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = \mathcal{F}(\omega) \exp(-i\omega t_0)$$

7.2.6 Skalierung:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

8 Distributionen:

8.1 Verschiedene Arten:

8.1.1 Temperierte Distributionen:

Temperierte Distributionen sind stetige, lineare Funktionale auf dem Schwartz-Raum (stetige lineare Abbildungen $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$). Die Menge der temperierten Distributionen bildet den Dualraum $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Wichtig ist, dass sie nur auf Funktionen mit bestimmten Eigenschaften (Schwartzraum $\Rightarrow f^{(n)}(\pm\infty) = 0$) angewendet werden.

Es gilt:

$$\Rightarrow T_\phi(f) = (\phi, f) = \int \phi(x) f(x) d^n x$$

- i) $(h\phi, f) = (\phi, hf) \quad \forall f, hf \in \mathcal{S}$
- ii) $(\partial^\beta \phi, f) = (\phi, (-1)^{|\beta|} \partial^\beta f)$
- iii) $(\mathcal{F}(\phi), f) = (\phi, \mathcal{F}(f))$
- iv) $(\phi \star f, g) = (\phi, f^- \star g) \quad , \quad f^-(x) = f(-x)$

8.1.2 Dirac-Distribution:

$$\Rightarrow (\delta_{x_0}, f) = \int_a^b \delta(x - x_0) f(x) dx = \begin{cases} f(x_0) & x_0 \in [a, b] \\ 0 & x_0 \notin [a, b] \end{cases}$$

Anmerkung:

$$\int \frac{1}{2\pi} e^{ipx_0} (e^{-ipx}, f) dp = \frac{1}{2\pi} \int \int dp dx e^{ipx_0} e^{-ipx} f(x) = f(x_0) \quad \checkmark$$

$$\text{''} \int \frac{dp}{2\pi} e^{-ip(x-x_0)} = \delta(x - x_0)'' \quad \not\in \text{(Integral existiert so eig. nicht)}$$

Umgang mit Distributionen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \delta_{x_0}, f \right) &= \int f(x) \frac{d}{dx} (\delta_{x_0}) dx \\ &= \left[f(x) \delta_{x_0} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int \delta(x - x_0) \frac{d}{dx} (f(x)) dx \quad |(f \in \mathcal{S} \rightarrow f(\pm\infty) = 0) \\ &= -(\delta_{x_0}, \frac{d}{dx} f) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dx} \delta_{x_0}, f \right) = -f'(x_0)$$

8.1.3 Heaviside-Distribution:

$$\Rightarrow \Theta_{t_0}(t) = \Theta(t - t_0) = \begin{cases} 1 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\Theta_{t_0}, f) = \int_{t_0}^{\infty} f(t) dt$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt} \Theta_{t_0}, f \right) = (\delta_{t_0}, f)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt} ((t - t_0) \Theta_{t_0}), f \right) = (\Theta_{t_0}, f)$$

9 Fundamentallösungen:

9.1 Adjungierung:

$$\langle P(\partial)f|g\rangle = \langle f|P^\dagger(\partial)g\rangle$$

$$P(\partial)f = \sum_{\alpha} h_{\alpha}(x)(\partial^{\alpha}f)$$

$$P^\dagger(\partial)f = \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|}\partial^{\alpha}(h_{\alpha}(x)f)$$

9.2 Lösungsvorgang:

9.2.1 Homogen:

$$P(\partial)G = \delta \longrightarrow P(\partial)G_0 = 0 \implies G + G_0 \text{ (auch Lösung)}$$

9.2.2 Inhomogen:

$$P(\partial)\phi = f \Rightarrow \phi = G \star f$$

9.2.3 Anleitung:

1.) Fourier-space: $P(\partial)G = \delta \xrightarrow{\text{'Fourier-space'}} P(\partial)G(x) = P(\partial) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{i\bar{p}\bar{x}} \hat{G}(p) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{i\bar{p}\bar{x}} 1 = \delta$

2.) Diff.op.: $\Rightarrow P(\partial_x)e^{i\bar{p}\bar{x}} = P(ip)e^{i\bar{p}\bar{x}}$

3.) Umstellen: $G(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{P(ip)}\right) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{i\bar{p}\bar{x}} \frac{1}{P(ip)}$

Inhomogen:

4.) Rücktrafo: $\mathcal{F}^{-1}(\phi(p)) = \mathcal{F}^{-1}(G(p)f(p)) = G(x) \star f(x)$

5.) $\phi(x) = \int f(x')G(x-x') d^n x' \quad \left(= \int f(x-x')G(x') d^n x' \right)$

Anmerkung: Im Allgemeinen befinden wir uns in n Dimensionen, daher sind x, p,... 'Vektoren'. Im Exponenten wurde das deutlich gemacht, sonst wurde darauf verzichtet.

Man kann hierbei auch etwas anders vorgehen: Anstelle von ϕ bzw. G und f bzw δ in 'Fourier-Form' zu schreiben (NICHT WIRKLICH TRANSFORMIEREN!) und den (Ableitungs)Operator direkt auf e^{ixp} anzuwenden, da im Integral $\hat{G}(p)$ nicht von x abhängt, kann man auch einer Fouriertransformation beider (ganzen) Seiten durchführen und anschliessend Partiell integrieren (um den Ableitungsoptator P auf die e-Funktion anwenden zu können). Die Allgemeine Idee bleibt jedoch, in den 'Fourier-Raum' zu gehen, um Ableitungsoptatoren 'auf die andere Seite zu bekommen'.

9.3 Beispiele:

9.3.1 reines Zeitableitungspolynom:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n+1} \longrightarrow G(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^{n+1}} \longrightarrow G(t) = \frac{t^n}{n!} \Theta(t)$$

9.3.2 harm. Oszillator:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) \longrightarrow \frac{1}{-p^2 + 2i\gamma p + \omega_0^2}, \gamma < \omega_0$$

$$p_{\pm} = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = i\gamma \pm \omega \longrightarrow G(t) = \Theta(t) \frac{e^{-\gamma t}}{\omega} \sin(\omega t)$$

$\gamma = 0$ divergiert \rightarrow Dämpfung kontrolliert Peak \rightarrow Resonanz

Inhomogen:

$$(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_o^2)\phi = e^{i\alpha t}$$

$$\begin{aligned}\phi &= G \star f \\ &= \int \Theta(t) \frac{e^{-\gamma t}}{\omega} \sin(\omega t) e^{i\alpha(u-t)} dt \\ &= e^{i\alpha u} \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma t}}{\omega} \left(\frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right) e^{-i\alpha t} dt \\ &= \frac{e^{i\alpha u}}{2i\omega} \int_0^\infty (e^{-(i\omega+i\alpha+\gamma)t} - e^{-(i\omega+i\alpha+\gamma)t}) dt \\ &= \frac{e^{i\alpha u}}{2i\omega} \left(\frac{1}{(-i\omega+i\alpha+\gamma)} - \frac{1}{(i\omega+i\alpha+\gamma)} \right) \quad (\text{hier kein Delta, weil } \omega, \alpha \text{ und } \gamma \text{ reell (?) (Nenner } \neq 0))\end{aligned}$$

9.3.3 Laplace:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n (\frac{\partial}{\partial x^i})^2 = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_\mu (\sqrt{\det(g)} g^{\mu\nu} \partial_\nu)$$

$$\mathcal{F}((-\Delta)^\xi f)(p) = \int e^{-ipx} (-\Delta)^\xi f(x) dx = \int (p)^{2\xi} e^{-ipx} f(x) dx = p^{2\xi} \hat{f}(p)$$

Erinnerung Metrischer Tensor:

$$g = J^T J$$

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \begin{pmatrix} \partial_a x & \partial_b x & \partial_c x \\ \partial_a y & \partial_b y & \partial_c y \\ \partial_a z & \partial_b z & \partial_c z \end{pmatrix}$$

Beispiel Kugelkoordinaten:

$$J = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \rightarrow g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \rightarrow \det(g) = r^4 \sin^2(\theta)$$

9.3.4 Laplace (1D):

(Analog zu Beispiel 1):

$$\Delta \phi(x) = 4\pi \rho(x)$$

$$\begin{aligned}\Delta \int \frac{1}{2\pi} e^{ikx} \phi(k) dk &= \int \frac{1}{2\pi} e^{ikx} 4\pi \rho(k) dk \\ \int \frac{1}{2\pi} (ik)^2 e^{ikx} \phi(k) dk &= \int \frac{1}{2\pi} e^{ikx} 4\pi \rho(k) dk \quad \Leftrightarrow \quad (ik)^2 \phi(k) - 4\pi \rho(k) = 0 \\ \Rightarrow \phi(k) &= -\frac{4\pi}{k^2} \rho(k)\end{aligned}$$

$$-\int \frac{1}{2\pi} 4\pi e^{ikx} \frac{1}{k^2} dk = -2 \int \frac{e^{ikx}}{k^2} dk \quad \left| k \rightarrow k - i\epsilon \text{ oberer Halbebene} \rightarrow x > 0 \ (|e^{ikx}| = e^{-x \operatorname{Im}(k)}) \right.$$

$$\begin{aligned}&= -2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{e^{ikx} e^{\epsilon x}}{(k - i\epsilon)^2} \Theta(x) dk \\ &= -2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi i e^{\epsilon x} \Theta(x) \lim_{k \rightarrow i\epsilon} \frac{d}{dk} (e^{ikx}) \\ &= 4\pi x \Theta(x)\end{aligned}$$

9.3.5 Poisson eq.:

$$(-\Delta)^\xi \phi = \rho \Rightarrow \phi(x) = \int G(x-y)\rho(y) d^d y$$

$$G(x) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - \xi)}{\Gamma(\xi) 4^\xi \pi^{d/2}} \frac{1}{|x|^{d-2\xi}}$$

$$\rightarrow \Gamma(\epsilon) = \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\epsilon}$$

$$\rightarrow \frac{1}{|x|^{2\xi}} = e^{-2\xi \ln(|x|)} \stackrel{T}{=} (1 - 2\xi \ln(|x|))$$

9.3.6 d'Alembert:

Mit: $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ (im Folgenden c=1)

0.) $\square G = \delta$ (note: step 1.) and 2.) is the 'different way' mentioned earlier)

1.) Fourier: $\int dt \int d^d x e^{i\omega t - ipx} (\square G(x, t)) = 1 \longrightarrow \hat{G}(w, p) = -\frac{1}{\omega^2 - p^2}$

2.) Inverse-Fourier: $G(t, x) = -\int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-i\omega t + ipx} \frac{1}{\omega^2 - p^2}$

3.) um $i\epsilon$ verschieben: damit nur für $t>0$ Lösung $\neq 0$, $|e^{-i\omega t}| = e^{t Im(\omega)}$, $Im(\omega) < 0$

$\rightarrow \omega = -i\epsilon \pm |p|$

$\rightarrow \hat{G}^{ret}(\omega, p) = -\frac{1}{(\omega + i\epsilon)^2 - |p|^2}$

4.) Nullstellen aufteilen: $\hat{G}^{ret}(\omega, p) = \frac{1}{2|p|} \left(\frac{1}{\omega + (i\epsilon + |p|)} - \frac{1}{\omega + (i\epsilon - |p|)} \right)$

5.) Residuensatz und $\epsilon \rightarrow 0$:

$\rightarrow G^{ret}(t, x) = i\Theta(t) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2|p|} e^{ipx} (e^{-i|p|t} - e^{i|p|t})$

Für d=3:

6.) Kugelkoordinaten (Jacobi-Determinante!), wobei die Achse passend gewählt wird, damit gilt: $\bar{p}\bar{x} = |p||x|\cos(\theta)$

$\rightarrow G^{ret}(x, t) = i\Theta(t) \int_0^\infty \frac{d|p|}{(2\pi)^d} |p|^2 \frac{1}{2|p|} \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i|p||x|\cos(\theta)} (e^{-i|p|t} - e^{i|p|t})$

7.) $\int_0^\infty d|p| (e^{i|p|(t-|x|)} + e^{-i|p|(t-|x|)}) \sim 2\pi\delta(t - |x|)$

mit: $\int_0^\infty d|p| e^{i|p|(t-|x|)} \xrightarrow{|p| \rightarrow -|p|} \int_{-\infty}^0 d|p| e^{-i|p|(t-|x|)}$

8.) $\delta(t + |x|)$ wird (physikalisch mit $t>0$, $|x|>0$) nicht betrachtet

$$\implies G(\bar{r}, t) = \frac{1}{4\pi|x|} \Theta(t) \delta(t - \frac{|x|}{c})$$

9.4 Green's functions:

Ausgangspunkt:

$$P(\partial)\phi(x) = f(x)$$

$$P(\partial) = \sum_\alpha h_\alpha(x) \partial^\alpha \quad (\text{Koeffizienten } h_\alpha(x) \text{ nicht mehr konstant})$$

Erweiterung der Fund.-Lsg.: $F(x) \rightarrow G(x, y)$

mit: $G(x, y) = F(x - y)$ ist Greens-Funktion zu einer Fundamentallösung falls diese existiert.

ausserdem: $G(x+a, y+a) = F((x+a)-(y+a)) = F(x-y) = G(x, y)$ (Translations-Invarianz)

Es gilt:

$$\overline{P(\partial)G}(x, y) = \delta(x - y)$$

Für A positiver, geschlossener, selbst-adjungierter Operator:

$$G = \frac{1}{A} = \int_0^\infty dt e^{-tA}$$

$$\text{mit: } \frac{d}{dt}e^{-tA} = -Ae^{-tA} \text{ und } e^{-tA}\Big|_{t=0} = \mathbb{1}$$

$$\text{und damit: } AG = \int_0^\infty dt A e^{-tA} = \int_0^\infty dt (-\frac{d}{dt})e^{-At} = -e^{-tA}\Big|_0^\infty = \mathbb{1}$$

(script p. 258 ff.)

Weitere Green's-Funktionen sind beispielsweise hier zu finden: <https://tinyurl.com/2utd3acp>

10 Differentialgleichungen:

ODE, PDE (partiell) → Ordnung (Grad) → linear ($y(t)^2, e^{y(t)}$, ζ) → homogen (=0)

10.1 Fourier:

$$1.) \mathcal{F}(P(\frac{d}{dx})G(x)) = \mathcal{F}(f(x))$$

$$2.) \mathcal{F}^{-1}(G(p)) = G(x) = f(x) \star \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{P(ip)}\right)$$

10.2 Initial value problems + Linear ODEs:

10.2.1 Picard-Lindelöf:

\exists eindeutige Lösung, wenn:

- offene Teilmenge
- Trafo stetig → Matrix (Lipschitz-stetig)
- $|Y(t, x_1) - Y(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ (wenn nicht, dann mehrere Lösungen) , $\frac{d}{dt}x = Y(t, x)$
- Anfangsbedingungen

10.2.2 Flows:

Flow: $\varphi : I \times X \rightarrow X$, $I \subset \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^N$

for any $x \in X$ and $s, t \in I$:

- $\varphi(0, x) = x$
- $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s + t, x)$

Fixpunkte:

für $\dot{x}(t) = Y(x(t))$, $x(t_0) = x_0$

Fixpunkt x_\star :

$$\boxed{Y(x_\star) = 0} \Rightarrow \text{stationäre Lösung } x(t) = x_\star$$

Stabilitätsmatrix:

$$\boxed{Y' = (\partial_i Y^j)(x_\star)} \text{ (at } x_\star\text{)}$$

(Erinnerung an Jacobi-Matrix)

- $\varphi(t, h_0) = h(t) = e^{(t-t_0)Y'}h_0$
- falls: $Y' = S^{-1}DS$ (diagonalisierbar) $\rightarrow (Sh(t))^i = e^{(t-t_0)\nu_i}(Sh_0)^i$

mit:

eigen-perturbation = Eigenvector von Y'

ν_i = Eigenwerte von Y' :

• **relevant** : $Re(\nu_i) > 0$

• **marginal** : $Re(\nu_i) = 0$

• **irrelevant** : $Re(\nu_i) < 0$

Beispiel: gedämpftes Pendel:

$$\ddot{\theta}(t) = -\mu\dot{\theta}(t) - \frac{g}{l}\sin(\theta(t))$$

$$\bar{\theta} = (\dot{\theta}, \theta)^T$$

Fixpunkte:

$$\dot{\theta}_\star = (0, 0)^T = (-\mu\omega_\star - \frac{g}{l} \sin(\theta_\star), \omega_\star)^T$$

$$\rightarrow \omega_\star = 0, \sin(\theta_\star) = 0, \theta_\star = n\pi \quad (n \in \mathbb{N}_0 \text{ bzw. } n \in \{0, 1\})$$

$$\Rightarrow \bar{\theta}_n = (0, n\pi)^T \text{ (Fixpunkte)}$$

Stabilitätsmatrix:

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (\dot{\theta}, \theta) \mapsto (-\mu\omega - \frac{g}{l} \sin(\theta), \omega) = F(\omega, \theta)$$

$$J_F = [\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}] \text{ (hier } x_1 = \omega \text{ und } x_2 = \theta)$$

$$J_{F,11} = -\mu, \quad J_{F,12} = -\frac{g}{l} \cos(\theta), \quad J_{F,21} = 1, \quad J_{F,22} = 0$$

Eigenwerte:

$$\det(J_F - \lambda) = 0$$

Für Fixpunkte mit Eigenwerten von $J_F \lambda_\pm$:

$$(\mu > 0)$$

$$\bar{\theta}_1 = (0, 0)^T :$$

- Pendel hängt nach unten

- $\operatorname{Re}(\lambda_+) < 0, \operatorname{Re}(\lambda_-) < 0$:

→ kleine Auslenkung → klingt mit Reibung ab

⇒ asymptotisch stabiler Fixpunkt

$$\bar{\theta}_2 = (0, \pi)^T :$$

- Pendel hängt senkrecht nach oben

- $\operatorname{Re}(\lambda_+) < 0, \operatorname{Re}(\lambda_-) > 0$:

→ Sattelpunkt

→ kleine Auslenkung → bricht zusammen

⇒ Fixpunkt instabil

(script p. 269 ff.)

10.2.3 Folge:

$$\dot{x}(t) = Y(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t Y(s, x_n(s)) ds$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t Y(s, x(s)) ds \quad (\lim_{n \rightarrow \infty})$$

Beispiel:

$$\dot{x} = x, \quad t_0 = 0$$

$$x_{n+1} = x_0 + \int_0^t Y(s, x_n(s)) ds$$

$$x_1 = x_0 + \int_0^t x_0 ds$$

$$x_2 = x_0 + \int_0^t x_1(s) ds = x_0 + \int_0^t (x_0 + x_0 s) ds = x_0 + x_0 t + \frac{1}{2} x_0 t^2$$

$$\dots \Rightarrow x = x_0 e^t$$

10.2.4 Wronskian:

$$W(x_0, \dots, x_{n-1})(t) = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & \dots & x_{n-1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{(n-1)} & x_1^{(n-1)} & \dots & x_{n-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Linear Unabhängig: $W \neq 0$

$$W_v(x_0, \dots, x_{n-1})(t) = \det \begin{pmatrix} x_0 & \dots & 0 & \dots & x_{n-1} \\ x_0^{(1)} & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & & f(t) & & \dots \end{pmatrix}$$

(Spalte v)

10.2.5 Lösung lin. DGL:

$$y(t) = \sum_{v=1}^n y_v(t) \left[c_v^{hom} + \int_{t_0}^t ((-1)^{n+v} \frac{W_v(s)}{W(s)}) ds \right]$$

Beispiel:

$$x(t) = at^2 + bt + c$$

Hierbei wird die Basis gebildet: $x_0(t) = 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \text{ (linear unabhängige Basis!)}$$

Beispiel für inhomogene DGLs:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$$

1.) homogene Gleichung: $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$

(Grad 2 → 2 Linear unabhängige Lösungen):

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

$$2.) W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{pmatrix} = y_1(t)y'_2(t) - y'_1(t)y_2(t)$$

3.)

$$W_1(t) = \det \begin{pmatrix} 0 & y_2(t) \\ f(t) & y'_2(t) \end{pmatrix} = -f(t)y_2(t)$$

$$W_2(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & 0 \\ y'_1(t) & f(t) \end{pmatrix} = f(t)y_1(t)$$

$$4.) y(t) = \sum_{v=1}^n y_v(t) \left[c_v^{hom} + \int_{t_0}^t ((-1)^{n+v} \frac{W_v(s)}{W(s)}) ds \right]$$

Einfaches Beispiel:

$$x'(t) + mx(t) = f(t)$$

1.) homogene Lösung: $x' + mx = 0 \Rightarrow x_h(t) = ce^{-mt}$

hierbei: Anfangsbedingungen für c

2.) inhomogene Lösung:

$$a) x_p(t) \rightarrow c(t)e^{-mt} \quad (\text{Variation der Konstanten})$$

$$\rightarrow c'(t)e^{-mt} - mc(t)e^{-mt} + mc(t)e^{-mt} = f(t)$$

$$\Rightarrow c'(t) = f(t)e^{mt}$$

$$b) \frac{dc}{dt} = f(t)e^{mt} \quad (\text{Separation der Variablen})$$

$$\rightarrow c^{\text{Part.}} = \int_{t_0}^t f(s)e^{ms} ds$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)}$$

Mit Wronskian:

$$1.) W = e^{-mt} \neq 0$$

$$2.) W_v = f(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = x_1(t) \left(c^{\text{hom}} + \int_{t_0}^t \frac{W_v}{W} ds \right) = e^{-mt} \left(c^{\text{hom}} + \int_{t_0}^t f(s)e^{ms} ds \right)$$

10.3 Charakteristisches Polynom:

1.) $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t)$

2.) $e^{\lambda t}$ Ansatz $\Rightarrow a_n \lambda^n + \dots + a_0 = 0$ (homogene Lösung)

3.) nach 'Nullstellen' lösen:

a.) $(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c) = \lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (ab + bc + ac)\lambda - abc$

b.) $(\lambda^3 + 3\lambda^2 - 9\lambda + 5) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + 4\lambda - 5$

$$-(\lambda^3 - \lambda^2)$$

$$\overline{+ 4\lambda^2 - 9\lambda + 5}$$

\rightarrow (erste Nullstelle raten und dann 'verringern')

4.) λ_m m-ter Ordnung $\rightarrow a_0 e^{\lambda_m t} + a_1 t e^{\lambda_m t} + \dots + a_{m-1} t^{m-1} e^{\lambda_m t}$ \leftarrow degeneracy m

$$W = \exp \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i t \right] \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i) \Rightarrow \text{global degree } \frac{n(n-1)}{2}$$

5.) (inhom.): $x(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} \rightarrow$ in DGL = $f(t)$ (Var. Konst.)

10.4 DGL-n-Ordnung:

1.) $A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $A = SDS^{-1}$, $x' = Ax$

$$\rightarrow \text{Beispiel: } y - 6y' - 2y'' = 12y''' \rightarrow \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 = y' \\ y_3 \\ \frac{1}{12}(2y_3 + 6y_2 - y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

2.) $\det(A - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_i$ (Eigenwerte)

3.) $[(A - \lambda)|0] \rightarrow \bar{v}_i$ (Eigenvektoren)

4.) $S = (\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3 \dots)$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots)$

5.) $[S | \text{diag}(1, 1, 1 \dots)] \rightarrow [\text{diag}(1, 1, 1 \dots) | S^{-1}]$ (oder z.B. Cramer'sche Regel)

6.) $u = S^{-1}x$, $u' = Du \rightarrow u_i(t) = \xi_i e^{\lambda_i t}$

7.) Anfangsbedingungen + x(t) lösen

10.5 Grundlegende Lösungsschritte:

10.5.1 Separation der Variablen:

$$\frac{dx}{dt} - a(t)x(t) = f(t) \xrightarrow{\text{hom}} \int \frac{1}{x} dx = \int a(t) dt$$

10.5.2 Variation der Konstanten:

$$x(t) = c \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right) \xrightarrow{\text{var.}} c(t)$$

$$\xrightarrow{\text{inh.}} c'(t) \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right) = f(t)$$

10.5.3 Separationsansatz:

$$y(x, t) = \chi(x)\tau(t)$$

10.6 Sturm Liouville:

\exists Lösung:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}(t)) + q(t)x(t) = -\lambda\omega(t)x(t)}$$

wenn:

$p(t), p'(t), q(t), \omega(t) \in \mathbb{R}$ und stetig auf $[a, b]$ und $p(t), \omega(t) > 0$ auf $[a, b]$

regulär:

$$\text{und dazu: } \boxed{\alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = 0 \quad , \quad \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0}$$

\hookrightarrow mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \wedge |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0 \wedge |\beta_1| + |\beta_2| > 0$

dann:

- $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots \rightarrow \infty$ (wie Pot.topf)
- $\forall n \exists! x_n(t)$, wobei $x_n(t)$ das Problem löst
- x_n hat $n-1$ Nullstellen in (a, b) und Basis in L^2

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \langle f | g \rangle &= \int_a^b \omega(t) \bar{f}(t) g(t) dt \\ \longrightarrow \langle \mathcal{L}x | y \rangle &= \int_a^b \omega(t) (\mathcal{L}x) y = BC + \langle x | \mathcal{L}y \rangle \\ \longrightarrow \boxed{\mathcal{L}x = \lambda x = -\frac{1}{\omega} [(px')' + qx]} \\ \longrightarrow \mathcal{L} &= -\frac{1}{\omega(t)} \left[\dot{p}(t) \frac{d}{dt} + p(t) \frac{d^2}{dt^2} + q(t) \right] \end{aligned}$$

10.7 Bedingungen:

10.7.1 Anfangsbedingungen:

$$x'' + \lambda x = 0 \quad , \quad x(0) = 0 \quad , \quad x'(0) = 0$$

10.7.2 Randbedingungen:

$$x'' + \lambda x = 0$$

$$1.) x(0) = 0 \quad , \quad x(L) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_n &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad , \quad n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \\ \Rightarrow x_n &= A \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \end{aligned}$$

$$2.) x(0) = 0 \quad , \quad x'(L) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_n &= \left(\frac{1}{L}(n\pi + \frac{\pi}{2})\right)^2 \\ \Rightarrow x_n &= A \sin\left(\frac{(n + \frac{1}{2})}{L}\pi t\right) \end{aligned}$$

$$3.) \text{periodisch: } x(0) = x(L) \quad , \quad x'(0) = x'(L)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_n &= \left(\frac{2\pi}{L}n\right)^2 \\ \Rightarrow x_n &\sim \sin\left(\frac{2\pi}{L}n t\right) , \cos\left(\frac{2\pi}{L}n t\right) \end{aligned}$$

10.8 Potenzreihen:

$$1.) \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n} \longrightarrow \text{in DGL einsetzen}$$

2.) x^n lin. unabhängig ($\dots a_n = 0 \rightarrow$ Rekursionsformel)

3.) fuer a_n loesen \rightarrow Randbedingungen

$$\Rightarrow (1 - x^2)f'' - 2x f' + \lambda f = 0$$

$$\Rightarrow (1 - x^2) \sum_{n=0} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=0} n a_n x^{n-1} + \lambda \sum_{n=0} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0} n(n-1)a_n x^n - 2 \sum_{n=0} n a_n x^n + \lambda \sum_{n=0} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n$$

$$\Rightarrow f(x) = y_0(x) + y_1(x), \quad y_0(x) = a_0 \left(1 + \sum_{k \geq 1} a_{2k} x^{2k} \right), \quad y_1(x) = a_1 \left(x + \sum_{k \geq 1} a_{2k+1} x^{2k+1} \right)$$

\hookrightarrow bricht für alle $\lambda_n = n(n+1)$ ab

$$\Rightarrow \boxed{y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_0 \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(2j)(2j+1) - \lambda}{(2j+2)(2j+1)} \right] x^{2k}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_1 \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(2j+1)(2j+2) - \lambda}{(2j+3)(2j+2)} \right] x^{2k+1}}$$

10.9 Partial differential equation (PDE):

Separationsansatz:

$$\boxed{y(x, t) = \chi(x)\tau(t)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \frac{d^2 \chi}{dx^2} = \lambda \chi(x) \\ &\Rightarrow \frac{d^2 \tau}{dt^2} = \lambda c^2 \tau(t) \end{aligned}$$

11 Quantenmechanik:

$m=1, \hbar = 1, c=1$

11.1 Grundlagen:

11.1.1 Projektion:

$$P = \sum |a_i><a_i|$$

11.1.2 Erwartungswert:

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \int \overline{\psi(x)} A \psi(x) dx$$

11.1.3 Wahrscheinlichkeit:

$$|\langle a | \psi \rangle|^2$$

11.1.4 Spektrum:

Eigenwerte = Eigenniveaus, Resolvente

11.1.5 Entartung:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2}{2mL} , n^2 \text{ entartet}, \bar{S}^2 \rightarrow l(l+1)$$

11.1.6 Definitionen:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-itH} |\psi_0\rangle$$

$$e^{-itH} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-itH)^n}{n!}$$

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

11.1.7 Normierung:

$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

11.1.8 Bahndrehimpulsoperator:

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$L_{\pm} = L_x \pm i L_y = e^{\pm i \varphi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$-L^2 = \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

11.2 Verschiedene Beispiele:

11.2.1 Harmonischer Oszillator:

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{2} x^2$$

$$H \rightarrow (n + \frac{1}{2})$$

$$E_n = \hbar \omega (n + \frac{1}{2})$$

11.2.2 Partikel 1D Box:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} x^2, \hat{p} = -i \frac{d}{dx}$$

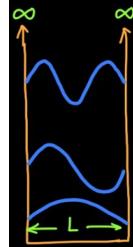
11.2.3 Potentialtopf:

$$\Rightarrow V(x) = \begin{cases} 0 & x_0 \in [0, L] \\ \infty & x_0 \notin [0, L] \end{cases}$$

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad (\text{Ansatz})$$

$$\psi(0) = 0 = \psi(L), \int |\psi|^2 dx = 1$$

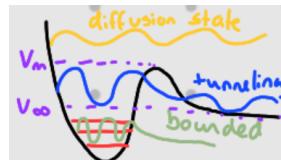
$$\Rightarrow \psi(x) = \sqrt{\frac{L}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$



11.2.4 Potential:

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum c_n e^{-iE_n t} |\phi_n\rangle$$



11.2.5 Potentialstufe(?), aber mit Crack:

$$\Rightarrow V(x) = \begin{cases} 0 & x \geq a \\ \infty & x < a \end{cases}$$

i) $H\psi = E\psi$

ii) $H = -\frac{1}{2}\Delta + V(x)$

$$\rightarrow E\psi = -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 \partial_r \psi) + \frac{L^2 \psi}{2r^2}$$

$$\rightarrow L^2 = -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

iii) $\psi(r, \varphi, \theta) = Y(\varphi, \theta)R(r) \rightarrow$ Trennung der Variablen $\rightarrow \lambda$

iv) $L^2 Y = \lambda Y \Rightarrow Y = Y_l^m(\varphi, \theta), \lambda_L = l(l+1)$

v) \hookrightarrow in R Teil einsetzen \Rightarrow Sturm Liouville Problem

$$\hookrightarrow p(r) = r^2, q(r) = -l(l+1), \omega(r) = r^2$$

$$\hookrightarrow R(0) = R_0 < \infty, R'(0) = R'_0 < \infty, R(a) = 0, R'(a) = R'_a < \infty$$

vi) $E \stackrel{?}{\geq} 0 \Rightarrow \langle R | DR \rangle \geq 0, DR = 2ER| \cdot R$

$$\langle R | DR \rangle = \int_0^a r^2 \bar{R} DR dr \rightarrow \text{Part. int} \geq 0$$

(Weiteres siehe HöMa Skript - Altklausuren)