

Konstanten

- $-h = 1.055 \times 10^{-34}$ Js, $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js
- $-k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ J/K, $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg
- $-1\text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19}$ J, $a_B \approx 0.529 \text{ \AA}$
- $-\text{Rydberg: } 13.6\text{ eV; } 1\text{ u} = 1.661 \times 10^{-27}\text{ kg}$

Größenordnung: QM nötig?

- $-\lambda = h/p$, thermisch $\lambda = h/\sqrt{3mk_BT}$
- $-\lambda \gg d \Rightarrow$ QM nötig; $\lambda \ll d \Rightarrow$ klassisch

Dirac-Notation & Hilbertraum

- $-\langle u|v\rangle = \sum_i u_i^* v_i$: antilinear in Bra, linear in Ket
- $-\text{Vollständigkeit (ONB): } \sum_i |i\rangle \langle i| = \mathbb{K}$
- $-\text{Orthogonalität: } \langle i|j\rangle = \delta_{ij}$
- $-\hat{O} = \sum_{ij} O_{ij} |i\rangle \langle j|$, $O_{ij} = \langle i|\hat{O}|j\rangle$
- $-\langle \phi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle = \langle \hat{A}\phi|\psi\rangle = \langle \psi|\hat{A}\phi\rangle^*$
- $-(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$; $(\hat{A}|\psi\rangle)^\dagger = \langle \psi|\hat{A}^\dagger$
- $-\text{hermitesch } \hat{A} = \hat{A}^\dagger$: EW reell, EZ (versch. EW) orthogonal
- $-\text{unitär } \hat{U}^\dagger \hat{U} = \mathbb{K}$: erhält $\langle \cdot|\cdot\rangle$, EW $= e^{i\theta}$
- $-\hat{U} = e^{i\alpha \hat{A}}$ unitär ($\alpha \in \mathbb{R}$) $\iff \hat{A} = \hat{A}^\dagger$
- $-\text{Projektor: } \hat{P}^2 = \hat{P} = \hat{P}^\dagger$, EW 0, 1; $\hat{P}_i = |i\rangle \langle i|$
- $-\text{Spektralsatz: } \hat{A} = \sum_i a_i \hat{P}_i$ (hermitesch)
- $-\text{Tr } \hat{A} = \sum_n \langle n|\hat{A}|n\rangle$ basisunabh.; zyklisch $\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \text{Tr}(\hat{B}\hat{C}\hat{A})$
- $-\text{Basiswechsel: } O^{(b)} = U^\dagger O^{(a)} U$

Kommutatoren — Rechenregeln

- $-\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = -\langle \hat{B}, \hat{A} \rangle$
- $-\hat{A}\hat{B} = \frac{1}{2} \langle \hat{A}, \hat{B} \rangle + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]$
- $-\langle \hat{A}, \hat{B}\hat{C} \rangle = \langle \hat{A}, \hat{B} \rangle \langle \hat{C} \rangle + \langle \hat{A}, \hat{C} \rangle \langle \hat{B} \rangle$
- $-\langle \hat{A}\hat{B}, \hat{C} \rangle = \langle \hat{A}|\hat{B}, \hat{C} \rangle + \langle \hat{A}, \hat{C} \rangle \langle \hat{B} \rangle$
- $-\text{Jacobi: } \langle \hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}] \rangle + \langle \hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}] \rangle + \langle \hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}] \rangle = 0$
- $-\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = c \in \mathbb{C} \Rightarrow \langle \hat{A}, f(\hat{B}) \rangle = cf^*(\hat{B})$
- $-\langle \hat{x}, F(\hat{p}) \rangle = i\hbar F'(\hat{p})$, $\langle \hat{p}, G(\hat{x}) \rangle = -i\hbar G'(\hat{x})$
- $-\hat{A}, \hat{B}$ hermitesch: $\hat{A}\hat{B}$ hermitesch $\iff \langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = 0$
- $-i[\hat{A}, \hat{B}]$ immer hermitesch (auch wenn $\neq 0$)
- $-\text{hermitesche } \hat{A}, \hat{B}$: $[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = -[\hat{A}, \hat{B}]$ (antihermiteisch!)
- $-\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = 0 \Rightarrow$ simultane Eigenbasis, gleichzeitig scharf messbar
- $-\text{Tr}[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ immer

Operator-Exponentiale

- $-\text{Hadamard: } e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$
- $-\text{BCH-Spezialfall } ([\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0):$
 - $e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]}$
 - $e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{B}} e^{\hat{A}} \iff [\hat{A}, \hat{B}] = 0$; nie
- $-\text{naj } e^{\hat{A} + \hat{B}}$ setzen!
- $-\text{e}^X$ orthogonal $\iff X^T = -X$ (reell antisym.)
- $-M^2 \propto \mathbb{K} \Rightarrow$ Reihe kollabiert auf $\cos/\sin$ (bzw. $\cosh/\sinh$)
- $-\hat{U} \hat{A} \hat{U}^\dagger = \hat{U} \hat{e} \hat{A} \hat{U}^\dagger$ ($\hat{U}$ unitär)

Kanon. Vertauschung & Darstellungen

- $-\langle \hat{x}_i, \hat{p}_j \rangle = i\hbar \delta_{ij}$, $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$
- $-\text{Ortsdarst.: } \hat{x}\psi = x\psi$, $\hat{p}\psi = -i\hbar \partial_x \psi$
- $-\text{Impulsdarst.: } \hat{p}\phi = p\phi$, $\hat{x}\phi = i\hbar \partial_p \phi$
- $-\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$
- $-\text{Translation: } \hat{T}(a) = e^{-ia\hat{p}/\hbar}$, $\hat{T}^\dagger(a)\hat{x}\hat{T}(a) = \hat{x} + a$

Fourier & Delta-Distribution

- $-\mathcal{F}[f](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ikx} dx$, Rücktrafo mit $+ikx$
- $-\text{Verschiebung } e^{-ika}$, Skalierung $\frac{1}{a} f(k/a)$, Ableitung $\rightarrow ik \cdot$, $x \rightarrow i \frac{d}{dk}$
- $-\int e^{-\alpha k^2 + \beta k} dk = \sqrt{\pi/\alpha} e^{\beta^2/4\alpha}$ (Gauß bleibt gaußisch)
- $-\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ik(x-x_0)} dk$
- $-\delta(ax) = \delta(x)/|a|$; $\delta(f(x)) = \sum_i \delta(x - x_i)/|f'(x_i)|$
- $-\int \delta'(x - x_0) f(x) dx = -f'(x_0)$
- $-\text{reelles } f \Rightarrow \tilde{f}(-k) = \tilde{f}(k)^*$; zus. gerade $\Rightarrow \tilde{f}$ reell+gerade

Erwartungswerte, Unschärfe, Ehrenfest

- $-\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi|\hat{A}|\psi\rangle$; $(\Delta A)^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$
- $-\text{Heisenberg-Robertson: } \Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$
- $-\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$; Gleichheit $\iff (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)|\psi\rangle \propto (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle)|\psi\rangle$
- $-\text{Ehrenfest: } \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle + \langle \partial_t \hat{A} \rangle$
- $-\langle \hat{z} \rangle(\hat{x}) = \langle \hat{p} \rangle/m$, $\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = -\langle \partial_x V \rangle$
- Zeitentwicklung & Bilder**
- $-\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ ($\hat{H}$ zeitunabh.), löst $i\hbar \partial_t \hat{U} = \hat{H} \hat{U}$
- $-\text{Dyson-Reihe für } \hat{H}(t)$ zeitabhängig (Zeitordnung!)
- $-\text{Schrödinger-Bild: Zustände zeitabh., Operatoren fest}$
- $-\text{Heisenberg: } \hat{A}_H = \hat{U}^\dagger \hat{A}_S \hat{U}$, $\frac{d}{dA} t = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}_H] + \partial_t \hat{A}_H$
- $-\text{Wechselwirkungsbild } (\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1):$
 - $\hat{A}_I = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{A}_S e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}$, $i\hbar \partial_t |\psi_I\rangle = \hat{H}_{1,I} |\psi_I\rangle$
 - $-\langle \hat{H}, \hat{G} \rangle = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \hat{G} \rangle = 0$ (Erhaltungsgroße, Noether)
 - $-\text{nur Energiedifferenzen messbar; globale Phase egal}$

Messpostulate

- $-\text{Observable } \hat{A} = \sum a_i \hat{P}_i$, Messwerte = Eigenwerte
- $-\text{Born-Regel: } P(a_i) = \langle \psi|\hat{P}_i|\psi\rangle = \|\hat{P}_i|\psi\rangle\|^2$
- $-\text{Kollaps: } |\psi\rangle \rightarrow \hat{P}_i|\psi\rangle/\|\hat{P}_i|\psi\rangle\|$
- $-\text{kommutierende Observable: gemeinsame Eigenbasis, gleichsch. scharf}$
- $-\text{VSKO: inkompatible } \hat{B}, \hat{C}$ (beide $[\cdot, \hat{A}] = 0$) erzwingen Entartung von $\hat{A}$

Symmetrien

- $-\text{Parität: } \hat{P}|\lambda\rangle = |-x\rangle$, $\hat{P}^2 = \mathbb{K}$, EW ± 1 , $\hat{P}\hat{x}\hat{P} = -\hat{x}$
- $-\hat{V}(-x) = V(x) \Rightarrow [\hat{H}, \hat{P}] = 0$: EZ mit

- definierter Parität wählbar
- $-\text{Translation } \hat{T}(a) = e^{-ia\hat{p}/\hbar}$, erzeugt von $\hat{p}$
- $-\text{Rotation } \hat{D}(\vec{n}, \theta) = e^{-i\theta \vec{n} \cdot \vec{J}/\hbar}$, erzeugt von $\vec{J}$
- $-\text{Zeitumkehr } \hat{\Theta}$ antiunitär: $\hat{\Theta}_i \hat{\Theta}^{-1} = -i$, $\hat{\Theta} \hat{x} \hat{\Theta}^{-1} = \hat{x}$, $\hat{\Theta} \hat{p} \hat{\Theta}^{-1} = -\hat{p}$, $\hat{\Theta} \hat{L} \hat{\Theta}^{-1} = -\hat{L}$
- $-\text{Symmetriegenoperator kommutiert mit } \hat{H} \Rightarrow$ Erhaltungsgröße
- Lie-Gruppen, Generatoren & SO(3)**
- $-\text{unitäre Darst.: } \hat{U}(\alpha) = e^{i\alpha \hat{A}}$, $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ = Generator
- $-\text{nicht-abelsch: Generatoren bilden Lie-Algebra } [\hat{T}^a, \hat{T}^b] = i f^{abc} \hat{T}^c$ (Strukturkonstanten)
- $-\text{SO}(3): (\hat{T}^a)_{bc} = -i\epsilon_{abc}$, $\text{Tr}(\hat{T}^a \hat{T}^b) = 2\delta^{ab}$, $[\hat{T}^a, \hat{T}^b] = i\epsilon_{abc} \hat{T}^c$; $e^{i\psi \hat{T}^a}$ = Drehmatrix um Achse a
- $-\text{reell antisym. } X (X^T = -X) \iff e^X$ orthogonal; hermitesch $\hat{A} \iff e^{i\alpha \hat{A}}$ unitär — strukturgleich
- $-\text{Translationen } [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$: abelsch; Rotationen $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] \neq 0$: nicht-abelsch ($SO(3)$)
- $-\text{Generator-Wörterbuch: Zeittransl.} \leftrightarrow \hat{H}$, Ortstransl. $\leftrightarrow \hat{p}$, Rotation $\leftrightarrow \vec{J}$
- $-\text{Translation via Taylor: } \hat{T}(a)\psi(x) = \psi(x-a) = e^{-a\partial_x} \psi(x) = e^{-ia\hat{p}/\hbar} \psi(x)$
- Harmonischer Oszillator**
- $-\hat{H} = \hat{p}^2/2m + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$
- $-\hat{x} = \sqrt{\hbar/2m\omega} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$, $\hat{p} = i\sqrt{m\hbar\omega/2} (\hat{a}^\dagger - \hat{a})$
- $-\langle \hat{a}, \hat{a}^\dagger \rangle = 1$, $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2})$
- $-\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
- $-\hat{E}_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, $n = 0, 1, 2, \dots$
- $-\langle \hat{x} \rangle_n = \langle \hat{p} \rangle_n = 0$; $\langle \hat{x}^2 \rangle_n = \frac{\hbar}{m\omega} (n + \frac{1}{2})$
- $-\text{Variational: } \langle \hat{T} \rangle_n = m\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$
- $-\psi_0(x) \propto e^{-m\omega x^2/2\hbar}$, $\Delta x \Delta p = \hbar/2$ (minimal)
- $-\text{Kohärent: } \hat{a}|z\rangle = z|z\rangle$, $|z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_n z^n / \sqrt{n!} |n\rangle$, $\Delta x \Delta p = \hbar/2 \forall z$, nicht orthogonal
- $-\text{nur Term mit gleich viel } \hat{a}, \hat{a}^\dagger \text{ überlebt in } \langle n|(\dots)|n\rangle$
- Drehimpuls-Algebra**
- $-\langle \hat{L}_i, \hat{L}_j \rangle = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k$, $[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0$
- $-\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$; $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm \hbar \hat{L}_\pm$, $[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar \hat{L}_z$
- $-\hat{L}_\pm |l, m\rangle = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)} |l, m \pm 1\rangle$
- $-\hat{L}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1) |l, m\rangle$, $\hat{L}_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle$
- $-\text{Bahndrehimpuls: } \ell \in \mathbb{N}_0$ (ganzzahlig!)
- $m = -\ell, \dots, \ell$
- $-\text{allg. } \hat{J}$: j halb-/ganzzahlig erlaubt

- $-\langle \hat{L}_i, \hat{x}_j \rangle = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{x}_k$ (Vektoroperator), analog $\hat{p}$
- $-\text{Zentralpotential: } [\hat{H}, \hat{L}^2] = [\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$, VSKO $\{\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z\}$
- $-\text{Y-}^\ell$: Parität $(-1)^\ell$; $\langle \hat{L}_x \rangle = \langle \hat{L}_y \rangle = 0$ in $|\ell m\rangle$
- $-\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$
- Spin-1/2 & Pauli-Matrizen**
- $-\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $-\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{K} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k$; $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$, $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k$
- $-(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \mathbb{K} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
- $-\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$, $\hat{S}^2 = \frac{3}{2} \hbar^2 \mathbb{K}$
- $-\hat{D}(\vec{n}, \alpha) = \cos \frac{\alpha}{2} \hat{I} - i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin \frac{\alpha}{2}$
- $-\hat{4}\pi$ -Periodizität: $\hat{D}(\vec{n}, 2\pi) = -\mathbb{K}$, erst 4π wieder $+\mathbb{K}$
- $-\text{allg. Zustand } |\chi\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$ (Bloch-Kugel)
- Drehimpulsaddition**
- $-\hat{J} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$: $j \in \{|s_1 - s_2|, \dots, s_1 + s_2\}$, Mult. $2j + 1$
- $-\text{Jmax, Jmax} = |s_1 s_1; s_2 s_2\rangle$ eindeutig (Randargument)
- $-\hat{J}_-$ heruntersteigen + Orthogonalität $\rightarrow$ nächster Multipllett
- $-\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 = \frac{1}{2} (\hat{J}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2)$
- $-\text{2 Spin-}\frac{1}{2}$: Singulett $j = 0$ (antisym.), Triplett $j = 1$ (sym., 3-fach entartet)
- Zentralpotential & Wasserstoff**
- $-u = rR(r): -\frac{\hbar^2}{2m} u'' + \left[V + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} \right] u = Eu$
- $-\text{Coulomb: } E_n = -\frac{13.6\text{ eV}}{n^2} Z^2$; $\ell = 0, \dots, n-1$; Entartung n^2
- $-\psi_{n\ell m} = R_{n\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \phi)$; $|\psi_{n\ell m}|^2 \propto r^{2\ell}$ für $r \rightarrow 0$
- $-\text{Minimale Kopplung: } \hat{p} \rightarrow \hat{p} - e\vec{A}$; Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$
- $-\text{homog. } \vec{B} = B\vec{e}_z$: $\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{e}{2m} B \hat{L}_z + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2$
- $-\text{Zeeman: hebt } m\text{-Entartung äquidistant auf, } \Delta E = e\hbar B/2m$
- Störungstheorie & Variation**
- $-\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$: $E_n^{(1)} = \langle n|\hat{H}'|n\rangle$
- $-\langle n \rangle^{(1)} = \sum_{k \neq n} \frac{\langle k|\hat{H}'|n\rangle}{E_0 - E_k} \langle k|$
- $-E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k|\hat{H}'|n\rangle|^2}{E_0 - E_k}$; Grundzustand $E_0^{(2)} \leq 0$ immer
- $-\text{entartet: erst } \hat{H}' \text{ im entarteten Unterraum diagonalisieren}$
- $-\text{Glücksfall } [\hat{H}_0, \hat{H}'] = 0$: PT 1. Ordnung wird exakt
- $-\text{Variation: } E_0 \leq \langle \psi|\hat{H}|\psi\rangle / \langle \psi|\psi\rangle$ für jedes $|\psi\rangle$
- $-\text{Hellmann-Feynman: } \partial_\lambda E_n = \langle \partial_\lambda \hat{H} \rangle_n$
- $-\text{Virialsatz } (V(\lambda \vec{x}) = \lambda^k V(\vec{x})): 2 \langle T \rangle = k \langle V \rangle$

Zeitabh. Störung & Zwei-Niveau

- $-c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle f|\hat{H}'(t')|i\rangle \times e^{i\omega_{fi}t'} dt'$ ($\omega_{fi} = (E_f - E_i)/\hbar$)
- $-\text{Fermis Goldene Regel: } \Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|\hat{H}'|i\rangle|^2 \rho(E_f)$
- $-\text{Rabi (resonant): } \dot{c}_1 = -i\Omega c_2, \dot{c}_2 = -i\Omega c_1$
 - $\Rightarrow P_{1 \rightarrow 2}(t) = \sin^2(\Omega t)$
- $-\text{allg. Zwei-Niveau: } P(t) = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2(\Delta E t/2\hbar)$
- $-\text{Kopplung enthält oft Faktor } \frac{1}{2}$ — Vork Faktoren immer nachrechnen!
- Streuung, Tunneln, δ-Potential**
- $-\psi, \psi'$ stetig bei endlichem Sprung von V (Standard-Anschluss)
- $-V = -q\delta(x): \psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2mq}{\hbar^2} \psi(0)$
- $-\text{genau ein gebundener Zustand: } E_0 = -2m\alpha^2/2\hbar^2$
- $-\text{Kontinuitätsgleichung: } E < V_0 \leftrightarrow E > V_0: k' \rightarrow i\kappa'$
- $-\text{Tunneln nichtpert. in } \hbar: |T|^2 \sim e^{-2\kappa' a} \rightarrow 0$ schneller als jede Potenz
- Kontinuitätsgleichung**
- $-\rho = |\psi|^2, \vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) = -\frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \nabla \psi)$
- $-\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$ (reelles V); unitäre Zeitentw. $\iff \hat{H} = \hat{H}^\dagger$
- $-V + iU: \partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = \frac{2U}{\hbar} \rho$ (Quelle/Senke, $U < 0$: Absorption)

WKB (halbklassisch)

- $-\text{Bohr-Sommerfeld: } \oint p dx = 2\pi\hbar(n + \frac{1}{2})$
- $-\text{gültig für langsam veränderliches } V$ ($\lambda_{dB} \ll$ Skalenlänge von V)
- Mehrteilchensysteme**
- $-\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$; separabel $\iff |\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ ($c_{ij} = a_i b_j$, Rang 1)
- $-\text{verschränkt: nicht faktorisierbar (z.B. Singulett/Triplett)}$
- $-\text{Bosonen: symmetrisch; Fermionen: antisymmetrisch unter Vertauschung}$
- $-\text{Pauli-Prinzip: Fermionen nie im selben Einteilchenzustand}$
- $-\text{Messung an verschr. Zst.: Kollaps korreliert beide Teile; keine Signalübertragung (No-Communication-Theorem)}$

Typische Aufgaben-Muster

- $-\text{Hermitesch zeigen: } \langle \phi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle \psi|\hat{A}|\phi\rangle^*$ oder $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ direkt
- $-\text{Kommutator berechnen: Ortsdarst. + Produktregel, oder algebraisch mit B-Regeln}$
- $-\text{Leitoperator-Wirkung: Kommutator mit } \hat{N}/\hat{L}_z \text{ bilden} \rightarrow \text{EW-Verschiebung}$
- $-\text{Erhaltungsgroße zeigen: } [\hat{H}, \hat{G}] = 0$ (Ehrenfest/Heisenberg)
- $-\text{2} \times \text{2-}\hat{H} \text{ diagonalisieren: char. Polynom, oder Pauli-Zerlegung } \hat{H} = a_0 \mathbb{K} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$
- $-\text{Vollständigkeit nutzen: } \sum |i\rangle \langle i| \text{ einschieben zur Basisumrechnung}$
- $-\text{Gebundene Zustände: Ansatz } e^{-\kappa|x|}$, Stetigkeit + Sprungbedingung

- $-\text{Störungstheorie 1./2. Ord.: } \langle k|\hat{H}'|n\rangle$ berechnen, Entartung prüfen
- $-\text{Unschärfe gesättigt zeigen: Cauchy-Schwarz-Gleichheit, Proportionalität der Vektoren}$
- $-\text{Auswahlregeln: } \langle f|\hat{A}|i\rangle$ per Symmetrie/Parität als 0 erkennen

Standardtricks

- $-\text{Einsen einschieben } (\sum |i\rangle \langle i| = \mathbb{K})$ zur Basisumrechnung
- $-\text{Operatoridentität} \rightarrow$ skalare Parameter-DGL (Hadamard/BCH)
- $-\text{Matrizelement zweimal auswerten (direkt + adjungiert)} \rightarrow$ Standardsätze
- $-\text{Symmetrie/Parität vor Integration prüfen: ungerade} \times \text{gerade} = 0$
- $-\text{antisym.} \times \text{sym.} = 0$ bei Indexkontraktionen (ϵ_{ijk})
- $-\text{exakt lösbaren Spezialfall als Konsistenzcheck rechnen}$
- $-\text{Heisenberg- statt Schrödinger-Rechnung bei Operatorodynamik}$
- $-\text{Variable im Integral erzeugen: Ableitung des Exponentialkerns nach konjug. Variable}$
- $-\text{divergente Summen: Konvergenzfaktor } e^{-\varepsilon|n|}$, dann $\varepsilon \rightarrow 0$
- $-\text{Skalierung statt Neuerechnen bei geändertem Parameter (z.B. Masse)}$
- $-\text{analytische Fortsetzung } k \rightarrow i\kappa$ statt Fallunterscheidung doppelt rechnen

Oft vergessene Identitäten

- $-\langle \psi|\psi\rangle \geq 0, = 0 \iff |\psi\rangle = 0$
- $-\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B}\hat{A})$, aber $\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \neq \text{Tr}(\hat{A}\hat{C}\hat{B})$ i. A.
- $-\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ nicht hermitesch $\Rightarrow$ komplexe EW z kein Widerspruch
- $-\langle \hat{x}, \hat{p} \rangle = i\hbar \neq 0 \Rightarrow$ keine gemeinsame Eigenbasis, $\Delta x \Delta p > 0$ immer
- $-\text{1D gebundene Zustände (stückweise stetiges } V) \text{ nie entartet}$
- $-\text{kohärente Zustände: nicht orthogonal, übervollständig}$
- $-\langle \hat{H}, \hat{P} \rangle = 0 \neq \hat{H}$ "ist gerade"; es ist $V(x)$, das gerade ist
- $-\hat{U}$ unitär $\neq \hat{U}$ hermitesch — nicht verwechseln
- $-\text{Rotationsgeneratoren: } \hat{J}_i/\hbar \text{ erzeugt Drehung, nicht } \hat{J}_i \text{ selbst}$

Typische vereinfachende Annahmen

- $-\text{„schwache Störung“} \Rightarrow \text{PT 1./2. Ordnung reicht}$
- $-\text{„}R \ll a_B\text{“ / kleine Länge} \Rightarrow \psi \text{ im Bereich konstant nähern}$
- $-\text{„adiabatisch langsam“} \Rightarrow \text{System bleibt im instantanen Eigenzustand}$
- $-\text{„resonant } \omega = \omega_0\text{“} \Rightarrow \text{Rotating-Wave-Näherung, ein Term dominiert}$
- $-\text{„stationärer Zustand“} \Rightarrow \text{nur globale Phase, } \langle \hat{A} \rangle_t \text{ konstant}$
- $-\text{„reelles } \psi\text{“} \Rightarrow \langle \hat{p} \rangle = 0$
- $-\text{„symmetrisches Potential“} \Rightarrow \text{Parität nutzen, halber Rechenaufwand}$
- $-\text{„normierbar } \psi \rightarrow 0 \text{ im Unendlichen“} \Rightarrow \text{Randterme bei part. Integration} = 0$