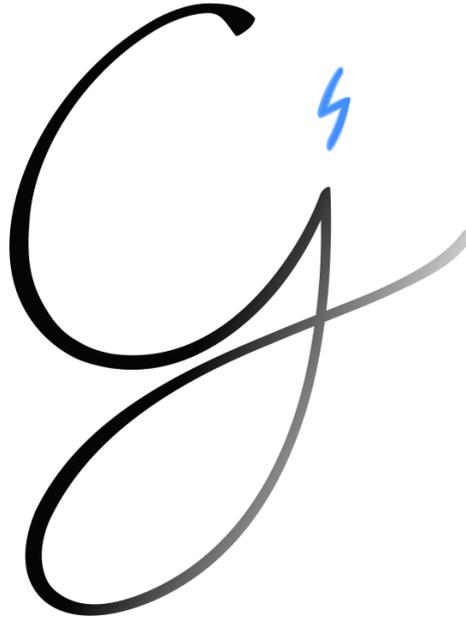


Captain Jonis

Theo2 "Formelsammlung"



Contents

1	Lagrange Dinge	3
1.1	Problemstellung	3
1.2	Klassifizierung Zwangsbedingungen	3
1.2.1	Holonom	3
1.2.2	nicht holonom	4
1.3	Rechnung der Freiheitsgrade	4
1.4	Verallgemeinerter Koordinaten	4
1.5	D’alembersches Prinzip	4
1.6	Lagrange Funktion und Gleichungen zweiter Art	5
1.7	Anwendung	5
1.8	Lagrange in Krummlinigen	5
2	Variationsrechnung	5
2.1	2D- Taylor	6
2.2	Variation ohne NB	6
2.3	Wirkungsfunktional	6
2.4	Verallg. Lagrange Gleichungen	6
2.4.1	Mehrere Funktionen	6
2.4.2	Mehrere Argumente	7
2.4.3	Hoehere Ableitungen	7
2.5	Variation mit Nebenbedingungen	7
2.6	Hamiltonsches Prinzip	7
3	Symmetrien und Erhaltungen	7
3.0.1	Homogenitaet der Zeit	7
3.0.2	Homogenitaet des Raumes	7
3.0.3	Isotropie des Raumes	8
3.1	Noether Theorem	8
4	nicht holonome Systeme	8
4.1	Holonomer Fall	8
5	Starrer Koerper	8
5.0.1	Euerlwinkel	9
6	Hamilton shit	9
6.1	Hamilton Funktion	9
6.2	Bewegungsgleichungen	9
6.3	Phasenraum	10
6.4	Poisson Klammr	10
6.4.1	Kanonische Gleichungen mit Poisson	10
6.4.2	Fundamentale Poisson Klammern	10
6.4.3	Poisson-Klammer als Lie Algebra	10
7	Thermodynamik	10
7.1	Postulate	10
7.1.1	Postulat 1	10
7.1.2	Postulat 2	10
7.1.3	Postulat 3	11
7.1.4	Postulat 4	11
7.2	Das Gleichgewicht	11
7.3	Euler-Gibbs Duham Beziehung	11
7.4	Beispielsysteme	11
7.4.1	Ideales Gas	11
7.4.2	Van der Waals Gase	12
7.5	Materialgrossen	13
7.5.1	Matarialgroessen beim Idealen Gas	13
7.6	Thermodynamische Potentiale	13

8	Sonstiges Wichtiges(mit blick auf Cheatsheet)	13
8.1	totale Differenziale	13
8.2	DGLs	14
8.3	Legendre-Transformationen	14
9	Zettelloesungen	14
9.1	Zettel 1	14
9.1.1	Aufgabe1	14
9.2	Zettel 2	14
9.3	Zettel 3	14
9.4	Zettel 4	14
9.5	Zettel 5	14
9.6	Zettel 6	14
9.7	Zettel 7	14
9.8	Zettel 8	14
9.9	Zettel 9	14
9.10	Zettel 10	14

1 Lagrange Dinge

1.1 Problemstellung

In der Klassischen Mechanik haben wir uns die Frage nach Trajektorien gestellt, aber dabei nicht auf evtl. Zwangsbedingungen geachtet (reale einschraenkung der tatsaechlichen Bewegung) Wenn man sich aber anschaut, wie wir in der klassischen Mechanik Bewegungsgleichungen aufgestellt haben.

$$m_i \ddot{r}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j=1, i \neq j}^N \vec{F}_{ij}$$

Dann ist dort klein Platz fuer die Kraefte der Zwangsbedingungen, bzw. wir muessten diese genau kennen. Das tun wir nicht, wir wissen Zum Beispiel dass eine Laenge gleich bleiben muss, aber nicht welche genaue Kraft jetzt dafuer sorgt, das diese so bleibt (siehe Fadenpendel)

1.2 Klassefizierung Zwangsbedingungen

1.2.1 Holonom

Holonome Zwangsbedingungen bedeutet wir haben Einschraenkungen, die wir als Funktion der Koordinaten-schreiben koennen und fuer die gilt:

$$f_i(r_1, \dots, r_N, t) = 0, \quad 1 \leq i \leq p$$

Wobei p die Anzahl der Zwangsbedingungen ist.

holonom - skleronom

Skleronome Zwangsbedingungen haben keine explizite Zeitabhaengigkeit:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = 0$$

Skleronom klingt ein bissle wie skelett und skelette sind starr, also keine Zeitabhaengigkeit

Holonom - rheonom

Rheonome haben eine explizite Zeitabhaengigkeit.

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} \neq 0$$

rheonom klingt etwas wie reha, also wie reha klinik und so, da muss man sich ja bewegen, also zeitliche aenderung.

1.2.2 nicht holonom

Man kann die Zwangsbedingungen nicht als Funktionen $f_i = 0$ schreiben. Also wenn diese zum Beispiel differentiell sind, oder nur lokale Einschränkungen sind (Perle auf Abakus).

1.3 Rechnung der Freiheitsgrade

Ein System mit N Teilchen, hat wenn es p Einschränkungen gibt:

$$S = 3N - p$$

S Freiheitsgrade.

1.4 Verallgemeinerter Koordinaten

Wir brauchen zum Lösen dann S generalisierte Koordinaten.

$$q_i \quad (1 \leq i \leq S)$$

Dabei muss gelten, dass:

- Es eine **eindeutige** Transformation gibt: $r_i(q_1, \dots, q_S, t)$
- die q_i unabhängig voneinander sind. $\nexists F(q_i, \dots, q_S, t) = 0$

1.5 D'Alembersches Prinzip

Wir führen das Konzept der virtuellen Verschiebung ein.

$$\delta r_i$$

Dabei ist δr keine tatsächliche Verschiebung, sondern nur virtuell, d.h. wir können einen Vektor bauen, der nur in eine Koordinatenrichtungen sich verschiebt.

Also weil wir die virtuelle Verschiebung immer instantan machen, betrachten wir Komponenten nicht, die anderweitig sich ändern würden.

Ich stehe im fahrenden Aufzug und gehe einen Schritt nach rechts, dann habe ich mich in Wirklichkeit nach rechts und nach oben bewegt, mit dem Konzept der virtuellen Verschiebung kann ich einen Schritt δx nach rechts machen, ohne dabei nach oben gefahren zu sein.

Fangen wir mit Newton an:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i$$

dabei sind K die direkten Kräfte, die wir sehen wirken, und Z die Zwangskräfte, die wirken müssen, damit eine Zwangsbedingung eingehalten wird.

Wir stellen um, und multiplizieren jetzt mit der virtuellen Verschiebung.

$$0 = \sum_i^N (\vec{K}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \delta \vec{r}_i + \delta W$$

Dabei ist δW eben die virtuelle Arbeit (Zwangskraft mal virtuelle Verschiebung), da aber per Konstruktion die virtuelle Verschiebung nur tangential zu den Zwangskräften sein soll, muss gelten:

$$\delta W = 0$$

(Ausnahme davon sind Reibungskräfte).

Wir führen nun, verallgemeinerte Koordinaten $\vec{q}(\vec{r}, t)$ ein. Und stellen um und machen viele Dinge, und überig bleibt die allgemeine Form des D'Alembertschen Prinzips:

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

Dabei ist Q_j eine generalisierte Kraftkomponente.

Interessant sind nun die konservativen holonomen Systeme, denn

- konservativ $\Rightarrow Q_j = 0$
- holonom \Rightarrow Summe über j zerfällt.

Dass führt zu Lagrange Funktion;

1.6 Lagrange Funktion und Gleichungen zweiter Art

Die Lagrange Funktion setzt sich wie folgt zusammen:

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - V(\vec{q}, t)$$

Dann wird das D'alambertsche Prinzip zu folgender Formel zusammengefasst:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

1.7 Anwendung

- Zwangsbedingungen formulieren
- generalisierte Koords finden
- Lagrange Funktion $L = T - V$ berechnen.
- Lagrange Gleichungen aufstellen und lösen
- Differentialgleichungen lösen (Erhaltungsgroessen)
- maybe Rücktransformation

1.8 Lagrange in Krummlinigen

Wir betrachten nur die Transformationen von kartesisch zu krummlinigen Koords, die unsere verallgemeinerten Koords nun darstellen. Wir betrachten keine Zwangskräfte oder Potential erstmal.

Dann ergibt sich nach Rechnung, dass die Lagrange Funktion sich nur aus kinetischer Energie zusammensetzt, die über einen metrischen Tensor gewonnen werden kann:

$$L = T = \frac{m}{2} \sum_{j,k=1}^3 g_{jk}(\vec{q}) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Zylinderkoords:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

Kugelkoords:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi}^2)$$

2 Variationsrechnung

Funktionale sind Funktionen von Funktionen, deren Optimierung und die optimale Funktion liefert, ähnlich wie ein Maximum einer Funktion, und einen Skalar gibt, an dem die Funktion maximal wird, gibt uns die Extremierung eines Funktionals eine optimale Funktion zurück.

$$F : y(x) \rightarrow F[y]$$

Für Funktionale werden eckige Klammern benutzt, nicht runde!

Beispiel Bogenlänge

$$L[y] = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x)}$$

2.1 2D- Taylor

Erinnerung 1D Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Nun in 2D

$$f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \dots$$

Fuer Extremum, müssen also die zwei linearen Termen verschwinden:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

2.2 Variation ohne NB

Die Funktioanel die wir uns anschauen haben erstmal die Form:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x) dx$$

Also ohne Nebenbedingungen.

Um dieses Funktional zu extremieren, muessen wir eine Funktion y finden, fuer die jede noch so kleine aendere-
ung, zu einer verschlechterung des Funktionals fuehren wuerde, wir variieren, also eine beliebige Funktion

$$y \rightarrow y + \epsilon \eta$$

Wobei η eine beliebige Funktion ist, die an den jeweiligen Randpunkten Null ist, damit unsere Variation von y
nicht die Randbedingungen mitvariiert.

Wir suchen nun nach Minimum:

$$\left. \frac{d J[y + \epsilon \eta]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

Man taylored hier nun, dann partielle Integrieren (der trick mit verschwindenden Randpunkten). Am Ende
steht etwas in Klammern, was fuer ein Extremum = 0 sein muss.

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Das ist die Euler-Lagrange Gleichung

Ganz ausgeschrieben steht da:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

2.3 Wirkungsfunktional

Das Wirkungsfunktional ist definiert als:

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

Hamiltons'sches Prinzip

$$\delta S = 0$$

Also die Wirkung extremal werden muss in der der Phsik (also eig., stationaer).

2.4 Verallg. Lagrange Gleichungen

2.4.1 Mehrere Funktionen

$$F = F(y_1, \dots, y_s, y'_1, \dots, y'_s, x) \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0$$

2.4.2 Mehrere Argumente

Also sei nun;

$$y = y(x_1, \dots, x_n) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{d}{dx_i} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

2.4.3 Hoehere Ableitungen

Wenn das Funktional z.b. die Form hat:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', y'', x) dx \\ \Rightarrow 0 = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''}$$

2.5 Variation mit Nebenbedingungen

Wenn wir ein Funktional haben, dass wir unter einer gegebenen Nebenbedingung Minimieren sollen, dann muessen wir den Lagrange-Parameter λ einfuegen und die Nebenbedingung als Funktion $G(y, y', x)$ formulieren. Dann gilt:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} = 0, \quad \bar{F} = F + \lambda G$$

Dabei muss G allerdings erfuehlen, dass es in der Form $G(y, y', x) = 0$ also holonom vorliegt. Und nicht von hoeren Ordnung als der ersten von y abhaengt, also mit $G(y, y', y'', x)$ wuerde es nicht gehen.

2.6 Hamiltonsches Prinzip

$$\delta S = 0$$

3 Symmetrien und Erhaltungen

Wenn L nicht direkt von einer koordinate abhaengt, dann dennen wir diese zyklische Variable:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Das fuhr zu dazu, dass der generalisierte Impuls zu j konstant ist:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j = const$$

Aus jeder Symmetrie folgt eine Erhaltungsgroesse

3.0.1 Homogenitaet der Zeit

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} H = 0$$

Also ist die Hamilton Funktion dann eine Erhaltungsgroesse.

Wenn wir ein konservatives System haben und skleronome Zwangsbedingungen, dann ist die Hamiltonfunktion H die Gesamtenergie E . Das gilt fuer rheonome Systeme nicht, dort ist nur H erhalten, aber E nicht.

3.0.2 Homogenitaet des Raumes

Also das eine verschiebung im Raum nicht relevant ist fuer das physiklische System.

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j = const$$

Im Konservativen System also, die Impulserhaltung.

Hier die Herleitung nochmal gesondert anschauen, kann mir vorstellen, dass das in der Klausur iwie drankommt

3.0.3 Isotropie des Raumes

Das bedeutet eine Invarianz des System unter Drehung.
Hierraus folgt die Gesamtdrehimpulserhaltung.

3.1 Noether Theorem

Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie in der Lagrange-Funktion L gibt es eine Erhaltungsgroesse.

4 nicht holonome Systeme

Konservative Systeme, aber nicht-holonom!

Wir brauchen nun unsere p Zwangsbedingungen in differentieller linearisierter Form:

$$\sum_{j=1}^S a_{ij} dq_j + b_i dt = 0, \quad 1 \leq i \leq p$$

Man erkennt, dass die S Freiheitsgrad nun nicht mehr unabhängig voneinander sind, ueber Ueberlegungen mit dem D'alambertschen Prinzip folgt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{ij}$$

Hierrueber laesst sich dann auch die Matrix a_{ij} konstruieren, indem wir rechts den Vektor \vec{q} aufschreiben.
Es ergeben sich Gleichungen mit $S + p$ Variablen, die restlichen Gleichungen erhaelt, man durch:

$$\sum_{j=1}^S a_{ij} \dot{q}_j + b_i = 0$$

4.1 Holonomer Fall

Fuer holonome Faelle (also mit Funktionn $f_i(\vec{q}, t) = 0$) mit differentiellen ZB, gilt:

$$\sum_{j=1}^S \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial q_j}}_{a_{ij}} \dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial t}}_{b_i} = 0$$

Ausserdem gilt:

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_k \partial q_j} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_j \partial q_k} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial b_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_k \partial t} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial q_k} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial t}$$

5 Starrer Koerper

Traegheitstensor

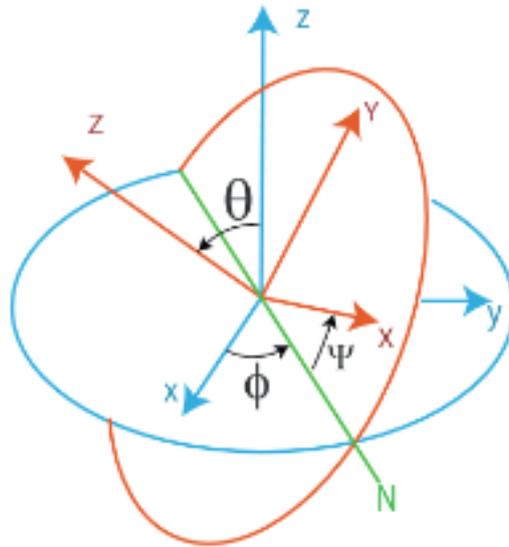
$$\underline{\underline{J}} = \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} x_{i2}^2 + x_{i3}^2 & -x_{i1}x_{i2} & -x_{i1}x_{i3} \\ -x_{i2}x_{i1} & x_{i1}^2 + x_{i3}^2 & -x_{i2}x_{i3} \\ -x_{i3}x_{i1} & -x_{i3}x_{i2} & x_{i1}^2 + x_{i2}^2 \end{pmatrix}$$

Das ganze kann man auch in den Kontinuumsmlimes bringen:

$$J_{im} = \int \rho(\vec{r})(r^2 \delta_{im} - x_i x_m) d\vec{r}$$

Im system der Hauptachsen, ist die Matrix Diagonal und die Kinetische Energie laesst sich schreiben als:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_i \omega_i^2$$



5.0.1 Eulerwinkel

- Drehung um \vec{e}_3 um Winkel ϕ
- Drehung um \vec{e}'_1 um Winkel θ
- Drehung um \vec{e}''_2 um Winkel ψ

Winkelgeschwindigkeit mit Eulerwinkel

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

Damit wird die Kinetische Energie zu:

$$T_R = \frac{1}{2} \vec{\omega} \underline{J} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 J_l \omega_l^2$$

6 Hamilton

6.1 Hamilton Funktion

$$H = H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_{j=1}^S \dot{q}_j(\vec{q}, \vec{p}, t) \cdot p_j - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t), t)$$

Dabei ist p_j :

$$p_j = \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j}$$

6.2 Bewegungsgleichungen

Partielle nach Ort:

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = - \frac{\partial L}{\partial q_k} \stackrel{L-Gl.}{=} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = -\dot{p}_k$$

Partielle nach Impuls:

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

Partielle nach Zeit:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Diese sind auch als die kanonischen Gleichungen bekannt.

6.3 Phasenraum

Diagramm mit p und q. 2 Dimensional!

6.4 Poisson Klammer

Seien F und G Funktionen von q, p, t , dann ist die Poisson Klammer definiert als;

$$\{F, G\} = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right)$$

Dadurch wird die Zeitableitung von F (wobei F eine physikalische Observable ist)

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Die Observable F ist, dann eine Erhaltungsgrösse, wenn die Poisson Klammer von F und H verschwindet und die Observable selbst nicht von der Zeit abhängt.

6.4.1 Kanonische Gleichungen mit Poisson

$$\dot{q}_j = \{q_j, H\}, \quad \dot{p}_j = \{p_j, H\}$$

6.4.2 Fundamentale Poisson Klammern

$$\{q_k, q_l\} = 0$$

$$\{p_k, p_l\} = 0$$

$$\{q_k, p_l\} = \delta_{kl}$$

$$\{p_k, q_l\} = -\delta_{kl}$$

6.4.3 Poisson-Klammer als Lie Algebra

Die Poisson Klammer bildet als Verknüpfung eine Lie-Algebra, es gilt;

- Antisymmetrie: $\{F, G\} = -\{G, F\}$
- Linearität: $\{c_1 F_1 + c_2 F_2, G\} = c_1 \{F_1, G\} + c_2 \{F_2, G\}$
- Nullelement: $\{F, c\} = 0$
- Produktregel: $\{F, GK\} = G\{F, K\} + \{F, G\}K$
- Jacobi-Identität: $\{F, \{G, K\}\} + \{G, \{K, F\}\} + \{K, \{F, G\}\} = 0$

7 Thermodynamik

7.1 Postulate

7.1.1 Postulat 1

Für einfache Systeme sind die Gleichgewichtszustände vollständig durch innere Energie U, Volumen V und Teilchenzahl N charakterisiert.

- Alle genannten Grössen sind extensiv
- Der GG Zustand darf nicht von der Geschichte (wie ist man dahingekommen) abhängen.

7.1.2 Postulat 2

Für jeden Gleichgewichtszustand existiert eine Funktion $S = S(U, V, N)$, die Entropie, sodass diese enach Entfernen der Wand maximal wird, ueber die Mannigfaltigkeit aller moeglichen Einschränkungen.

7.1.3 Postulat 3

Die Entropie ist additiv ueber Subsysteme (extensive Zustandsgroesse), stetig, differenzierbar und monoton Wachsend als Funktion von U.

7.1.4 Postulat 4

Die Entropie verschwindet, wenn die partielle Ableitung der inneren Energie nach der Entropie verschwindet.

7.2 Das Gleichgewicht

Es gibt die Funktion $U = U(S, V, N)$, also hat diese auch ein totales Differential.

$$dU = \underbrace{\frac{\partial U}{\partial S} \Big|_{V,N}}_{=T} dS + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial V} \Big|_{S,N}}_{=-p} dV + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial N} \Big|_{S,V}}_{=\mu} dN$$

Daraus ergibt sich die Gibb'sche Fundamentalform:

$$dU = T dS - p dV + \mu dN$$

Dabei ist $-pdV = \delta W_m$ und wenn dann $dN = 0$ ergibt sich:

$$T dS = dU - \delta W_m = \delta Q$$

Wenn $dN \neq 0$ definieren wir: $\mu dN = \delta W_e$

$$dU = \delta Q + \delta W_m + \delta W_e$$

Im Entropiebild:

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV + \frac{\mu}{T} dN$$

7.3 Euler-Gibbs Duham Beziehung

Euler- Beziehung

$$U = TS - pV + \mu N$$

Gibbs-Duhem-Beziehung

$$d\mu = -s dT + v dp$$

Im Energiebild:

$$S = \frac{1}{T} U + \frac{p}{T} V - \frac{\mu}{T} N$$
$$0 = U d\left(\frac{1}{T}\right) + V d\left(\frac{p}{T}\right) - N d\left(\frac{\mu}{T}\right)$$

7.4 Beispielsysteme

7.4.1 Ideales Gas

Wechselwirkung kann vernachlaessigt werden, und im besten Fall monoatomar.

$$pV = Nk_b T$$

$$U = cNk_b T$$

Dabei ist $c = \frac{3}{2}$ fuer monoatomare Gase. **Formeln:**

$$S = N(c k_B + k_B - \left(\frac{\mu}{T}\right)_0) + N k_B \ln \left[\left(\frac{U}{U_0}\right)^c \left(\frac{V}{V_0}\right)^1 \left(\frac{N}{N_0}\right)^{-(c+1)} \right]$$

$$S = N s_0 + N k_B \ln \left[\left(\frac{U}{N}\right)^c \left(\frac{V}{N}\right) \right]$$

s_0 laest sich bestimmen mit:

$$s_0 = k_B \left[\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{4\pi m}{3h^2} \right) \right]$$

dabei ist h das Planksche Wirkungsquantum und m die Masse des Teilchens.

$$S = Nk_B \left\{ \ln \left(\frac{V}{N\lambda^3} \right) + \frac{5}{2} \right\}$$

mit λ der De Broglie Wellenlaenge

$$\lambda = \sqrt{\frac{3h^2 N}{4\pi m U}}$$

Zustandsgleichungen:

$$U = \frac{3}{2} Nk_B T$$

$$pV = Nk_B T$$

$$\mu = k_B T \ln \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)$$

Mit $\rho = \frac{N}{V}$ und $p_0 = \frac{k_B T}{\lambda^3}$ folgt:

$$u = \frac{3}{2} k_B T$$

$$p = \rho k_B T$$

$$\mu = k_B T \ln(\rho \lambda^3) = k_B T \ln \left(\frac{p}{p_0} \right)$$

Die ganzen klengeschriebenen groessen, die normalerweise gross sind, ergeben sich aus $u = \frac{U}{N}$ oder $v = \frac{V}{N}$

7.4.2 Van der Waals Gase

Hier fuegen wir nun 2 Korrekturen ein:

- anziehende Wechselwirkung.
- Atome haben Eigenvolumen b

Es gilt dann:

$$p = \frac{Nk_B T}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2}$$

Es folgt die Gleichung:

$$\frac{p}{T} = \frac{k_B}{v - b} - \frac{a}{v^2 T}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{ck_B}{u + \frac{a}{v}}$$

Nach Einsetzen folgt:

$$\frac{p}{T} = \frac{k_B}{v - b} - \frac{a}{v^2} \frac{ck_B}{u + \frac{a}{v}}$$

Dadurch ergibt sich die Entropie Grundgleichung:

$$S = Ns_0 + Nk_B \ln \left[(v - b) \left(u + \frac{a}{v} \right)^c \right]$$

Van der Waals Gleichung

$$p = \frac{k_B T}{v - b} - \frac{a}{v^2}$$

Phasenuebergang

Wir fordern, dass bei einem Phasenuebergang das gleichen Chem. potential herrscht.

$\mu_1 = \mu_2$ Die Flaechen unter der Kurve muss ident sein. Dat nennt sich Maxwell-Konstruktion.

lokales Stabilitaetskriterium:

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \right|_{V,N} \leq 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} \right|_{U,N} \leq 0$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V^2} \frac{\partial^2}{\partial U^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial U} \right)^2 \geq 0$$

7.5 Materialgrossen

Es gibt lediglich 3 unabhängige Materialgroessen.

Die Standardwahl ist:

- Koeffizient thermischer Ausdehnung: $\alpha = \left. \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p$

Das beschreibt die relative Volumenzunahme, bei Temperaturerhöhung und konstantem Druck

- Isotherme Kompressibilität: $\kappa_T = - \left. \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T$

Also die relative Volumenabnahme, bei Druckerhöhung mit konstanter Temp.

- Isobarespezifische Wärme: $c_p = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_p = \left. \frac{\delta Q}{\delta T} \right|_p$

Also die Warmereaufnahme bei temperaturerhöhung und konstantem Druck

Es gilt:

$$c_p > c_V$$

$$c_V = c_p - \frac{TV\alpha^2}{\kappa_T}$$

7.5.1 Materialgroessen beim Idealen Gas

$$\alpha = \frac{1}{T}$$

$$\kappa_T = \frac{1}{p}$$

$$c_V = \frac{3}{2} N k_B = \text{const}$$

$$c_p = \frac{5}{2} k_B N = \text{const}$$

Aus dem lokalen Stabilitätskriterium kann man sich herleiten, dass $c_p \geq c_V \geq 0$

[EVTLL KLAUSURAUFGABE: MATERIALGROESSEN FUER VDW GASE AUSRECHNEN]

7.6 Thermodynamische Potentiale

Idee: Grundgleichung nach intensiven Variablen umformen, weil diese besser zu kontrollieren sind: \Rightarrow Legendre-Transformation.

8 Sonstiges Wichtiges (mit blick auf Cheatsheet)

8.1 totale Differenziale

Ein totales Differential von $f(x_i)$ hat die Form:

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Es heisst vollständig wenn gilt:

$$f(x, y), \quad df = P dx + G dy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$$

In 3D:

$$f(x, y, z), \quad df = Pdx + Qdy + Rdz$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

8.2 DGLs

8.3 Legendre-Transformationen

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ und wir wollen diese Legendre Trafoen auf $g(p)$. **Ableiten**
Wir bilden nun

$$p = f'(x)$$

Umstellen

Wir stellen um, sodass wir

$$x(p)$$

erhalten.

Definition der Legendre Trafo:

$$g(p) = p \cdot x(p) - f(x(p))$$

Recktrafo:

$$f(x) = p \cdot x - g(p), \quad x = g'(p)$$

Mehrdimensional

$$\vec{p} = \nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Dann ist:

$$g(\vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{x} - f(\vec{x})$$

9 Zettelloesungen

9.1 Zettel 1

9.1.1 Aufgabe 1

a)

$$\frac{df}{dt} = 2(x - L \cos(\omega t)) \cdot (\dot{x} + L \sin(\omega t) \cdot \omega)$$

b)

$$\frac{dh}{dt} = 2(\dot{x} + L \sin(\omega t)\omega) \cdot (\dot{x} + L \sin(\omega t)\omega) + 2(x - L \cos(\omega t)) \cdot (\ddot{x} + L \cos(\omega t)\omega^2)$$

9.2 Zettel 2

9.3 Zettel 3

9.4 Zettel 4

9.5 Zettel 5

9.6 Zettel 6

9.7 Zettel 7

9.8 Zettel 8

9.9 Zettel 9

9.10 Zettel 10